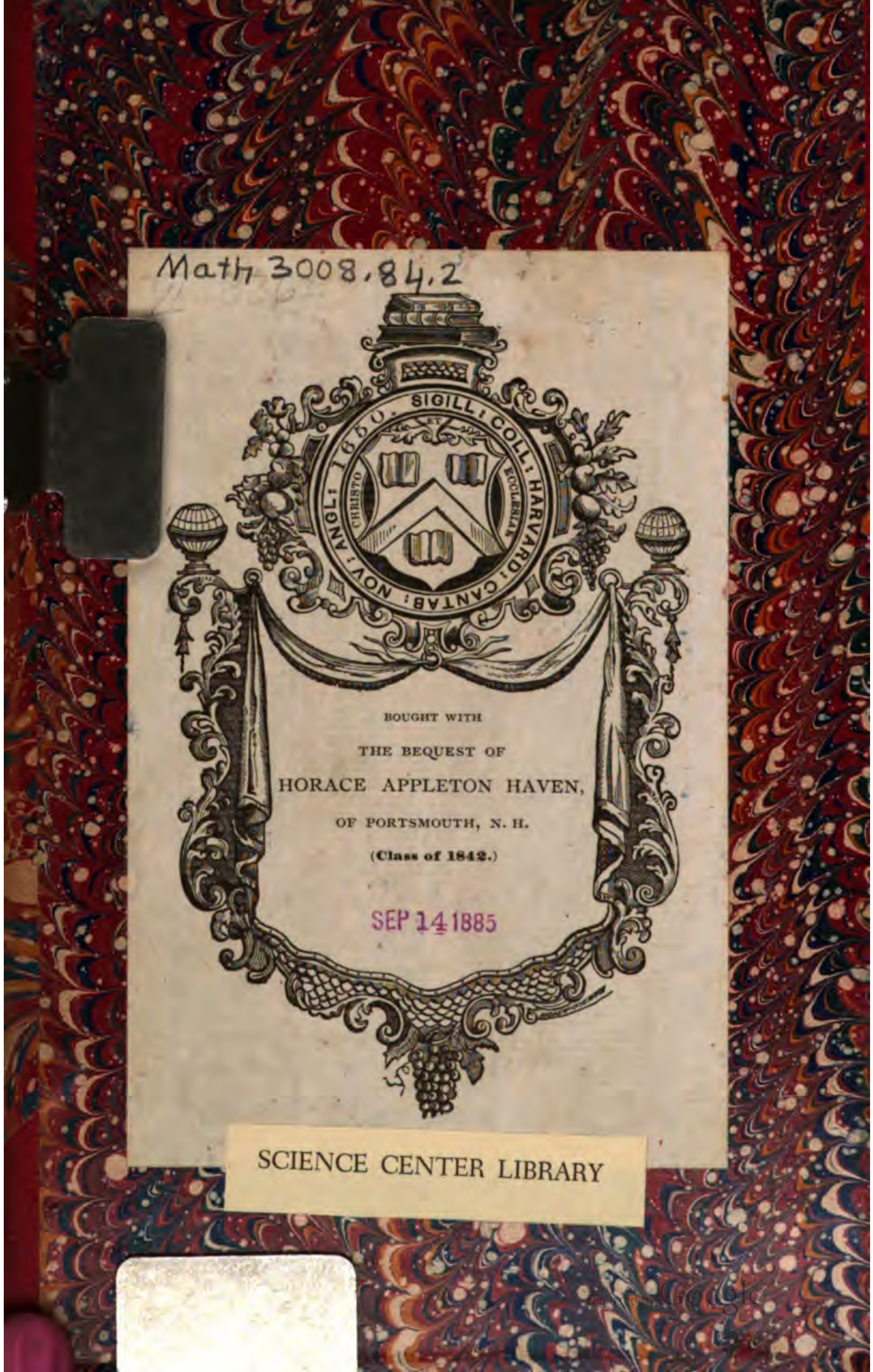

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE



LEHRBUCH

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG

VON

J.-A. SERRET

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

MIT GENEHMIGUNG DES VERFASSERS

DEUTSCH BEARBEITET

VON

AXEL HARNACK

DR., UND PROFESSOR AM POLYTECHNIKUM ZU DRESDEN.

ERSTER BAND.

DIFFERENTIALRECHNUNG.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.



LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1884.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorwort zur deutschen Ausgabe.

Unter den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, welche im Laufe des letzten Decenniums veröffentlicht worden sind, erscheint das Werk des Herrn Serret zu einem ersten, grundlegenden Studium besonders geeignet; denn es verbindet mit klarer Präcision eine grosse Vollständigkeit in den Anwendungen dieser Theorie. Je vollkommener die Einsicht in die Mannigfaltigkeit der reellen Funktionen, von denen die komplexen doch nur eine besondere Art bilden, geworden ist, um so mehr erhöhen sich die Anforderungen an eine exakte Begründung der Analysis. Dieselbe wird in dem vorliegenden Werke dadurch angestrebt und erreicht, dass alle Lehrsätze zwar nicht immer in der vollen Allgemeinheit ihrer Gültigkeit dargelegt, jedoch stets mit genauer Angabe der Voraussetzungen bewiesen werden. Dies nur ist zunächst notwendig, ja für den Beginn des Studiums allein zweckmässig. Denn dieses soll vor allem dazu führen, dass der Anfänger alsbald erkennt, wie vielseitig und vollkommen die Methode ist, mit welcher wir die stetigen Formen und Bewegungen der messbaren Grössen bis zu ihren Grenzen zu untersuchen vermögen. Der erste Teil, die Differentialrechnung, enthält daher eine umfassende Theorie der Kurven und Flächen, während in der Integralrechnung eine Theorie der Differentialgleichungen gegeben ist, wie sie in den deutschen Lehrbüchern, abgesehen von dem Werke des Herrn Dienger, das schon einer früheren Zeit angehört, eigentlich vollständig fehlt. Freilich ist gerade auf diesem Gebiete, besonders bei den linearen Gleichungen, die Art der Problemstellung in den letzten Jahren eine wesentlich neue geworden; doch bleiben die älteren Methoden eines Euler und Lagrange als Grundlage des Ganzen nach wie vor unentbehrlich, wenn auch das Bestreben, alle Probleme in dieselbe Form zu zwingen, sich als wertlos erwiesen hat. Für die Integration der partiellen Differential-

gleichungen erster Ordnung ist nur die Methode von Cauchy, für Gleichungen zweiter Ordnung die von Monge und Ampère angegeben, und ich habe dies auch in der vorliegenden Ausgabe nicht geändert, zumal da die Jacobischen Arbeiten jetzt zugänglicher als früher geworden sind.

In der Erkenntnis, dass es nicht thunlich ist, dem Studierenden, der sich neue Begriffe zu eigen machen soll, ein Lehrbuch zu empfehlen, welches in einer fremden Sprache geschrieben ist, selbst wenn er dieselbe einigermassen beherrscht, habe ich diese deutsche Bearbeitung unternommen, als ich im vorigen Herbst meine Lehrthätigkeit für längere Zeit unterbrechen musste. Die Genehmigung dazu wurde mir in bereitwilligster Weise von dem Herrn Verfasser sowohl, wie von dem Verleger, Herrn Gauthier-Villars, erteilt, denen ich meinen verbindlichsten Dank hierfür ausspreche. Meiner Arbeit liegt die zweite Ausgabe des französischen Originales zu Grunde, deren Bände in den Jahren 1879 und 1880 erschienen sind. Es war nicht mein Bestreben, den Inhalt des Werkes zu erweitern, das sich schon in vielen Kapiteln durch ausgedehntere eigene Untersuchungen des Herrn Serret auszeichnet. Auch die allgemeinen Lehrsätze habe ich fast sämtlich in dem Umfange belassen, welche der Verfasser ihnen gegeben hat. Die Werke der Herren Dini, Pasch, du Bois-Reymond, sowie mein eigenes vor einigen Jahren erschienenes Buch können für Fragen dieser Art zur Ergänzung dienen; auch darf ich wohl auf meine beiden, soeben in den Mathematischen Annalen veröffentlichten Abhandlungen: „die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Funktionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen“ für weitere Studien verweisen. Grössere Änderungen oder Ausführungen, welche mir trotzdem wünschenswert erschienen, und die zumal in der Begründung der Integralrechnung an mehreren Stellen sich finden, habe ich durch kleineren Druck kenntlich machen lassen.

Der Druck des zweiten Teiles soll unmittelbar nach Vollendung des ersten beginnen, so dass der Band im nächsten Frühjahr erscheinen wird.

Juni 1884.

Axel Harnack.

Inhalt des ersten Bandes.

Erstes Kapitel.

Einleitende Begriffe.

Seite

Von den Funktionen 1
Der Begriff der Grenze 2
Unendlich kleine Grössen und unendlich grosse 8
Verschiedene Ordnungen des unendlich kleinen 8
Über die Rechnung mit unendlich kleinen Grössen 11

Zweites Kapitel.

Der erste Differentialquotient der Funktionen einer unabhängigen Variabelen.

Stetigkeit 19
Die abgeleitete Funktion 21
Die Differentiale 32
Ein Satz über Funktionen von Funktionen 35
Die Differentiation der expliciten algebraischen Funktionen . . . 36
Anwendungen der bisherigen Regeln 41
Anwendung auf einige einfache Aufgaben 43
Differentiation von Funktionen, welche aus mehreren Funktionen einer unabhängigen Variabelen zusammengesetzt sind 46
Folgerung aus dem vorigen Satze 50
Differentiation der Logarithmen und der Exponentialfunktion . . 51
Differentiation der Kreisfunktionen 60
Differentiation der impliciten Funktionen 66
Die Elimination willkürlicher Konstanten 69

Drittes Kapitel.

Differentiale höherer Ordnungen von Funktionen einer Variabelen. Partielle Ableitungen von Funktionen mehrerer Variabelen.

Ableitungen verschiedener Ordnungen 73
Differentiale verschiedener Ordnungen 73
Differenzen der verschiedenen Ordnungen 76
Partielle Ableitungen, partielle Differentiale und Differenzen höherer Ordnung bei einer Funktion von mehreren unabhängigen Variabelen 78

Seite

Berechnung der Differentiale höherer Ordnung von Funktionen, welche aus mehreren zusammengesetzt sind 83
Formel für das Produkt mehrerer Funktionen 86
Differentiale höherer Ordnung für implicite Funktionen 88
Über die Elimination von willkürlichen Konstanten 90
Die Änderung der unabhängigen Variabelen 91
Die Änderung aller Variabelen 93

Viertes Kapitel.

Die totalen Differentiale der Funktionen von mehreren unabhängigen Variabelen.

Das totale Differential erster Ordnung 97
Differentiation einer zusammengesetzten Funktion mit mehreren unabhängigen Variabelen 98
Die totalen Differentiale höherer Ordnungen 100
Das totale Differential bei impliciten Funktionen von mehreren unabhängigen Variabelen 101
Die Elimination willkürlicher Funktionen 104
Die Änderung der unabhängigen Variabelen 113
Die Änderung aller Variabelen 122
Die Transformation von Legendre 125

Fünftes Kapitel.

Entwickelung der Funktionen in Potenzreihen.

Einleitende Bemerkungen über Reihen 128
Darstellung des Wertes, den eine Funktion, welche für $x = x_0$ nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen verschwindet, für $x = x_0 + h$ annimmt 146
Die Taylorsche Reihe 148
Bemerkungen über die Taylorsche Reihe 152
Die Mac-Laurinsche Reihe 153
Die Potenzreihe für die Funktion e^x 158
Die Potenzreihen für die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ 160
Die Potenzreihe für die Funktion $\log(1+x)$ 161
Formeln für die Berechnung von Logarithmen 163
Die Binomialreihe 167
Entwickelung der Funktion $f(x+h)$ in eine Reihe, geordnet nach Potenzen von h, für den Fall, dass die Taylorsche Reihe nicht gültig ist 173
Bestimmung der Grenze, nach welcher der Quotient zweier Funktionen konvergiert, welche beide gleichzeitig null oder unendlich werden 177
Darstellung der Funktionen e^x und $l(x)$ als Grenzen algebraischer Funktionen 189

Seite

Erweiterung der Taylorschen und Mac-Laurinschen Formeln für Funktionen von mehreren Variabelen 190
Der Eulersche Satz für homogene Funktionen 194

Sechstes Kapitel.

Theorie der Maxima und Minima.

Maxima und Minima von Funktionen einer einzigen Variabelen . 196
Anwendung auf einige Beispiele 199
Bemerkung über relative Maxima und Minima 206
Der Fall der impliciten Funktionen einer unabhängigen Variabelen 208
Über Maxima und Minima von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variabelen 212
Anwendung auf einige Beispiele 218
Untersuchung eines Falles, in dem die partiellen Ableitungen einer Funktion von mehreren Variabelen nicht mehr bestimmt sind, wenn man den Variabelen die Werte beilegt, welche dem Maximum oder Minimum entsprechen 226
Fall der impliciten Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen 229
Bemerkung über den Fall einer expliciten Funktion von mehreren Variabelen, welche durch gegebene Gleichungen verbunden sind 231

Siebentes Kapitel.

Theorie der ebenen Kurven.

Die Tangente und die Normale an ebenen Kurven. Die Grenzlage der Tangenten 234
Die Ordnung der Berührung zwischen Kurve und Tangente. Die Wendepunkte. Die Lage der konkaven und konvexen Seite . 238
Anwendung homogener Koordinaten 245
Untersuchung über die Wendepunkte der Kurven 248
Die singulären Punkte ebener Kurven 252
Die analytischen Charaktere der singulären Punkte 258
Untersuchung über die Art eines singulären Punktes 261
Das Differential der Fläche einer ebenen Kurve 270
Das Differential der Bogenlänge einer ebenen Kurve 276
Der Radius und der Mittelpunkt der Krümmung in einem Punkte einer ebenen Kurve 280
Die Evoluten und Evolventen der ebenen Kurven 286
Die Gleichungen im Polarkoordinatensystem 289
Einhüllende Kurven 294
Berührungen verschiedener Ordnung zwischen ebenen Kurven . . 300
Oskulierende Kurven 303
Der oskulierende Kreis 307

Achtes Kapitel.

Anwendungen der Theorie ebener Kurven.

Seite

Die Fläche der Kegelschnitte 310
Das Bogenelement der Kegelschnitte 312
Der Krümmungsradius der Kegelschnitte 317
Die Evolute der Kegelschnitte 319
Die Cykloide 323
Die Epicykloiden 329
Die Evolvente des Kreises 337
Die Spirale des Archimedes 338
Die hyperbolische Spirale 339
Die logarithmische Spirale 340
Anwendungen der Theorie der Einhüllenden 343

Neuntes Kapitel.

Theorie der Raumkurven und Flächen.

Die Tangente und Normalebene einer Kurve 346
Die Tangentenebene und die Normale einer Fläche 349
Anwendung homogener Koordinaten 353
Das Differential der Bogenlänge einer Raumkurve 355
Formeln für die Richtungskosinus der Tangente 360
Der Krümmungsradius 361
Die Hauptnormale in einem Punkte einer Raumkurve 364
Der Krümmungsmittelpunkt eines Punktes der Raumkurve . . 365
Die Kosinus der Richtung der Krümmungsaxe 367
Die Differenz zwischen einem Kurvenbogen und seiner Sehne . . 369
Die Ordnung der Berührung zwischen einer Kurve und einer Fläche. Oskulierende Fläche 371
Die oskulierende Ebene 373
Die Torsion oder zweite Krümmung der Raumkurven 377
Zusammenstellung und Vervollständigung der Hauptformeln für Raumkurven 381
Die oskulierende Kugel 384
Die Koordinaten des Mittelpunktes und der Radius der oskulierenden Kugel 389
Einhüllende Flächen 391
Abwickelbare Flächen 395
Die Polarfläche. Der Ort der Mittelpunkte der oskulierenden Kugeln 398
Allgemeine Theorie der Evoluten und Evolventen 403
Anwendung der allgemeinen Theorie auf die gewöhnliche Schraubenlinie 411
Die Ordnung der Berührung zweier Kurven. Oskulierende Kurven 416
Der oskulierende Kreis und seine Identität mit dem Krümmungskreis 418
Die Berührung von Flächen 419

Zehntes Kapitel.

Die Kurven auf den Flächen und die Flächenfamilien.

Seite

Formel für den Krümmungsradius der auf einer gegebenen Fläche gelegenen Kurve 422
Der Satz von Meunier 426
Die Krümmungsradien der Normalschnitte und die beiden Hauptschnitte 427
Andere Darstellung der vorigen Resultate. Die Indikatrix . . . 432
Ein Fall, in dem die allgemeine Theorie ungültig ist 437
Die Einhüllende der Tangentenebenen einer Fläche in den verschiedenen Punkten einer Kurve. Konjugierte Tangenten. Differentialgleichung der Haupttangentenkurven 439
Die allgemeinen Ausdrücke für die Hauptkrümmungsradien in einem Flächenpunkte. Das Krümmungsmaass der Flächen 443
Bestimmung der Nabelpunkte des Ellipsoides 448
Die Krümmungskurven einer Fläche 449
Eigenschaften der Krümmungskurven 453
Über die Fläche, deren Punkte sämtlich Nabelpunkte sind . . . 459
Dreifache Systeme von orthogonalen Flächen 461
Der Dupinsche Satz für orthogonale Flächen 468
Das dreifach orthogonale System zweiter Ordnung 469
Die Krümmungskurven des Ellipsoides 473
Die Niveaulinien und die Linien grössten Falles 479
Über Linienflächen. Ihre Unterscheidung in abwickelbare und in nicht abwickelbare Flächen 481
Die Cylinderflächen und ihre partielle Differentialgleichung . . . 486
Die Kegelflächen und ihre partielle Differentialgleichung 488
Die Konoidflächen und ihre partielle Differentialgleichung . . . 489
Die Rotationsflächen und ihre partielle Differentialgleichung . . 491
Die partielle Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen . . 493
Die Kanalflächen 497
Die partielle Differentialgleichung der Linienflächen 498

Elftes Kapitel.

Über Funktionen einer komplexen Variabelen.

Die Darstellung komplexer Variabelen und die expliciten algebraischen Funktionen 500
Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern 503
Definition der Exponentialfunktion einer komplexen Variabelen . 508
Definition der direkten Kreisfunktionen einer komplexen Variabelen 511
Beziehungen zwischen den Exponentialfunktionen und den goniometrischen 512
Der Logarithmus und die inversen Kreisfunktionen einer komplexen Variabelen 514

Seite

Die Stetigkeit 519
Die Ableitung und das Differential einer Funktion einer komplexen Variabelen 522
Beweis eines Fundamentalsatzes von Cauchy 527
Die Entwickelung der Funktionen in Potenzreihen 535
Die Reihenentwickelung von Lagrange 538
Anwendungen der Reihe von Lagrange 543

Zwölftes Kapitel.

Zerlegung der rationalen Funktionen in Partialbrüche.

Lehrsätze über die Zerlegung der rationalen Funktionen 547
Zerlegung für den Fall, dass der Nenner aus lauter einfachen Faktoren besteht 551
Die Partialbruchzerlegung für den allgemeinen Fall 554
Neue Form der Darstellung einer rationalen Funktion durch ihre Partialbrüche 558
Spezielle Art der Zerlegung rationaler und reeller Quotienten, deren Nenner komplexe Faktoren besitzt 561
Bestimmung einer ganzen Funktion vermittelst der Werte, welche zu gegebenen Werten der Variabelen gehören 566

Erstes Kapitel.

Einleitende Begriffe.

Von den Funktionen.

1. Die Grössen, welche den mathematischen Untersuchungen zu Grunde liegen, sind von zweierlei Art; die einen besitzen einen bestimmten festen Wert, die anderen können mehrere verschiedene Werte annehmen. Jene nennt man *konstante*, diese *veränderliche* oder *variabele* Grössen.

Hat man bei einer Aufgabe mehrere Variabele zu betrachten, so kann man einigen derselben willkürliche Werte beilegen, und alsdann erhalten die anderen Variabelen bestimmte Werte. Erstere heissen die *unabhängigen Veränderlichen*, die anderen die *abhängigen Veränderlichen* oder die *Funktionen der unabhängigen*.

So führt z. B. die Untersuchung des Kreises auf drei Grössen: den Radius, die Peripherie, und die Fläche. Erteilt man einer dieser Grössen willkürliche verschiedene Werte, so bekommen die anderen beiden bestimmte entsprechende Werte, sie sind also Funktionen der ersten, welche selbst hierbei die unabhängige Variabele ist.

Bei einem geraden Kreiscylinder hat man vier Grössen zu betrachten: den Radius, die Höhe, die Oberfläche und das Volumen. Hier kann man zweien der Grössen willkürliche Werte beilegen, die anderen beiden bekommen alsdann bestimmte Werte, sie sind also Funktionen von zwei unabhängigen Variabelen.

2. Die Funktionen, welche wir betrachten werden, werden meistens *analytisch definiert* sein, d. h. vermittelst numerischer

Beziehungen oder Gleichungen, die zwischen ihnen und den unabhängigen Veränderlichen bestehen.

Die Funktion heisst eine *algebraische*, wenn die Gleichung, durch welche sie mit der unabhängigen Variabelen verbunden ist, nur vermittelst der in der Algebra benutzten (und daher algebraisch genannten) Rechnungsoperationen gebildet ist, nämlich 1. der Addition und Subtraktion, 2. der Multiplikation, 3. der Division, 4. der Potenzierung mit ganzen Exponenten, 5. der Wurzelausziehung mit ganzen Exponenten. Andernfalls heisst die Funktion eine *transscendente*.

Wenn die Gleichung, welche die Funktion mit den unabhängigen Variabelen verknüpft, nach der abhängigen Variabelen aufgelöst ist, so heisst die Funktion eine *explicite;* im andern Falle eine *implicite*. Man sieht also, dass bei einer expliciten Funktion die Werte, welche sie annimmt, dadurch erhalten werden, dass man mit den unabhängigen Variabelen und mit Konstanten eine oder mehrere Rechnungsoperationen auszuführen hat, welche in bestimmter Weise definiert sind.

Die expliciten algebraischen Funktionen sind *rationale*, wenn sie keine Wurzel aus einer variabelen Grösse enthalten, andernfalls *irrationale*. Rationale Funktionen werden in *ganze* und in *gebrochene* eingeteilt. Eine ganze Funktion ist nichts anderes als ein Polynom, eine gebrochene ist der Quotient zweier Polynome.

Im folgenden werden wir oftmals die Funktionen durch einfache Buchstaben bezeichnen, ebenso wie die unabhängigen Variabelen. Wenn es sich aber darum handelt, die letzteren hervorzuheben, so werden wir die gewöhnlichen Zeichen F, f, φ ... benutzen, und hinter diesen, zwischen Klammern, die verschiedenen unabhängigen Veränderlichen setzen. So werden z. B. $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$ ... Funktionen der Variabelen x bezeichnen; $F(x, y)$ $f(x, y)$ ... ebenso Funktionen der beiden Variabelen x, y.

Der Begriff der Grenze.

3. Wenn die aufeinander folgenden Werte einer Variabelen x sich mehr und mehr einem festen Werte a nähern derart,

dass der Betrag (absolute Wert) der Differenz $x - a$ schliesslich kleiner wird und kleiner bleibt als irgend welche angebbare Grösse, so sagt man, dass die Variabele x den konstanten Wert a zur *Grenze* (limes) hat.

Die Variabele kann entweder immer kleiner oder immer grösser sein als ihre Grenze; aber auch das ist möglich, dass sie bald kleiner, bald grösser wird als diese Grenze. Schon durch das Studium der Geometrie und Trigonometrie wird der Leser mit diesem Begriff der Grenze vertraut sein. So ist z. B. die Fläche eines Kreises die Grenze, welcher sich die Fläche des regelmässigen ein- oder umgeschriebenen Polygones nähert, wenn die Anzahl der Polygonseiten unbegrenzt wächst. Auch wird in der Trigonometrie gelehrt (siehe auch Kap. II § 43), dass die Verhältnisse $\sin x : x$, und $\operatorname{tang} x : x$ nach dem Grenzwerte 1 konvergieren, wenn die Bogenlänge x unbegrenzt abnimmt.

Das Prinzip, welches der Rechnung mit Grenzwerten zu Grunde liegt, kann man folgendermassen aussprechen: *Wenn zwei variabele Grössen einander immer gleich bleiben bei den verschiedenen Werten, welche sie annehmen, und die eine der Grössen konvergiert dabei nach einer bestimmten Grenze, so konvergiert auch die andere nach dem nämlichen (oder gleichen) Grenzwerte.*

Die Gültigkeit dieses Satzes ist so einleuchtend, dass jede weitere Auseinandersetzung überflüssig wäre, seine Bedeutung ist andererseits durch die vielfachen Anwendungen, welche er in der Geometrie gefunden hat, erwiesen.

Es wird gut sein, den Begriff der Grenze noch an einigen elementaren Rechnungsbeispielen zu erörtern, woraus dann eine allgemeine Erkenntnis davon, was wir Grösse zu nennen haben, und wie sich Grössen durch Zahlen darstellen, hervorgehen wird. Wenn man einen Bruch, dessen Nenner nicht aus den Faktoren 2 und 5 zusammengesetzt ist, in einen Dezimalbruch verwandelt, so erhält man einen sogenannten unendlichen Dezimalbruch; es ist z. B. $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ Mithin hat die Reihe der Zahlen 0,3; 0,33; 0,333; ... welche man beliebig fortsetzen kann, den Wert $\frac{1}{3}$ zur Grenze; denn es werden die Unterschiede:

$$\frac{1}{3} - 0{,}3 = \frac{1}{30}, \quad \frac{1}{3} - 0{,}33 = \frac{1}{300}, \quad \frac{1}{3} - 0{,}333 = \frac{1}{3000} \cdots$$

kleiner als irgend welche angebbare Grenze, je mehr Dezimalstellen mit dem Werte 3 man anschreibt. Hier ist die Grenze der Wertreihe durch eine bestimmte rationale Zahl angebbar, wie überhaupt bei allen unendlichen periodischen Dezimalbrüchen. Wenn man ferner aus einer Zahl, die nicht selbst eine Quadratzahl ist, eine Wurzel zu ziehen hat, z. B. $\sqrt{2}$, so führt das gewöhnliche Verfahren wiederum auf einen unendlichen, aber nicht periodischen Dezimalbruch. Die Reihe der rationalen Zahlen, welche man erhält, indem man den Dezimalbruch mit einer Stelle, sodann mit zwei, mit drei, vier u. s. w. Stellen anschreibt, besitzt dann als Grenze den Wert $\sqrt{2}$. Denn die Unterschiede jener Zahlen und der Grösse $\sqrt{2}$ werden schliesslich so klein, wie man nur will, was durch den Vergleich des Quadrates jedes Dezimalbruches mit der Zahl $(\sqrt{2})^2 = 2$ festgestellt wird. Die Grösse $\sqrt{2}$ ist hier nicht selbst als bestimmte Zahl innerhalb des rationalen Zahlsystemes fixierbar; vielmehr bildet ihre Definition als Grenze einer unbegrenzt fortsetzbaren Reihe von rationalen Zahlen das einzige Mittel der arithmetischen Darstellung dieser Grösse, die eine irrationale Zahl genannt wird.

Geht man von dem Begriffe der ganzen Zahlen, wie er durch Zählung gewonnen wird, aus und erweitert man denselben durch Teilung der Zahlen zum Begriffe des rationalen Zahlsystemes, so reicht man mit diesem Zahlsysteme zur Bestimmung jedweder Grösse nicht aus, wie man sowohl bei arithmetischen Problemen (z. B. bei der Wurzelausziehung) als auch bei geometrischen (z. B. bei Strecken, die mit einem gegebenen Massstabe nicht kommensurabel sind) erkennt. Diese Erkenntnis erschliesst den Begriff der arithmetischen Grösse in seiner notwendigen Erweiterung:

Die rationalen Zahlen lassen sich der Grösse nach ordnen; wir nennen dabei eine Zahl grösser als eine andere, wenn sie aus dieser durch Hinzufügung einer gewissen Anzahl von Einheiten oder von Bruchteilen der Einheit hervorgeht.

Die rationalen Zahlen bilden daher zunächst den Begriff der „arithmetischen Grössen“. Die Rechnungsoperation des Subtrahierens führt darauf, den Begriff der positiven und der negativen Einheit zu unterscheiden. Die negativen Grössen heissen kleiner als die positiven, und um so kleiner, je grösser ihr Betrag (absoluter Wert) ist. Jedes Ding, was sich mit den Zahlen der rationalen, positiven und negativen Zahlenreihe, vermittelst Messung oder Teilung, derart vergleichen lässt, dass von ihm ausgesagt werden kann, es sei grösser als ein anderes, und kleiner als ein drittes,

deren Grössen durch bestimmte rationale Zahlen ausgedrückt werden, fällt unter den Begriff der Grösse. So ist $\sqrt{2}$ eine Grösse, weil dieser Begriff sich seiner Definition gemäss zwischen rationalen Zahlen einordnen lässt (er ist zweideutig, weil sich sowohl positive Zahlen, als auch negative angeben lassen, zwischen denen er liegt); $\sqrt{-2}$ ist keine Grösse, weil jede Zahl, mag sie nun positiv oder negativ sein, mit sich selbst multipliziert eine positive Zahl (einschliesslich der 0) liefert, die also grösser ist als -2. Der Kreisfläche kommt eine Grösse zu, weil sie sich mit rationalen Flächengrössen vergleichen lässt u. s. w. Insbesondere wird man nun eine im rationalen Systeme nicht enthaltene Grösse auch noch eine arithmetische nennen können, wenn sich eine unbegrenzt fortsetzbare Reihe von rationalen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_n \ldots$ angeben lässt, so dass der Unterschied zwischen der zu bestimmenden Grösse und der Zahl α_n schliesslich kleiner wird als jede noch so kleine angebbare rationale Zahl, falls man n beliebig wachsen lässt, d. h. in der definierenden Zahlreihe weiter und weiter vorgeht. Zwei Grössen heissen verschieden, wenn ihr Unterschied selbst wiederum eine Grösse ist, die zwischen rationalen Zahlen eingeschlossen liegt, dagegen heissen zwei Grössen einander gleich, wenn ihr Unterschied dem Betrage nach kleiner ist als jede noch so kleine rationale Zahl. Bildet die eine Grösse den Grenzwert der Reihe rationaler Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_n, \ldots$ die andere Grösse den Grenzwert der Reihe $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots, \beta_n \ldots$, so werden diese beiden Grössen einander gleich sein, wenn der Unterschied der Zahlen α_n und β_n, also die Differenz $\alpha_n - \beta_n$, je grösser n wird, dem Betrage nach kleiner als jede noch so kleine Zahl wird. Zusammenfassend können wir also sagen: Für den Begriff einer bestimmten arithmetischen Grösse ist die Vergleichbarkeit mit rationalen Zahlen, und zwar vermittelst unbegrenzter Annäherung, wesentlich. Die Definition der Grösse als Zahl geschieht, indem sie als Grenze einer unbegrenzt fortsetzbaren Reihe von rationalen Zahlen fixiert wird; sie ist auf diese Weise eindeutig bestimmt.

Die Zahlenreihen aber, welche eine bestimmte Grösse definieren, haben zwei wesentliche Eigenschaften. Ist die zu definierende Grösse von 0 verschieden, ein bestimmter positiver oder negativer Wert, so müssen auch die Zahlen der definierenden Reihe schliesslich sämtlich von einerlei Vorzeichen, dem positiven oder negativen sein. Nur die Grösse 0 kann durch eine Reihe definiert werden, welche sowohl positive als auch negative Zahlen, die nur dem Betrage nach beliebig klein werden, enthält. Sodann aber gilt als zweites entscheidendes Merkmal: Damit eine bestimmte Grösse Grenze einer definierenden Reihe sein kann, müssen die Unterschiede zwischen den Zahlen dieser Reihe schliesslich beliebig klein werden, d. h. bezeichnet δ eine beliebig kleine Zahl, so muss

sich eine Stelle n angeben lassen, so dass der Unterschied zwischen der zu dieser Stelle gehörigen Zahl α_n der Reihe und jeder anderen darauf folgenden Zahl α_{n+m} kleiner ist als δ; also abs $[\alpha_n - \alpha_{n+m}] < \delta$. Denn da sämtliche Zahlen α sich schliesslich von der Grösse A beliebig wenig unterscheiden, so kann man jedenfalls eine Stelle ausfindig machen, von der sämtliche α um weniger als $\frac{\delta}{2}$ von A differieren. Es ist dann

$$\text{abs}\,[A - \alpha_n] < \frac{\delta}{2}, \quad \text{abs}\,[A - \alpha_{n+m}] < \frac{\delta}{2},$$

folglich:

$$\text{abs}\,[\alpha_n - \alpha_{n+m}] < \delta.$$

(Unterscheiden sich α_n und α_{n+m} in demselben Sinne von A, so ist auch ihre Differenz kleiner als $\frac{\delta}{2}$.) So kann man z. B. für die Berechnung von $\sqrt{2}$ den Dezimalbruch so weit fortsetzen, dass sich alle weiteren Dezimalbrüche um weniger als $\left(\frac{1}{10}\right)^6$ oder allgemein um weniger als $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ von einander unterscheiden. Nachdem auf diese Weise die Erkenntnis gewonnen ist: Für den Begriff einer Grösse ist nur wesentlich, dass sie sich zwischen Grenzen einschliessen lässt, die einander beliebig genähert werden können, sie ist bestimmt als Grenze einer Reihe von rationalen Zahlen, welche die oben genannten Eigenschaften besitzt; kehrt man diesen Satz um und definiert:

Eine unbegrenzt fortsetzbare Reihe von rationalen Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n \ldots$$

deren Glieder die Eigenschaft haben, dass sich zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine Stelle n angeben lässt, von der ab die Differenz aller folgenden Zahlen kleiner bleibt als δ, definiert eine bestimmte Grösse, welche die Grenze dieser Reihe genannt wird.* Man ist zu dieser Umkehr berechtigt, weil durch die Grenze der Reihe in der That ein Begriff geschaffen ist, welcher den Vergleich mit rationalen Zahlen hinsichtlich seiner Grösse zulässt. Unterscheiden sich von der Stelle α_n ab sämtliche Zahlen der Reihe um weniger als die Zahl δ, so ist die Grenze eine Grösse, die zwischen $\alpha_n - \delta$ und $\alpha_n + \delta$ gelegen ist, die also, da δ so klein gewählt werden

* Durchaus zutreffend ist die Definition von Leibniz (Math. Werke herausg. von Gerhard, Bd. 7 pag. 53): Mathesis universalis est scientia de quantitate in universum, seu de ratione aestimandi, adeoque limites designandi, intra quos aliquid cadat.

kann als man nur will, mit beliebiger Annäherung durch eine rationale Zahl ausgedrückt wird.

Die Gesamtheit der Zahlen eines Intervalles z. B. von 0 bis 1, besteht nicht nur aus allen rationalen Zahlen zwischen 0 und 1, sondern auch aus der Gesamtheit aller Zahlen, die als Grenzwerte definierender Zahlenreihen sich zwischen diesen einschalten lassen. Diese Gesamtheit bezeichnet man als den Inbegriff der stetigen Zahlenreihe zwischen 0 und 1. Man wendet diese Bezeichnung an, weil das einfachste Beispiel der stetigen Ausdehnung, nämlich die lineare Strecke von der Länge 1, wenn man die Abstände ihrer Punkte vom Ausgangspunkte misst, uns lehrt, dass die Entfernung jedes inneren Punktes, er mag irgendwie durch geometrische Konstruktion oder durch Bewegung definiert sein, sich auch durch solch eine Zahlenreihe definieren lässt. Übrigens ist die arithmetische Definition der kontinuierlichen Zahlenreihe von der geometrischen Anschauung ganz unabhängig.

Auf weitere Sätze über definierende Zahlenreihen, die man, nachdem die irrationalen Zahlen definiert sind, auch mit irrationalen zusammensetzen kann, wodurch aber kein neuer Zahlbegriff gewonnen wird, weil solch eine Reihe auch immer wieder durch eine Reihe von rationalen ersetzt werden kann, soll hier nicht eingegangen werden. Nur den einen Satz, der alsbald Anwendung finden wird, will ich hervorheben.

Hat man eine unbegrenzt fortsetzbare Reihe von Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \ldots$, von denen jede folgende grösser ist als die vorhergehende, und weiss man, dass nichtsdestoweniger diese Zahlen nicht über jede Grenze hinauswachsen, sondern insgesamt kleiner bleiben als eine bestimmte Zahl β, so wird durch solch eine Reihe immer eine bestimmte Grösse definiert. Um dies zu erkennen, ist nur zu zeigen, dass die Zahlenreihe die für eine definierende Reihe wesentliche Eigenschaft besitzt, nämlich dass sich zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine Stelle n finden lässt, von der ab die Differenz der Zahlen kleiner wird als δ. Würde nämlich dieses nicht der Fall sein, liessen sich, wie weit man auch vorgehen mag, immer wieder zwei Zahlen finden, deren Differenz grösser ist als δ, so könnte man folgende Ungleichungen bilden: Man findet zwei Zahlen α_{n1} und α_{n2}, deren Differenz grösser ist als δ, sodann zwei Zahlen α_{n3} und α_{n4}, deren Differenz grösser ist als δ, und so weiter zwei Zahlen α_{n5} und α_{n6}; kurz man könnte, wie gross auch die Stellenzahl n wird, beliebig viele Ungleichungen entwickeln

$$\alpha_{n2} - \alpha_{n1} > \delta, \quad \alpha_{n4} - \alpha_{n3} > \delta, \quad \alpha_{n6} - \alpha_{n5} > \delta, \quad \alpha_{n8} - \alpha_{n7} > \delta \ldots$$

Da nun die Zahlen mit wachsendem Index sämtlich wachsen: also $\alpha_{n1} < \alpha_{n2} < \alpha_{n3} < \alpha_{n4} < \ldots$ ist, so erkennt man, dass

$$\alpha_{n2} > \alpha_{n1} + \delta,\ \alpha_{n4} > \alpha_{n3} + \delta > \alpha_{n1} + 2\delta,\ \alpha_{n6} > \alpha_{n1} + 3\delta,$$
$$\alpha_{n8} > \alpha_{n1} + 4\delta \ldots$$

wird. Weil sich sonach der Wert von δ beliebig vervielfältigt und ein Vielfaches von δ beliebig gross wird, so würden in der Reihe der Zahlen α auch solche Zahlen vorkommen, die grösser sind als eine bestimmte Zahl β, was der Voraussetzung nach nicht möglich ist.

Ebenso beweist man den Satz: Hat man eine unbegrenzt fortsetzbare Reihe von Zahlen: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \ldots$, von denen jede folgende kleiner ist als die vorhergehende, und weiss man, dass nichtsdestoweniger diese Zahlen insgesamt grösser bleiben als eine bestimmte Zahl β, so wird durch solch eine Reihe immer eine bestimmte Grösse definiert.

Unendlich kleine Grössen und unendlich grosse.

4. Konvergiert eine variabele Grösse nach dem Grenzwerte 0, so sagt man, sie wird *unendlich klein;* man nennt sie auch ein *unendlich kleines.* Wenn die Variabele unbegrenzt wächst, derart, dass sie schliesslich grösser wird und grösser bleibt als irgend welche angebbare Grösse, so sagt man, sie wird dem Betrage nach *unendlich gross*, oder auch schlechtweg *unendlich.*

Eine Grösse, welche unendlich klein wird, kann dabei entweder nur positiv oder nur negativ sein, oder auch sowohl positiv oder negativ werden. Eine Grösse, welche unendlich gross wird und dabei nur positiv ist, wird *positiv unendlich;* ist sie dagegen nur negativ, so wird sie *negativ unendlich.* Wechselt sie aber immer wieder das Zeichen, so wird zwar ihr Betrag unendlich, die Grösse selbst aber *unbestimmt unendlich.*

Die Namen *unendlich klein* und *unendlich gross* haben keinen andern Zweck als eine Vereinfachung der Ausdrucksweise. Anstatt zu sagen: $\sin x$ konvergiert nach der Grenze 0, und $\operatorname{cotg} x$ wächst über jede Grenze, wenn x sich dem Werte 0 beliebig nähert, heisst es: Ist x unendlich klein, so ist auch $\sin x$ unendlich klein, und $\operatorname{cotg} x$ ist unendlich gross.

Verschiedene Ordnungen des unendlich kleinen.

5. Da unendlich kleine Grössen stets variabele sind, so gilt für sie, was eben von Variabelen im allgemeinen gesagt

wurde, man wird zu unterscheiden haben zwischen unabhängigen und abhängigen Variabelen. Bei Untersuchungen dieser Art kommt man immer auf den Fall, wo die unendlich kleinen Grössen, welche man zu betrachten hat, nur von einer einzigen unter ihnen abhängen; diesen Fall allein müssen wir hier untersuchen.

Unter den unendlich kleinen Grössen, welche in einer analytischen Untersuchung auftreten, wählt man eine nach Belieben aus, die man als das *unendlich kleine erster Ordnung* bezeichnet, und mit welcher man die anderen unendlich kleinen folgendermassen vergleicht.

Sei α das unendlich kleine erster Ordnung, β ein anderes, so ist, der Definition dieser Grössen gemäss, $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = 0$. Wenn nun der Quotient $\frac{\beta}{\alpha}$ einer endlichen von 0 verschiedenen Grenze k zustrebt derart, dass

$$\frac{\beta}{\alpha} = k + \varepsilon$$

und ε unendlich klein wird, so werden wir auch β eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung nennen. Es ist

$$\beta = \alpha (k + \varepsilon)$$

und diese Formel liefert den allgemeinen Ausdruck für das unendlich kleine erster Ordnung.

Ist aber das Verhältnis $\frac{\beta}{\alpha}$ selbst unendlich klein von erster Ordnung, so werden wir β *unendlich klein von zweiter Ordnung* nennen.

In diesem Falle hat man nach dem vorhergegangenen

$$\frac{\beta}{\alpha} = \alpha (k + \varepsilon)$$

oder

$$\beta = \alpha^2 (k + \varepsilon)$$

und diese Formel giebt den allgemeinen Ausdruck einer unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung; k bezeichnet eine bestimmte endliche von 0 verschiedene Grösse, ε eine unendlich kleine.

Allgemein wird β eine *unendlich kleine Grösse* n^ter^ *Ordnung* sein, wenn das Verhältnis $\frac{\beta}{\alpha}$ von der $n - 1^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich klein ist.

Nimmt man also an, dass

$$\alpha^{n-1}(k + \varepsilon)$$

der allgemeine Ausdruck für eine unendlich kleine Grösse $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung ist, so ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = \alpha^{n-1}(k + \varepsilon) \text{ oder } \beta = \alpha^n(k + \varepsilon)$$

und daraus schliesst man, dass dieser Ausdruck die allgemeine Form des unendlich kleinen n^{ter} Ordnung ist, wobei k, wie vorhin, eine bestimmte endliche von 0 verschiedene Grösse, ε eine unendlich kleine bezeichnet. Das Produkt $k\alpha^n$ ist das erste oder das Hauptglied der unendlich kleinen, durch β dargestellen Grösse n^{ter} Ordnung.

Demnach kann man auch sagen, dass die Ordnung des unendlich kleinen β der Exponent n ist, zu welchem man die unendlich kleine Grösse erster Ordnung α erheben muss, um einen Quotienten $\beta : \alpha^n$ zu erhalten, dessen Grenze eine bestimmte, endliche, von 0 verschiedene Grösse ist. Diese neue Definition umfasst auch den Fall, wo n nicht mehr eine ganze Zahl ist, was bisweilen von Nutzen ist. Gewisse Untersuchungen führen in der That darauf, unendlich kleine Grössen zu betrachten, deren Ordnung durch eine echt oder unecht gebrochene Zahl ausgedrückt wird.

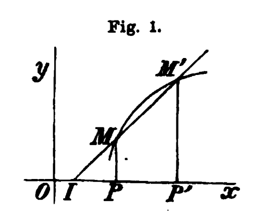
Ist die Ordnung n ein echter Bruch, so sagt dies aus, dass β von niederer als der ersten Ordnung, also von niederer Ordnung wie α unendlich klein wird. Die Ordnung des unendlich kleinen kann auch eine irrationale Zahl werden; und auch der Fall ist möglich, dass sich nur eine Zahl n rational oder irrational angeben lässt, so dass für alle Exponenten m kleiner als n der Quotient $\frac{\beta}{\alpha^m}$ gleich 0, für alle Zahlen grösser als n dagegen unendlich wird, während er für $m = n$ auch entweder 0 oder unendlich ist. In diesem Falle wird die Ordnung von β nicht durch eine bestimmte Zahl fixierbar, vielmehr bildet n nur eine Grenze besonderer Art (siehe Kap. 5 § 125).

Die Geometrie bietet viele Beispiele von unendlich kleinen Grössen verschiedener Ordnung. Da aber dieser Gegenstand in späteren Kapiteln ausführlich behandelt werden wird, so beschränken wir uns hier auf einige einfache Angaben. Wird die Bogenlänge x eines Kreises als unendlich kleines erster Ordnung betrachtet, so sind $\sin x$ und $\operatorname{tang} x$ ebenfalls von erster Ordnung unendlich klein; $1 - \cos x$ ist von zweiter Ordnung, $x - \sin x$ von dritter Ordnung unendlich klein (§ 114).

Über die Rechnung mit unendlich kleinen Grössen.

6. Zweierlei Betrachtungsweisen kommen zur Geltung, wenn bei der Untersuchung bestimmter Werte unendlich kleine Grössen angewandt werden. Erstlich kann man, was den alten Geometern entgangen ist, die zu bestimmende Grösse als Grenze des Verhältnisses zweier unendlich kleiner ansehen. So verfährt man bei der Aufgabe, die Tangenten an Kurven zu bestimmen. Ist die Kurve MM' auf die beiden Axen eines geradlinigen Koordinatensystems bezogen, und will man die Tangente im Punkte M bestimmen, dessen Koordinaten x und y sind, so verbindet man den Punkt M mit dem Punkte M', dessen Koordinaten $x + \alpha$, $y + \beta$ sind. Der Richtungskoeffizient der Sekante MM' (d. h. im Sinne des rechtwinkligen Systemes die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen der Sekante und der Abscissenaxe) wird $\frac{\beta}{\alpha}$, und, indem man die Grössen α und β unendlich klein werden lässt, erhält der Richtungskoeffizient c der Tangente den Wert

Fig. 1.



$$c = \lim \frac{\beta}{\alpha}.$$

So stellt sich also bei diesem Probleme die zu bestimmende Grösse als Grenze des Verhältnisses dar zwischen den gleichzeitigen unendlich kleinen Zuwüchsen der Ordinate und der Abscisse des Berührungspunktes.

7. Die andere Betrachtungsweise ist schon in der Geometrie der Alten eingeführt worden, und ihre Anwendung für die Berechnung bestimmter Grössen wurde besonders von Archimedes ausgebildet. Sie besteht darin, dass man die Grössen in gleiche oder ungleiche Teile zerlegt, von denen jeder, indem die Anzahl derselben unbegrenzt vermehrt wird, nach dem Werte 0 konvergiert. In der Sprache der Infinitesimalrechnung heisst dies, dass jede Grösse in eine unendlich grosse Anzahl unendlich kleiner Teile zerlegt werden kann. Da diese unendlich kleinen Teile von der nämlichen Art sind, wie die ganze Grösse, so scheint es, dass ihre Berechnung die nämlichen Schwierigkeiten enthält. Aber wir werden bald sehen, wie die Zerlegung, um welche es sich handelt, ein Mittel bietet, die gestellte Aufgabe zu lösen.

Zusammenfassend sagen wir also: Jede unendlich kleine Grösse, die wir zu betrachten haben, bildet entweder den Zähler oder Nenner eines Verhältnisses, oder das Element einer Summe, die aus unendlich vielen Summanden zusammengesetzt ist.

Die Rechnung mit dem unendlich kleinen beruht dann auf den beiden folgenden Prinzipien.

8. **Erster Satz.** *Die Grenze des Verhältnisses zweier unendlich kleiner Grössen wird, falls sie einen bestimmten endlichen Wert oder auch den Wert 0 hat, nicht geändert, wenn man jede derselben durch eine andere unendlich kleine Grösse ersetzt, deren Verhältnis zu ihr die Grenze 1 hat.*

Denn sind α und β die gegebenen unendlich kleinen Grössen, α' und β' zwei andere, für welche

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1, \quad \lim \frac{\beta'}{\beta} = 1,$$

oder was das nämliche besagt, für welche

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \varepsilon, \quad \frac{\beta'}{\beta} = 1 + \eta,$$

wobei ε und η selbst unendlich klein werden, so erhält man:

$$\alpha' = \alpha(1 + \varepsilon), \quad \beta' = \beta(1 + \eta),$$

also:

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{1+\varepsilon}{1+\eta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\varepsilon - \eta}{1+\eta}.$$

Da die Grenze des Verhältnisses $\frac{1+\varepsilon}{1+\eta} = 1 + \frac{\varepsilon - \eta}{1+\eta}$ gleich der Einheit ist, so hat man

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Ist die Grenze des Verhältnisses zweier unendlich kleiner Grössen gleich 1, so ist die Differenz derselben im Verhältnis zu jeder der beiden Grössen unendlich klein. Denn ist

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \varepsilon,$$

wobei ε unendlich klein, so folgt:

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha} = \varepsilon, \quad \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha'} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

und umgekehrt folgt aus jeder dieser Gleichungen $\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1$. Demnach kann unser obiger Satz auch so ausgesprochen werden:

Die Grenze des Verhältnisses zweier unendlich kleiner Grössen wird nicht geändert, wenn man jede derselben um eine Grösse vermehrt oder vermindert, die im Vergleich zu ihr unendlich klein ist.

Beispiel. Wird der Bogen x unendlich klein und sind m und n Konstante, so werden auch $\sin mx$ und $\sin nx$ unendlich klein. Da nun die Verhältnisse dieser Grössen zu mx und nx die Grenze 1 haben, so ist

$$\lim \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

9. Zweiter Satz. *Es seien* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_m$ *positive Grössen, deren Zahl unbegrenzt wächst, und von denen jede dabei unendlich klein wird.*

Die Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m$ *sei, wie gross auch* m *wird, entweder stets gleich einer bestimmten Grösse* S, *oder sie konvergiere mit wachsenden Werten von* m *nach diesem Werte. Sind dann* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_m$ *Grössen, welche unendlich klein werden, derart, dass, wenn man den dem Betrage nach grössten Wert unter*

diesen m *Grössen mit* ε *bezeichnet, dieses* ε *mit wachsenden Werten von* m *unendlich klein wird, so konvergiert die Summe*

$$\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \varepsilon_3 + \dots \alpha_m \varepsilon_m$$

nach dem Werte 0, *oder anders ausgedrückt, sie wird unendlich klein.*

Denn die Summe $\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \dots \alpha_m \varepsilon_m$ ist dem Betrage nach nicht grösser als $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_m)\varepsilon$. Dieses Produkt wird aber unendlich klein, weil der eine Faktor endlich bleibt, der andere unendlich klein wird. Folglich ist auch die Summe

$$\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \dots \alpha_m \varepsilon_m$$

selbst unendlich klein.

Die Eigenschaft der Grössen $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m$, dass bei jedem Werte von m die Beträge sämtlicher Grössen nicht grösser sind als die Zahl ε, die selbst mit wachsenden Werten vo m unendlich klein wird, pflegt man auch so auszudrücken, dass man sagt, die Grössen ε werden *gleichmässig* unendlich klein.

Folgerung. *Die Grenze der Summe einer unendlichen Anzahl von unendlich kleinen positiven Grössen wird, falls sie einen bestimmten endlichen Wert (auch den Wert* 0*) hat, nicht geändert, wenn man diese Grössen durch andere ersetzt, welche zu ihnen in Verhältnissen stehen, die gleichmässig dem Werte* 1 *zustreben.*

Sind nämlich $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ die gegebenen Grössen, und

$$\beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$$

andere, deren Verhältnis zu den ersteren die Grenze 1 hat, so ist

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \varepsilon_1, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1 + \varepsilon_2 \dots, \quad \frac{\beta_m}{\alpha_m} = 1 + \varepsilon_m,$$

oder

$$\beta_1 = \alpha_1(1 + \varepsilon_1), \quad \beta_2 = \alpha_2(1 + \varepsilon_2), \dots \beta_m = \alpha_m(1 + \varepsilon_m).$$

Sämtliche Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_m$ sollen gleichmässig nach 0 konvergieren, d. h. sie werden, indem man m hinlänglich gross macht, dem Betrage nach kleiner als eine Zahl ε, die selbst unendlich klein wird. Ist nun

$$\lim(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_m) = S,$$

so ist auch

$$\lim (\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \ldots \alpha_m \varepsilon_m) = 0,$$

und demnach wird, da

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_m) + (\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \ldots \alpha_m \varepsilon_m)$$

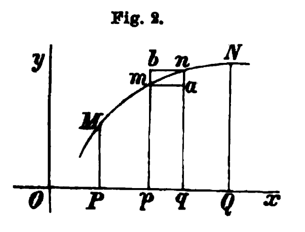
ist, auch

$$\lim (\beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_m) = S.$$

10. Anwendungen des ersten Prinzipes der Infinitesimalrechnung werden sich uns bald darbieten. Das zweite Prinzip gehört hauptsächlich der Integralrechnung an. Es wird aber nützlich sein, die Anwendung zu zeigen, welche die alten Mathematiker auf die Quadratur der Kurven von ihm gemacht haben.

Quadratur ebener Kurven. Die Kurve sei bezogen auf zwei geradlinige Koordinatenaxen und es wird die Fläche gesucht, welche begrenzt ist von dieser Kurve, der Abscissenaxe und den beiden Ordinaten MP, NQ. Wir nehmen zunächst an, dass die Ordinaten der Kurve zwischen den Punkten M und N beständig wachsen, oder beständig abnehmen. Die Strecke PQ der x-Axe zerlegen wir in gleiche oder ungleiche Teile, deren Anzahl unendlich gross und von denen jeder unendlich klein wird. Durch die Teilpunkte legen wir Parallele zur y-Axe. Die Fläche $MPQN$, welche bestimmt werden soll, wird dadurch in Teile zerlegt, wie $mpqn$, die schliesslich unendlich klein werden, während die Anzahl unendlich gross wird. Zieht man nun ma und nb parallel zur x-Axe, so entstehen zwei Parallelogramme $mpqa$, $bpqn$, von denen das eine kleiner, das andere grösser ist als die Fläche

Fig. 2.



$mpqn$. Das Verhältnis dieser beiden ist gleich $\frac{mp}{nq}$ und hat die Einheit zur Grenze. Hieraus schliesst man, dass das Verhältnis von $mpqn$ zu einem der Parallelogramme, z. B. zu $mpqa$, ebenfalls die Einheit ist. Denn es ist

$$mpqa < mnpq < bpqn;$$

also

$$1 < \frac{mnpq}{mpqa} < \frac{bpqn}{mpqa}.$$

Nach unserem zweiten Prinzipe ist also die zu bestimmende Fläche gleich der Grenze der Summe der inneren Parallelogramme $mpqa$, oder der der äusseren Parallelogramme. Dass nämlich auch die gleichmässige Konvergenz des Verhältnisses zwischen den äusseren und inneren Parallelogrammen nach der Einheit besteht, kann aus der Stetigkeit der Kurve bewiesen werden (siehe Kapitel VII, § 187). Setzt man also $mp = y$, $pq = h$, und bezeichnet θ den Koordinatenwinkel, so ist die gesuchte Fläche S aus der Formel zu bestimmen

$$S = \sin\theta \,.\, \lim \sum yh.$$

Wenn die Ordinate der Kurve bald wächst, bald abnimmt, diese Änderung jedoch nur in einer endlichen Anzahl von Stellen eintritt, so kann man die Kurve in mehrere Teile zerlegen, von denen jeder die obige Bedingung erfüllt. Die entwickelte Formel ist für jeden Teil anwendbar, und gilt demnach auch für die Summe derselben. Sie bleibt auch dann noch gültig, wenn die Ordinate y im Intervalle zwischen M und N ihr Zeichen wechselt, wofern man die Flächen mit negativen Ordinaten selbst als negativ betrachtet. Man überzeugt sich hiervon, indem man wiederum die Fläche in Teile zerlegt.

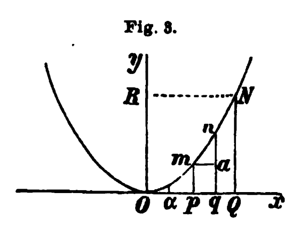
11. Beispiel. Wir betrachten die Parabel.

Diese Kurve hat, bezogen auf ihre Axe und die Scheiteltangente, die Gleichung

$$y = \frac{x^2}{2p}.$$

p ist der Parameter. Es soll die Fläche $NOQ = S$ bestimmt werden, welche zwischen der Kurve, der Tangente $OQ = x_1$ und der Ordinate $NQ = y_1$ liegt.

Fig. 3.



Da hier in der Umgebung des Koordinatenanfangspunktes die Ordinaten selbst nach 0 konvergieren, so betrachten wir zunächst einen Abscissenwert $\alpha > 0$, zu welchem die Ordinate $\beta = \frac{\alpha^2}{2p}$ gehört, und bestimmen die Fläche S', welche oberhalb der Strecke von α bis x_1 von der Parabel und den Ordinaten β und y_1 begrenzt

ist. Man teile diese Strecken in m gleiche Teile, so ist $pq = \frac{x_1 - \alpha}{m} = \delta$; ist $0p = x$, so wird $mp = \frac{x^2}{2p}$ und $nq = \frac{1}{2p}(x + \delta)^2$. Das Verhältnis $mp : nq = \frac{x^2}{(x+\delta)^2}$ konvergiert, wenn m beliebig wächst, also δ unendlich klein wird, nach dem Werte 1, und zwar gleichmässig für alle Werte von x zwischen α und x_1. Denn es ist

$$\frac{x^2}{(x+\delta)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{x}\right)^2}$$

und dieser Wert weicht von der Einheit um so weniger ab, je grösser x ist. Bestimmt man also δ so klein, dass für die Anfangsstelle α der Quotient

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right)^2}$$

um weniger als eine beliebig kleine Grösse ε von 1 sich unterscheidet, so ist auch bei allen anderen Werten von x der Quotient $1 : \left(1 + \frac{\delta}{x}\right)^2$ um weniger als ε von der Einheit unterschieden. Damit ist die Anwendbarkeit des zweiten Prinzipes für diesen Fall erwiesen und es wird

$$S' = \lim \sum mpqa = \lim \sum pq \,.\, mp.$$

Gehört nun $0p$ zum Werte $\alpha + \frac{k}{m}(x_1 - \alpha)$, wobei k die Werte der ganzen Zahlen von 0 bis $m - 1$ annimmt, so ist

$$mp = \frac{1}{2p}\left[\alpha + \frac{k}{m}(x_1 - \alpha)\right]^2, \text{ also } S' = \frac{1}{2p} \lim \sum_{k=0}^{k=m-1} \left[\alpha + \frac{k}{m}(x_1 - \alpha)\right]^2 \frac{x_1 - \alpha}{m}$$

Nun ist aber

$$\sum_{1}^{k=m-1} k = 1 + 2 + 3 + \dots (m-1) = \frac{m(m-1)}{2},$$

ferner

$$\sum_{1}^{k=m-1} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (m-1)^2 = \frac{m(m-\frac{1}{2})(m-1)}{3},$$

folglich wird nach einfacher Rechnung

$$S' = \frac{x_1{}^3 - \alpha^3}{3 \cdot 2p}.$$

Lässt man nun α beliebig klein werden und nach 0 konvergieren, so geht S' in den Wert der Fläche über, welche mit dem Scheitel der Parabel beginnt, und es ist also

$$S = \frac{x_1{}^3}{3 \cdot 2p} = \frac{x_1 y_1}{3}.$$

Legt man die Gerade NR senkrecht zur Ordinatenaxe, so entsteht ein Rechteck $OQNR$, welches durch die Parabel in zwei Teile geteilt wird, die im Verhältnis von 1 zu 2 stehen.

Zweites Kapitel.

Der erste Differentialquotient der Funktionen einer unabhängigen Variabelen.

Stetigkeit.

12. Eine Funktion $f(x)$ der Variabelen x heisst stetig für alle Werte von x zwischen den beiden Grenzen x_0 und X, wenn für jeden Wert von x der Betrag der Differenz

$$f(x+h)-f(x)$$

nach 0 konvergiert, also unendlich klein wird, wenn h unbegrenzt abnimmt. In dieser Definition ist die Forderung enthalten, dass für jeden Wert von x zwischen x_0 und X die Funktion $f(x)$ einen bestimmten Wert hat. Und sie ist äquivalent mit der Forderung: Bezeichnet δ eine beliebig kleine Zahl und θ einen positiven Bruch zwischen 0 und 1, so muss sich zu jeder noch so kleinen Zahl δ ein Faktor $\pm h$ angeben lassen, so dass alle in dieses Intervall fallenden Funktionswerte: $f(x \pm \theta h)$ von $f(x)$ um eine Grösse unterschieden sind, die gleich oder kleiner ist als δ; also abs $[f(x \pm \theta h) - f(x)] < \delta$.

Wird die Funktion $f(x)$ unendlich für einen Wert x zwischen x_0 und X, d. h. wachsen die Beträge der Funktion über jede Grenze, wenn sich die unabhängige Variabele immer mehr diesem Werte x nähert, so wird diese Bedingung der Stetigkeit nicht erfüllt; denn bei jedem noch so kleinen endlichen Werte von h ist die Differenz $f(x+h)-f(x)$ unendlich. Man sagt also: die Funktion wird, indem sie durch das Unendliche geht, unstetig.

Man erkennt leicht, dass durch diese Definition der Stetigkeit die Möglichkeit ausgeschlossen ist, dass an irgend einer Stelle x zwischen x_0 und X eine sprungweise Wertänderung der Funktion $f(x)$ eintritt. Denn bei einer sprungweisen Wertänderung würde der Wert von $\lim f(x-h)$ verschieden sein von dem Werte $\lim f(x+h)$, oder auch der Wert der Funktion an der Stelle x würde sich von diesen Grenzwerten unterscheiden, was sich mit der obigen Bedingung nicht verträgt.

Aber es ist auch wichtig einzusehen, was nicht so unmittelbar aus der definierenden Bedingung erkannt wird und doch in derselben enthalten ist: Wenn eine Funktion im Intervalle von x_0 bis X überall stetig ist, und sie hat für zwei Punkte dieses Intervalles x_1 und x_2 die Werte $f(x_1)$ und $f(x_2)$, so nimmt die Funktion, während x das Wertgebiet von x_1 bis x_2 durchläuft, auch jeden Wert, der zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ gelegen ist, mindestens einmal an. Mit anderen Worten: Die stetige Funktion überspringt keinen Wert, der sich innerhalb ihres Wertgebietes befindet. Den Beweis des Satzes kann man auf einen einfacheren Fall zurückführen. Ist m ein Wert, der zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ liegt, $f(x_1)$ sei grösser als $f(x_2)$, so ist die Funktion $\varphi(x) = f(x) - m$ für $x = x_1$ positiv, für $x = x_2$ negativ. Um also zu beweisen, dass an einer Stelle zwischen x_1 und x_2 $f(x)$ gleich m wird, hat man zu zeigen, dass an einer Stelle zwischen x_1 und x_2 $\varphi(x)$ gleich 0 wird. Es handelt sich also um den Satz: Wird eine stetige Funktion $\varphi(x)$ für $x = x_1$ positiv, für $x = x_2$ negativ, so liegt im Intervalle von x_1 bis x_2 jedenfalls eine Stelle, an welcher sie gleich 0 wird.

Das Intervall $x_2 - x_1$ habe die Länge l. Man konstruiere die Mitte dieses Intervalles, den Punkt $x_1 + \frac{l}{2} = x_3$. Ist der Funktionswert an dieser Stelle 0, so ist der Satz bereits bewiesen. Wir müssen also annehmen, dass er von 0 verschieden ist. Ist er positiv, so betrachte man das Intervall von x_3 bis x_2, in welchem die Funktion jedenfalls ihr Zeichen ändert, ist er negativ, so betrachte man das Intervall von x_1 bis x_3. Welcher von beiden Fällen nun auch vorliegen mag, das Intervall, welches man zu betrachten hat, hat die Länge $\frac{l}{2}$, und an der Anfangsstelle desselben, sie heisse α_1 (α_1 ist entweder gleich x_1 oder gleich x_3), ist die Funktion positiv, an der Endstelle β_1 (β_1 ist entweder gleich x_3 oder x_2) ist sie negativ. Dieses Intervall halbiere man nun wiederum, und betrachte, je nachdem für diesen mittleren Punkt die Funktion negativ oder positiv ist, die erste oder die zweite Hälfte. Man hat dann ein Intervall von der Länge $\frac{l}{4}$, in welchem die Funktion

ihr Zeichen ändert; an der Anfangsstelle α_2 ist sie positiv, an der Endstelle β_2 negativ. Setzt man nun diesen Halbierungsprozess fort, so trifft man entweder auf eine Stelle, an welcher der Funktionswert 0 ist, und damit ist der Satz bewiesen; oder man kann unbegrenzt Intervalle markieren, deren Länge immer mehr abnimmt und nach 0 konvergiert, denn diese Längen sind $\frac{l}{2}, \frac{l}{4}, \frac{l}{8}$ u. s. w. Die Anfangspunkte sowohl wie die Endpunkte dieser Intervalle konvergieren nach einer bestimmten Grenze und zwar nach der nämlichen. Denn die Anfangswerte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ nehmen niemals ab, sie wachsen fortwährend, doch können auch mehrere aufeinanderfolgende einander gleich bleiben; und sämtliche α sind kleiner als β_1. Daraus folgt, dass sie eine bestimmte Grenze haben (Kap. I § 3). Die Endwerte β nehmen niemals zu und bleiben doch stets grösser als α; daraus folgt, dass sie ebenfalls eine Grenze haben. Die beiden Grenzen sind einander gleich, weil die Differenz $\beta_n - \alpha_n$ nach 0 konvergiert. Mithin wird ein Wert X definiert, zwischen x_1 und x_2, sowohl durch die Reihe $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, wie durch die Reihe $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n \ldots$ Da nun $\varphi(\alpha)$ stets positiv ist und $\varphi(\beta)$ stets negativ, und da man n so gross wählen kann, dass $X - \alpha_n$ und $\beta_n - X$ kleiner als eine beliebig kleine Grösse h sind, so muss auch nach der Definition der Stetigkeit

$$\text{abs}\,[\varphi(\alpha_n) - \varphi(X)] < \delta \quad \text{und} \quad \text{abs}\,[\varphi(\beta_n) - \varphi(X)] < \delta$$

werden, wenn δ eine beliebig kleine Grösse bezeichnet. Hätte nun $\varphi(X)$ einen positiven von 0 verschiedenen Wert a, so wäre

$$\varphi(X) - \varphi(\beta_n) > a \quad \text{denn} \quad \varphi(\beta_n) < 0$$

und hätte $\varphi(X)$ einen negativen von 0 verschiedenen Wert $-a$, so wäre

$$\varphi(\alpha_n) - \varphi(X) > a \quad \text{denn} \quad \varphi(\alpha_n) > 0.$$

Die Bedingung der Stetigkeit wäre also nicht erfüllt; mithin muss $\varphi(X) = 0$ sein.

Die abgeleitete Funktion.

13. Ist die Funktion $f(x)$ stetig bei allen Werten von x zwischen x_0 und X, so werden der Zuwachs h der unabhängigen Variabelen und der entsprechende Zuwachs $f(x+h) - f(x)$ der Funktion zusammen unendlich klein, wie wir dieses gleichzeitige Verschwinden zu bezeichnen übereingekommen sind. Die Grenze des Verhältnisses

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

dieser Zuwüchse ist meistens eine bestimmte vom Vorzeichen der Variabelen h unabhängige Grösse. Sie hängt dagegen von dem Werte, welchen man der Veränderlichen x erteilt hat, ab, und ist folglich eine Funktion dieser Variabelen. Sie heisst die Ableitung der Funktion $f(x)$, und wir bezeichnen sie, nach Lagrange, mit dem Zeichen $f'(x)$. Man hat also

$$1)\qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon$$

oder

$$2)\qquad f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\varepsilon h,$$

wobei ε eine Grösse bezeichnet, welche zusammen mit h unendlich klein wird. Es kann eintreten, dass für gewisse Werte von x die Grenze des Verhältnisses

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

von dem Vorzeichen abhängt, welches man h beigelegt hat, indem diese Grösse nach 0 konvergiert. In diesem Falle hat die Ableitung nicht mehr *einen* bestimmten Wert an der Stelle x.

Bezeichnet man h als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung, so ist nach dem früheren auch

$$f(x+h)-f(x)$$

eine unendlich kleine Grösse derselben Ordnung, ausser wenn die Ableitung $f'(x)$ null oder unendlich ist. Dieses kann aber, wie wir später sehen werden, bei den gewöhnlichen Funktionen nur für bestimmte besondere Werte von x eintreten. Wird $f'(x)$ gleich 0, so ist der Zuwachs der Funktion von höherer Ordnung als der ersten unendlich klein; wird $f'(x)$ unendlich, so ist seine Ordnung kleiner als 1.

14. Die einfache Definition der Ableitung führt zu mehreren wichtigen Sätzen, welche wir nun behandeln wollen.

Satz I. *Ist eine Funktion* $f(x)$ *für alle Werte von* x, *die zwischen zwei gegebenen Grenzen liegen, stetig, und besitzt die Funktion für jeden dieser Werte einen bestimmten Wert der Ableitung* $f'(x)$, *ist also*

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim \frac{f(x-h)-f(x)}{-h},$$

so ist der Wert des Quotienten:

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0},$$

bei welchem X *und* x_0 *zwei Werte von* x *bezeichnen, die innerhalb der gegebenen Grenzen liegen, stets auch unter den Werten enthalten, welche die Ableitung* f′(x) *im Intervall von* x_0 *bis* X *annimmt, d. h. es giebt einen Wert* x_1 *zwischen* x_0 *und* X, *für welchen die Gleichung besteht:*

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} = f'(x_1).$$

Der Quotient

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$$

hat, der Voraussetzung nach, einen endlichen Wert. Nennt man diesen Wert A, so hat man

1) $$[f(X)-AX]-[f(x_0)-Ax_0]=0.$$

Bezeichnet man mit $\varphi(x)$ eine Funktion, welche durch die Gleichung

2) $$\varphi(x)=[f(x)-Ax]-[f(x_0)-Ax_0]$$

definiert ist, so ist nicht nur $\varphi(x_0)=0$, sondern auch infolge der Gleichung 1) $\varphi(X)=0$. Die Funktion verschwindet also für diese beiden Werte von x. Wir nehmen $X > x_0$ an und lassen x von x_0 bis X wachsen. Die Funktion $\varphi(x)$ ist an der Anfangsstelle null. Nimmt man nun an, dass sie nicht konstant 0 ist, so erhält sie im Intervalle entweder nur positive Werte, oder nur negative, oder sie besitzt sowohl positive, wie negative Werte. Wenn die Funktion positive Werte erhält, so muss es, da sie an den Endpunkten verschwindet, einen grössten Wert geben, der an einer oder an mehreren Stellen im Innern des Intervalles erreicht wird. Solch eine Stelle sei x_1 und der zugehörige Wert der Funktion $\varphi(x_1)$; alsdann sind, wie klein auch immer h gewählt wird,

$$\varphi(x_1-h) \quad \text{und} \quad \varphi(x_1+h)$$

kleiner oder gleich $\varphi(x_1)$, jedenfalls nicht grösser. Wenn dagegen $\varphi(x)$ im Intervalle von x_0 bis X negativ wird, so

giebt es einen kleinsten Wert der Funktion, der an einer oder mehreren Stellen im Innern des Intervalles erreicht wird, und die Grössen

$$\varphi(x_1 - h) \quad \text{und} \quad \varphi(x_1 + h)$$

sind, wenn x_1 solch eine Stelle bezeichnet, grösser oder gleich $\varphi(x_1)$, jedenfalls nicht kleiner. In beiden Fällen haben die Differenzen

$$\varphi(x_1 - h) - \varphi(x_1) \quad \text{und} \quad \varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)$$

dasselbe Vorzeichen oder den Wert 0, und folglich sind die Quotienten

$$3) \qquad \frac{\varphi(x_1 - h) - \varphi(x_1)}{-h} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h}$$

von entgegengesetztem Vorzeichen.

Dabei ist zu bemerken, dass auch die Annahme nicht ausgeschlossen wird, dass einer dieser Quotienten bei kleinen Werten von h stets 0 bleibt, was dann eintritt, wenn die Funktion $\varphi(x)$ den nämlichen Wert innerhalb eines Intervalles von endlicher Länge behält. Ist insbesondere die Funktion $\varphi(x)$ konstant gleich 0, für alle Werte von x zwischen x_0 und X, so sind beide Quotienten gleich 0.

Die Quotienten 3) konvergieren nach der nämlichen Grenze, wenn h nach 0 konvergiert, denn wir haben angenommen, dass die Funktion $f(x)$ für jedes x *eine* bestimmte Ableitung besitzt, und folglich gilt dasselbe für die Funktion $\varphi(x)$. Andererseits sind diese Verhältnisse von entgegengesetztem Zeichen; folglich ist ihre Grenze gleich 0. Also hat man

$$\lim \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h} = 0$$

oder nach Gleichung 2):

$$\lim \left[\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} - A\right] = 0,$$

d. h.

$$A = \lim \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = f'(x_1).$$

Demnach ist

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_1)$$

oder

4) $$f(X) - f(x_0) = (X - x_0) f'(x_1),$$
wie die Behauptung besagt.

Wir haben angenommen, dass $X > x_0$; da aber die gewonnene Formel sich nicht verändert, wenn man x_0 und X vertauscht, so ist sie von dieser Annahme unabhängig.

Setzt man $X = x_0 + h$, so kann die Grösse x_1, welche zwischen x_0 und $x_0 + h$ liegt, durch $x_0 + \theta h$ bezeichnet werden, wobei θ eine Grösse zwischen 0 und 1 bedeutet. Man kann also schreiben

5) $$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h).$$

Bemerkung. Der obige Beweis ist von Herrn Ossian Bonnet gegeben. Es ist zu bemerken, dass er nicht die Stetigkeit von $f'(x)$ voraussetzt; es kann daher auch die Ableitung $f'(x)$ im Intervalle unendlich werden. Er erfordert nicht einmal, dass $f'(x)$ allenthalben einen bestimmten Wert hat, verlangt vielmehr nur, dass

$$\lim \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = 0$$

wird an jeder Stelle des Intervalles. Die Grenze bei positivem h wird die vorwärts gebildete Ableitung genannt, bei negativem die rückwärts gebildete. Die Bedingung besagt also, dass vor- und rückwärts gebildete Ableitungen allenthalben einander gleich sind.

Bei diesem Beweise ist von dem von Herrn Weierstrass zuerst bewiesenen Satze Gebrauch gemacht: Wenn eine für jeden Wert x eines Intervalles stetige Funktion nicht überall gleiche Werte besitzt, so erreicht sie für einen bestimmten Wert von x ein Maximum und ebenso ein Minimum. Der Satz gilt nicht für eine unstetige Funktion. Denn wenn man z. B. die Funktion $y = x$ für das Intervall von $x = 0$ bis $x = 1$ einführt, und nun an der Stelle $x = 1$ die Funktion nicht durch den Wert 1 definiert, der aus der Gleichung $y = x$ folgen würde, sondern ihr dort den Wert 0 beilegt, so hat die so definierte, an der Stelle $x = 1$ unstetige Funktion die Eigenschaft, dass ihr Maximalwert, d. h. der grösste Wert, welchem sich die Werte der Funktion beliebig nähern, zwar 1 ist, dass aber dieser Wert nicht erreicht wird. Mithin muss gezeigt werden, dass die behauptete Eigenschaft wirklich aus der Definition der Stetigkeit hervorgeht. Der Beweis ist in derselben Weise zu führen, wie im Zusatz zu § 12. Es wird genügen, die Existenz des Maximums nachzuweisen. Maximalwert der

Funktion $f(x)$ im Intervalle von x_1 bis x_2 ist allgemein derjenige Wert M, den die Werte der Funktion nicht überschreiten, dem sie aber beliebig nahe kommen können. Solch ein Wert lässt sich für jede Funktion, die überhaupt für jeden Wert von x des gegebenen Intervalles einen bestimmten endlichen Wert hat, also insbesonders für jede stetige Funktion von x fixieren. Denn man kann, da die Funktion weder positiv noch negativ unendlich wird, zwei Werte g_1 und G_1 fixieren, innerhalb welcher die Funktionswerte liegen; wenn dann die Differenz $G_1 - f(x)$ durchaus positiv und um eine endliche angebbare Grösse von 0 verschieden bleibt, so kann man statt G_1 eine kleinere Zahl G_2 wählen; bleibt auch noch $G_2 - f(x)$ positiv von 0 verschieden, so kann man statt G_2 eine kleinere Zahl G_3 wählen; hat man eine solche Zahl G_n ermittelt, für welche $G_n - f(x)$ bei keinem Werte von x negativ, für gewisse Werte von x aber gleich 0 wird, so ist G_n der Maximalwert, der auch wirklich erreicht wird. Nimmt man aber den allgemeineren Fall an, dass der Prozess des Vergleiches von $f(x)$ mit den bestimmten Zahlen $G_1, G_2, G_3 \ldots$ zwar immer kleinere Differenzen liefert, deren Werte immer mehr der 0 sich nähern, sich aber unbegrenzt fortsetzt, so definiert diese Zahlenreihe $G_1, G_2, G_3 \ldots$, da sie aus lauter abnehmenden Zahlen besteht, die dennoch stets grösser bleiben als g_1, eine bestimmte Grösse, das Maximum M der Funktion $f(x)$; von diesem Maximum ist zu zeigen, dass es bei einer stetigen Funktion wirklich erreicht wird. Das Intervall von x_1 bis x_2, dessen Länge l sei, teile man in zwei Hälften; entweder wird der Maximalwert M an den Endpunkten oder der Mitte wirklich erreicht, dann ist der Satz bewiesen, oder es kommen die Werte der Funktion innerhalb der ersten Hälfte dem Werte M beliebig nahe, oder innerhalb der zweiten. Auch das ist möglich, dass die Funktion in jedem der beiden Intervalle den Maximalwert M besitzt. Jedenfalls kann man ein Intervall von der Länge $\frac{l}{2}$ fixieren, in welchem der Maximalwert der Funktion M ist; die Endpunkte des Intervalles seien α_1 und α_2. Dieses Intervall teile man in zwei Hälften, jede von der Länge $\frac{l}{4}$, und fixiere diejenige Hälfte, in welcher der Maximalwert der Funktion M ist; die Endpunkte dieses Intervalles seien α_2 und β_2. Indem man dieses Intervall wiederum halbiert und so den Prozess immer weiter fortsetzt, muss man entweder auf eine Halbierungsstelle geraten, bei welcher der Wert der Funktion gleich M ist, und damit ist der Satz bewiesen, oder der Prozess setzt sich unbegrenzt fort; man erhält immer kleinere Intervalle $\beta_n - \alpha_n = \frac{l}{2^n}$, in denen der Maximalwert der Funktion M ist. Durch die Reihe der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$ und

ebenso durch die Reihe $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_n \ldots$ wird eine Stelle X definiert, für welche $f(X) = M$ sein muss. Wäre nämlich $f(X)$ um eine endliche Grösse a von M unterschieden, wäre

$$f(X) = M - a,$$

so würde die Funktion an der Stelle X nicht stetig sein. Denn bei einer stetigen Funktion kann man ein Intervall von der Länge h angeben, so dass

$$\text{abs}\,[f(X+h) - f(X)] < \eta \quad \text{und} \quad \text{abs}\,[f(X-h) - f(X)] < \eta$$

bleibt, wenn man η beliebig klein fixiert hat und h nach 0 konvergieren lässt. In das Intervall von X bis $X + h$ fallen nun sicherlich auch Punkte β, denn diese Punkte β konvergieren schliesslich nach dem Werte X; es sei also $X + h > \beta_n$, ebenso fallen in das Intervall von X bis $X - h$ Punkte α; es sei $X - h < \alpha_m$, demnach kann man sicherlich ein Intervall α bis β angeben, das ganz innerhalb des Intervalles $-h$ bis $+h$ liegt. Zu diesem Intervalle gehören aber, gemäss seiner Entstehung, Funktionswerte, welche dem Werte M beliebig nahe kommen, für welche also $f = M - \delta$ wird, wobei δ beliebig klein ist. Mithin muss auch

$$\text{abs}\,[M - \delta - f(X)] = \text{abs}\,[M - \delta - M + a] = [a - \delta] < \eta$$

sein, was nicht der Fall ist, wenn a eine bestimmte endliche Grösse, δ und η dagegen beliebig klein sind. Also ist $a = 0$ und $f(X) = M$.

15. Satz II. *Ist die Funktion* $f(x)$ *für alle Werte von* x *innerhalb eines gegebenen Intervalles konstant, so ist die Ableitung* $f'(x)$ *für dieselben Werte von* x *gleich* 0. *Und umgekehrt, wenn die Ableitung* $f'(x)$ *gebildet für positive und für negative Werte von* h, *bei allen Werten von* x, *innerhalb eines gegebenen Intervalles gleich* 0 *ist, so hat die Funktion* $f(x)$ *in diesem Intervalle einen konstanten Wert.*

1. Ist $f(x)$ konstant in einem Intervalle, und sind x_0 und $x_0 + h$ zwei Werte von x, die zu diesem Intervalle gehören, so ist

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = 0, \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0,$$

und geht man zur Grenze für $h = 0$ über, so ist auch

$$\lim \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = 0.$$

2. Ist umgekehrt $f'(x)$ gleich 0 für alle Werte von x innerhalb gegebener Grenzen, und sind x_0 und $x_0 + h$ zwei beliebige Werte von x, die dazu gehören, so hat man (§ 14)

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist der Annahme nach 0, und demnach ist

$$f(x_0 + h) = f(x_0),$$

d. h. $f(x)$ hat einen konstanten Wert.

Folgerung. *Wenn zwei Funktionen* f(x) *und* F(x) *sich nur um eine Konstante unterscheiden für alle Werte von* x *innerhalb gegebener Grenzen, so sind bei den nämlichen Werten von* x *auch die Ableitungen dieser Funktionen einander gleich.* Und umgekehrt: *Wenn die Ableitungen* f'(x) *und* F'(x) *zweier Funktionen* f(x) *und* F(x), *gebildet mit positiven und mit negativen Werten von* h, *einander gleich sind für alle Werte von* x *innerhalb gegebener Grenzen, so unterscheiden sich auch die Funktionen selbst bei diesen Werten von* x *nur um eine Konstante.*

Denn bezeichnet man die Differenz der Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ mit $\varphi(x)$, so ist

$$\varphi(x) = f(x) - F(x), \quad \varphi(x + h) = f(x + h) - F(x + h),$$

folglich

$$\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \frac{F(x + h) - F(x)}{h}.$$

Geht man zur Grenze für $h = 0$ über, so ist

$$\varphi'(x) = f'(x) - F'(x),$$

ist $\varphi(x)$ konstant, so ist $\varphi'(x) = 0$; also sind die Ableitungen $f'(x)$ und $F'(x)$ einander gleich.

Umgekehrt: Sind $f'(x)$ und $F'(x)$ gleich, so ist $\varphi'(x)$ null, und also ist $\varphi(x)$ eine Konstante.

16. Satz III. *Wenn die Ableitung* f'(x) *der Funktion* f(x) *bei allen Werten von* x *zwischen den Grenzen* x_0 *und* $X > x_0$ *endlich bleibt, und man lässt* x *von* x_0 *bis* X *wachsen, so wächst auch die Funktion* f(x), *solange die Ableitung* f'(x) *nicht negativ wird, und sie nimmt ab, solange die Ableitung nicht positiv wird.*

Während x zwischen x_0 und X liegt, hat der Quotient

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}$$

die Grenze $f'(x)$, die zunächst überall eine endliche von 0 verschiedene Grösse sein soll. Der Quotient hat also dasselbe

Vorzeichen wie diese Grenze bei allen Werten von h, welche zwischen 0 und einer Grösse ε liegen, die hinreichend klein gewählt wird. Folglich ist bei diesen Werten von h

$$f(x-h) < f(x) < f(x+h),$$

wenn $f'(x) > 0$ ist, und

$$f(x-h) > f(x) > f(x+h),$$

wenn $f'(x) < 0$ ist.

Wird aber die Funktion $f'(x)$ für einen oder für mehrere Werte von x zwischen x_0 und X gleich 0, so braucht man, wenn es sich um eine endliche Zahl solcher Stellen handelt, nur eine solche Stelle in Betracht zu ziehen, denn auf diesen Fall kommt der allgemeinere dadurch zurück, dass man das Intervall von x_0 bis X in mehrere zerlegt. Bezeichnet man nun mit a eine Stelle, für welche $f'(x)$ null ist, und mit h eine beliebig kleine Grösse, so wird, wenn man x von x_0 bis $a-h$ und von $a+h$ bis X wachsen lässt, das Vorzeichen von $f'(x)$ den Sinn der Änderung der Funktion in jedem dieser Intervalle anzeigen, wie klein auch h genommen wird. Lässt man h nach 0 konvergieren, so erkennt man, dass, wenn die Ableitung $f'(x)$ beim Durchgange durch den Wert 0 ihr Zeichen nicht ändert, die Funktion stets in demselben Sinne sich ändert, während, wenn $f'(x)$ sein Zeichen im Punkte a ändert, die Funktion entweder vom Wachstum zur Abnahme, oder von der Abnahme zum Wachstum übergeht. In diesem Falle sagt man, dass sie durch einen Maximal- oder durch einen Minimalwert hindurchgeht.

Der Beweis kann auch ganz unabhängig davon geführt werden, wie gross die Anzahl der Stellen ist, an denen $f'(x) = 0$ wird. Ist die Ableitung $f'(x)$ vor- und rückwärts gebildet in einem Intervalle durchaus positiv, allenfalls gleich 0, und sind x_1 und x_2 zwei beliebige Stellen dieses Intervalles, und zwar $x_2 > x_1$, so ist

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1 + \theta\,(x_2 - x_1)).$$

Da nun $f'(x)$ nicht negativ ist, so muss, falls nicht $f(x)$ durchaus konstant ist, $f(x_2) > f(x_1)$ sein. Denn wäre $f(x_2) < f(x_1)$, so müsste es auch eine Stelle geben, für welche die Ableitung negativ wird. Die Funktion $f(x)$ nimmt also mit wachsenden

Werten von x nicht ab; sie wächst vielmehr durchaus oder bleibt im ganzen Intervalle, oder auch in Teilen desselben konstant.

Während der Beweis des Satzes I

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h)$$

die Stetigkeit der Ableitung $f'(x)$ nicht voraussetzt, sondern nur die Bedingung erfordert, dass vor- und rückwärts gebildete Ableitungen an keiner Stelle von einander verschieden sind, kann man andererseits auch den Satz beweisen:

Ist die vorwärts gebildete Ableitung einer stetigen Funktion in einem Intervalle ebenfalls durchaus stetig, so gilt der obige Satz, und die rückwärts gebildete Ableitung ist überall der vorwärts gebildeten gleich.

Denn betrachten wir zunächst eine Funktion, die an den beiden Endpunkten eines Intervalles x_0 und X denselben Wert hat, so ist zu zeigen, dass für diese Funktion die Ableitung mindestens an einer Stelle gleich 0 ist. Wenn die Funktion in dem Intervalle nicht durchaus konstant und ihre Ableitung also nicht durchaus gleich 0 ist, so muss sie jedenfalls Werte annehmen, die entweder grösser oder kleiner sind als $f(x_0) = f(X)$. Angenommen, die Funktion erhielte einen Wert an der Stelle x_1, welcher grösser ist als $f(x_0)$. Alsdann muss im Intervalle von x_0 bis x_1 die vorwärts gebildete Ableitung der Funktion $f(x)$ jedenfalls den Wert 0 oder auch Werte grösser als 0 annehmen; denn wäre dieselbe durchaus negativ von 0 verschieden, so könnte die Funktion in diesem Intervalle nicht wachsen (Satz III). Dagegen muss im Intervalle von x_1 bis X die Ableitung jedenfalls den Wert 0 oder auch negative Werte annehmen, da die Funktion in diesem Intervalle eine abnehmende ist. Soll nun die Ableitung eine stetige Funktion sein, so muss sie, da sie einen Wechsel des Vorzeichens erleidet, auch an einer Stelle gleich 0 werden. Ebenso beweist man den Satz unter der Annahme, dass es im Innern eine Stelle giebt, an welcher der Funktionswert kleiner ist als an den Endstellen des Intervalles.

Bezeichnet man nun den Quotienten $\dfrac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$ mit K, so ist

$$\varphi(x) = [f(x) - f(x_0)] - K(x - x_0)$$

eine stetige Funktion, welche an den Endpunkten des Intervalles verschwindet, also denselben Wert hat, und deren Ableitung $\varphi'(x)$ der Voraussetzung nach eine stetige Funktion ist, denn es ist

$$\varphi'(x) = f'(x) - K.$$

Mithin giebt es eine Stelle $X = x_0 + \theta(X - x_0)$, für welche $\varphi'(x)$ verschwindet, d. h. eine Stelle, für welche

$$K = f'(x_0 + \theta(X - x_0)) = \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$$

wird. Demnach besteht für alle Werte von x und $x - h$, die zum Intervall von x_0 bis X gehören, auch die Gleichung

$$\frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'(x - \theta h),$$

und lässt man h nach 0 konvergieren, so geht die linke Seite in die rückwärts gebildete Ableitung über, während die rechte Seite zufolge der Stetigkeit von $f'(x)$ den Grenzwert $f'(x)$ erhält. Es ist also:

$$\lim \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'(x).$$

17. Der Satz des § 14 kann verallgemeinert werden; er ist in dem folgenden enthalten, von dem später wichtige Anwendungen gemacht werden.

Satz IV. *Es seien* f(x) *und* F(x) *zwei Funktionen, die für alle Werte von* x *innerhalb gegebener Grenzen stetig sind, und bei diesen Werten die Ableitungen* f'(x) *und* F'(x) *besitzen, von denen jede unabhängig von dem Vorzeichen der Grösse* h *ist. Sind dann* x_0 *und* X *zwei Werte von* x *innerhalb dieser Grenzen, und wird die Ableitung* F'(x) *weder* 0 *noch unendlich für die Werte von* x *zwischen* x_0 *und* X, *so besteht die Gleichung:*

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)},$$

wobei x_1 *einen Wert zwischen* x_0 *und* X *bedeutet.*

Wir wenden dieselbe Überlegung an, welche zum Beweise des Satzes I diente. Setzt man

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = A,$$

so ist:

$$1)\qquad [f(X) - f(x_0)] - A[F(X) - F(x_0)] = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Funktion

$$2)\qquad \varphi(x) = [f(x) - AF(x)] - [f(x_0) - AF(x_0)],$$

welche für $x = x_0$ verschwindet, auch für $x = X$ gleich 0 ist. Ist also die Funktion $\varphi(x)$ nicht durchaus gleich 0, so giebt es mindestens eine Stelle x_1 im Innern des Intervalles, an welcher sie ihren Maximal- oder Minimalwert annimmt. Für diese Stelle sind

$$\frac{\varphi(x_1+h)-\varphi(x_1)}{h} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(x_1-h)-\varphi(x_1)}{-h}$$

von entgegengesetzten Zeichen, also ist:

$$\lim \frac{\varphi(x_1+h)-\varphi(x_1)}{h} = 0,$$

d. h. nach Gleichung 2)

$$\lim \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} - A \lim \frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{h} = 0,$$

oder

$$f'(x_1) - AF'(x_1) = 0.$$

Der Wert x_1 ist weder gleich x_0 noch gleich X; der Voraussetzung nach wird $F(x)$ weder 0 noch unendlich für Werte von x zwischen x_0 und X; daher folgt

$$A = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)}$$

und sonach ist

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{F(X)-F(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)}.$$

Setzt man $X = x_0 + h$, wobei h eine positive oder negative Grösse sein kann, so ist $x_1 = x_0 + \theta h$, und θ ein Bruch zwischen 0 und 1; die Gleichung erhält die Form:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)} = \frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}.$$

Die Differentiale.

18. Wir werden das Zeichen Δ anwenden, um Zuwüchse der Funktionen zu bezeichnen. So wird die Änderung (Wachstum im positiven oder negativen Sinne), welche die Funktion $f(x)$ erleidet, wenn man x um h oder Δx verändert, durch die Grösse

$$f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$$

angegeben, und folglich ist

1) $$\Delta f(x) = hf'(x) + \varepsilon h,$$

wobei ε mit h unendlich klein wird.

Der erste Teil $hf'(x)$ dieses Zuwachses wird das *Differential* der Funktion genannt. Dieses Differential schreibt man mit dem Zeichen d, also

$$2) \qquad df(x) = hf'(x).$$

Man erkennt, dass, wenn die willkürliche Grösse h unendlich klein wird, die Grössen $\Delta f(x)$ und $df(x)$ selbst unendlich klein werden, so zwar, dass nach der Methode, die wir im ersten Kapitel besprochen haben, diese Grössen sich gegenseitig vertreten können bei Quotienten oder bei Summen, deren Grenzwerte zu bestimmen sind. Denn es ist, solange h von 0 verschieden ist:

$$\frac{\Delta f(x)}{df(x)} = 1 + \frac{\varepsilon}{f'(x)}$$

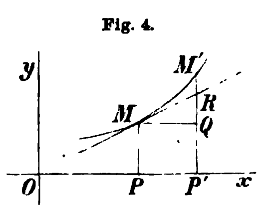
und folglich wird, wenn h nach 0 konvergiert,

$$\lim \frac{\Delta f(x)}{df(x)} = 1,$$

wenn $f'(x)$ endlich ist.

19. Man kann eine einfache geometrische Darstellung des Zuwachses $\Delta f(x)$ und des Differentiales $df(x)$ geben. Wir wählen zu diesem Zwecke zwei rechtwinklige Koordinatenaxen und konstruieren die Kurve, deren Ordinaten die Werte von $f(x)$ sind. Man zeichne die Tangente im Punkte, dessen Koordinaten x und $f(x)$ sind, und konstruiere die Ordinate $M'P'$, welche zur Abscisse $x+h$ gehört, und die Tangente des Punktes M in R schneidet; endlich legen wir noch MQ parallel zur Abscissenaxe. Die Ableitung $f'(x)$, die Grenze des Quotienten $\frac{\Delta f(x)}{h}$ ist, wie wir schon sagten (§ 6), der Richtungskoeffizient der Tangente MR, und man hat

Fig. 4.



$$\Delta f(x) = M'Q = RQ + M'R,$$
$$df(x) = hf'(x) = RQ,$$

folglich ist

$$\varepsilon h = M'R.$$

Es folgt daraus, dass $M'R$ von höherer als der ersten Ordnung unendlich klein wird, wenn in dem Kurvenpunkte M

$f'(x)$ einen bestimmten endlichen Wert hat, und $h = PP'$ nach 0 konvergiert.

20. In dem besonderen Falle, wo die Funktion $f(x)$ sich reduziert auf $f(x) = x$, hat man $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = h$, also $\frac{\Delta f(x)}{h} = 1$, folglich $f'(x) = 1$. Die Gleichung 2) wird also hier $dx = h$, d. h. wir können den Zuwachs h allgemein das *Differential der unabhängigen Variabelen* nennen und der Gleichung 2) die Form

$$3) \qquad df(x) = f'(x)\,dx$$

geben. Dieselbe sagt aus: *Das Differential einer Funktion ist gleich dem Produkte aus der Ableitung dieser Funktion mit dem Differentiale der unabhängigen Variabelen.*

Dividiert man die Formel 3) durch dx, so wird

$$4) \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

also:

Die Ableitung einer Funktion ist der Quotient aus dem Differentiale der Funktion, dividiert durch das Differential der unabhängigen Variabelen.

Diese Darstellungsweise der Ableitungen ist die gebräuchlichste. Sonach kann der Ausdruck $\frac{df(x)}{dx}$ unter zweierlei Gesichtspunkten betrachtet werden: einmal als Quotient von $df(x)$ und dx, sodann als blosses Symbol für die Grenze des Verhältnisses von $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. (Diese zweite Betrachtungsweise enthält zugleich die eigentliche Methode der Wertbestimmung.) Auch schreibt man die Formel 3) häufig

$$df(x) = \frac{df(x)}{dx}\,dx$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad dy = f'(x)\,dx,$$

indem man durch den einen Buchstaben y die Funktion bezeichnet, welche wir bisher durch die Form $f(x)$ darstellten.

Abweichend von dem sonst üblichen Gebrauche ist hier und auch späterhin, wie nochmals wiederholt sein mag, das Differential

zunächst als eine *endliche* (nicht als eine unendlich kleine) Grösse definiert. Alle Gleichungen zwischen Differentialen, welche wir zu untersuchen haben, werden aber stets so beschaffen sein, dass für dieselben nur die Verhältnisse von Differentialen (Differentialquotienten) wesentlich sind. Dann ist die Grösse des Wertes, welchen man dem unabhängigen Differentiale beilegt, auf diese Verhältnisse ganz ohne Einfluss, so dass man diesen Wert auch nach Null konvergieren lassen kann, ohne dass die Gleichung ihre Bedeutung verliert. Dieser Prozess, das Differential unendlich klein *werden* zu lassen, was man auch kurz, obgleich minder korrekt, so ausdrückt, es *ist* unendlich klein, wird bei gewissen geometrischen Problemen, wie wir sehen werden, geradezu gefordert.

Ein Satz über Funktionen von Funktionen.

21. Es seien x, y, u drei Variabele, von denen wir annehmen, dass zwei von ihnen von der dritten abhängen. Wenn man den Wert von y als Funktion von u ausgedrückt hat, derart, dass

$$y = f(u)$$

ist, und man wählt x zur unabhängigen Veränderlichen, so sagt man, dass y eine *Funktion von einer Funktion von* x ist.

Dies festgesetzt, beweisen wir den folgenden Satz, den man als grundlegend zu betrachten hat.

Ist $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{u})$, *so ist auch* $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{f}'(\mathrm{u})\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$, *oder* $\mathrm{dy} = \mathrm{f}'(\mathrm{u}) . \mathrm{du}$, *wie auch die unabhängige Variabele* x *gewählt sein mag, wenn nur* u *eine stetige Funktion von* x *mit bestimmter Ableitung ist, und* f'(u) *einen bestimmten Wert hat.*

Denn erteilt man der unabhängigen Variabelen x den Zuwachs Δx, so erleidet u eine Änderung, die mit Δu, und dadurch y eine Änderung, die mit Δy bezeichnet werde. Es ist

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Lässt man Δx nach 0 konvergieren, so wird

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Wenn nun $\lim \frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}$ für $\Delta u = 0$ eine bestimmte Grenze besitzt, so ist dieselbe mit $f'(u)$ zu bezeichnen, und es wird, da

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \quad \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

ist:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad dy = f'(u)\, du,$$

wie wenn u die unabhängige Variabele wäre. Man schreibt auch öfters

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du \quad \text{oder} \quad dy = \frac{\partial f(u)}{\partial u} du,$$

dy ist dann das Differential der Funktion y, diese betrachtet als Funktion einer willkürlichen Variabelen, und du ist das von dieser willkürlichen Variabelen abhängige Differential von u.

Umgekehrt gilt auch der Satz: Weiss man, dass y als Funktion von x eine bestimmte Ableitung hat, und ist $y = f(u)$, wobei die Funktion $f(u)$ in Bezug auf u die Ableitung $f'(u)$ besitzt, so ist auch u eine Funktion von x mit bestimmter Ableitung, und letztere ist aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = f'(u) \frac{du}{dx}$ zu berechnen.

Die Differentiation der expliciten algebraischen Funktionen.

22. Die Rechnung, durch welche man das Differential einer Funktion bestimmt, heisst die *Differentiation*. Die Regeln zur Differentiation von Funktionen bilden den Hauptgegenstand der Differentialrechnung. Wir werden zunächst die einfachen Fälle behandeln, bei denen die vorgelegte Funktion algebraisch zusammengesetzt ist aus einer oder aus mehreren Funktionen, deren Differentiale als bekannt angenommen werden.

23. Differentiation einer Summe. Wir betrachten die Funktion

$$y = \pm u \pm u_1 \pm u_2 \pm \dots \pm u_{m-1},$$

$u, u_1, u_2, \dots u_{m-1}$ sollen Funktionen der unabhängigen Variabelen x sein, deren Differentiale als bekannt angenommen werden. Der Variabelen x erteilen wir den Zuwachs Δx, und es seien

$$\Delta y, \Delta u, \Delta u_1, \ldots \Delta u_{m-1}$$

die entsprechenden Änderungen der Variabelen

$$y, u, u_1, \ldots u_{m-1}.$$

Es ist einleuchtend, dass die Gleichung besteht:

$$\Delta y = \pm \Delta u \pm \Delta u_1 \pm \ldots \pm \Delta u_{m-1},$$

also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta u_1}{\Delta x} \pm \ldots \pm \frac{\Delta u_{m-1}}{\Delta x}.$$

Geht man jetzt zu den Grenzen über, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{du}{dx} \pm \frac{du_1}{dx} \pm \ldots \pm \frac{du_{m-1}}{dx}$$

oder

$$dy = \pm du \pm du_1 \pm \ldots \pm du_{m-1},$$

wenn sämtliche Funktionen u bestimmte Ableitungen ergeben. Daraus folgt:

Das Differential einer algebraischen Summe von Funktionen ist gleich der Summe aus den Differentialen dieser Funktionen, falls diese überhaupt bestimmt sind.

24. Differentiation eines Produktes. 1. Ist

$$y = au$$

und a eine Konstante, u eine Funktion von x, so wird, wenn man das Wachstum von u und y mit Δu und Δy bezeichnet, während x um Δx sich ändert,

$$\Delta y = a \Delta u, \quad \text{also} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Geht man zu den Grenzen über, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad dy = a du.$$

Also:

Das Differential des Produktes aus einer Funktion und einer Konstanten ist gleich dem Produkte aus dem Differentiale dieser Funktion mit der Konstanten.

2. Betrachten wir das Produkt

$$y = u \,.\, v,$$

wobei u und v Funktionen von x sind. Bezeichnen dann wiederum $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ die Änderungen dieser Variabelen, so ist

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v,$$

also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x.$$

Geht man zu den Grenzen über, so verschwindet, wenn die Grenzen der Quotienten $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ bestimmte endliche Grössen sind, das letzte Glied, und man erhält

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \quad \text{oder} \quad dy = v\,du + u\,dv.$$

Das Differential eines Produktes zweier Funktionen ist gleich der Summe aus den Produkten, welche man erhält, indem man jede Funktion mit dem Differentiale der anderen multipliziert.

Umgekehrt folgt: Weiss man, dass das Produkt $y = uv$ und ebenso einer der Faktoren u oder v eine bestimmte Ableitung besitzt, so besitzt auch der andere v oder u eine bestimmte Ableitung, die aus der obigen Formel zu berechnen ist.

Dividiert man die Gleichung mit y oder uv, so folgt

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

Der Quotient des Differentiales einer Funktion und der Funktion selber heisst das *logarithmische Differential.* Die Formel sagt also aus:

Das logarithmische Differential eines Produktes aus zwei Faktoren ist gleich der Summe aus den logarithmischen Differentialen dieser Faktoren.

Diese Eigenschaft, welche analog ist einer Eigenschaft der Logarithmen, rechtfertigt den Namen logarithmisches Differential.

3. Wir betrachten endlich das Produkt aus einer beliebigen Anzahl von Funktionen der unabhängigen Variabelen x, es heisse

$$y = u_1 u_2 \ldots u_m.$$

Nach der Regel für die logarithmische Differentiation eines Produktes hat man

$$\frac{dy}{y} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{d(u_2 u_3 \dots u_m)}{u_2 u_3 \dots u_m}$$

$$= \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{d(u_3 \dots u_m)}{u_3 \dots u_m}$$

$$= \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{du_3}{u_3} + \dots \frac{d(\dots u_m)}{(\dots u_m)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Die letzte dieser Gleichungen, nämlich

$$\frac{dy}{y} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} \dots + \frac{du_m}{u_m}$$

besagt, *dass das logarithmische Differential eines Produktes von* m *Faktoren gleich der Summe aus den logarithmischen Differentialen seiner Faktoren ist.*

Um das Differential dy zu erhalten, genügt es diese Gleichung mit y zu multiplizieren; es wird

$$dy = u_2 \dots u_m du_1 + u_1 u_3 \dots u_m du_2 + \dots u_1 u_2 u_3 \dots u_{m-1} du_m.$$

Voraussetzung der Gültigkeit dieser Formel ist, dass die Ableitung der Funktionen u bestimmte Werte haben. Der Beweis ist ausserdem unter der Annahme geführt, dass keine dieser Funktionen u für die betrachteten Werte von x verschwindet. Es ist aber leicht zu sehen, dass die zuletzt gewonnene Gleichung von dieser letzteren Annahme unabhängig ist, da man dieselbe auch direkt aus der Gleichung $y = uv$, $dy = udv + vdu$ gewinnen kann.

25. Differentiation eines Quotienten. Sind u und v zwei Funktionen von x und betrachtet man den Quotienten

$$y = \frac{u}{v},$$

so hat man

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

für jeden Wert von x, für welchen nicht gerade $v = 0$ ist. Also wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v + \Delta v} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{u}{v(v + \Delta v)} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v} \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2},$$

oder

$$dy = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

wenn die Ableitungen der Funktionen u und v bestimmt sind. Dividiert man diese Gleichung durch $y = \frac{u}{v}$, so folgt:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v},$$

also:

Das logarithmische Differential eines Quotienten zweier Funktionen ist gleich dem logarithmischen Differentiale des Zählers, vermindert um das logarithmische Differential des Nenners.

Man erkennt auch umgekehrt: Weiss man, dass die Ableitung von y einen bestimmten Wert hat, und dass eine der Funktionen u oder v eine bestimmte Ableitung besitzt, so hat auch die andere v oder u eine bestimmte Ableitung, die aus der obigen Gleichung zu berechnen ist.

26. Differentiation der Potenzen einer Funktion. Es sei u eine Funktion von x und man betrachte die Potenz

$$1)\qquad y = u^m,$$

in welcher der Exponent m eine Konstante ist.

1. Ist m eine ganze positive Zahl, so ist y das Produkt von m gleichen Faktoren u, infolge dessen ist die Ableitung der Funktion y eine bestimmte Grösse, sobald die Ableitung von u bestimmt ist, und es wird

$$2)\qquad \frac{dy}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad dy = mu^{m-1}du \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} = m\frac{du}{u}.$$

2. Ist m ein positiver Bruch, mit dem Nenner i, so ist

$$y^i = u^{mi}.$$

Setzt man $z = y^i$, also $z = u^{mi}$, so ist $dz = miu^{mi-1}du$, sobald u eine bestimmte Ableitung besitzt. Aus der Gleichung $z = y^i$ folgt aber

$$dz = iy^{i-1}dy,$$

also ist:

$$iy^{i-1}dy = mi\,u^{mi-1}du \quad \text{oder} \quad y^{i-1}dy = mu^{mi-1}du.$$

Dividiert man durch y^i, so folgt

$$\frac{dy}{y} = m\frac{du}{u} \quad \text{oder} \quad dy = mu^{m-1}du,$$

also die frühere Formel.

3. Ist m eine ganze oder gebrochene negative Zahl, so hat man nach der Formel 1) für alle Werte von x, für welche u nicht gleich 0 ist,

$$yu^{-m} = 1.$$

Da das Produkt yu^{-m} konstant ist, so ist seine Ableitung 0; wenn also u und folglich auch u^{-m} eine bestimmte Ableitung besitzt, so besteht die Gleichung

$$dy\, u^{-m} - mu^{-m-1} y du = 0,$$

also:

$$dy = mu^{m-1} du \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} = m \frac{du}{u}.$$

Also ist die Formel

$$\frac{dy}{dx} = mu^{m-1} \frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad dy = mu^{m-1} du$$

allgemein gültig für jeden positiven oder negativen rationalen Exponenten. (Dass sie auch für irrationale Exponenten gilt, wird im § 39 gezeigt werden.) Die Regel lautet:

Das Differential einer Potenz von einer Funktion mit dem Exponenten m *ist gleich dem Produkte gebildet, aus dem Exponenten* m, *aus der* m—1[ten] *Potenz der Funktion und aus ihrem Differentiale.*

Reduziert sich die Funktion u auf die Variabele x, ist also $u = x$ und

$$y = x^m,$$

so wird

$$dy = mx^{m-1} dx \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

Für den Fall $m = \frac{1}{2}$ z. B. ergiebt die Formel

$$y = \sqrt{u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad dy = \frac{1}{2} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Anwendungen der bisherigen Regeln.

27. Eine explicite algebraische Funktion wird erhalten, indem man mit der Variabelen x und mit Konstanten algebraische Rechnungsoperationen in endlicher Anzahl ausführt.

Das Differential solch einer Funktion kann man daher immer vermittelst der bisherigen Regeln berechnen. Wir wollen hier einige Beispiele geben:

1. Ist
$$y = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \dots Lx^r,$$
wobei $A, B, C \dots$ bestimmte Konstante, und m, n, p rationale, ganze oder gebrochene Zahlen bedeuten, so erhält man unmittelbar durch Anwendung der Regeln für Summe, Produkt und Potenzen:
$$dy = (mAx^{m-1} + nBx^{n-1} + pCx^{p-1} + \dots rLx^{r-1})\,dx.$$

2. Ist
$$y = a + b\sqrt{x} + \frac{c}{\sqrt{x}} + \frac{e}{x},$$
wobei a, b, c, e Konstante sind, so kann man schreiben:
$$y = a + bx^{+\frac{1}{2}} + cx^{-\frac{1}{2}} + ex^{-1}.$$
und man hat
$$dy = \left[\frac{1}{2}\,bx^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\,cx^{-\frac{3}{2}} - ex^{-2}\right]dx,$$
oder
$$dy = \left(\frac{1}{2}\,\frac{b}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\,\frac{c}{x\sqrt{x}} - \frac{e}{x^2}\right)dx.$$

3. Ist
$$y = x^2\,(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}$$
und a eine Konstante, so ist
$$y = (a^2x^2 + x^4)\sqrt{a^2 - x^2},$$
folglich:
$$dy = \sqrt{a^2 - x^2}\,d(a^2x^2 + x^4) + (a^2x^2 + x^4)\,d\sqrt{a^2 - x^2}$$
$$= \sqrt{a^2 - x^2}\,(2a^2x + 4x^3)\,dx + (a^2x^2 + x^4)\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,d(a^2 - x^2)$$
$$= \sqrt{a^2 - x^2}\,(2a^2x + 4x^3)\,dx - (a^2x^2 + x^4)\,\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$
oder
$$dy = \frac{(2a^4x + a^2x^3 - 5x^4)\,x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

4. Ist

$$y = (a x^m + b)^n$$

und sind a, b, m, n konstante Grössen, so wird

$$dy = n(a x^m + b)^{n-1} d(a x^m + b),$$

also:

$$dy = m n a x^{m-1} (a x^m + b)^{n-1} dx.$$

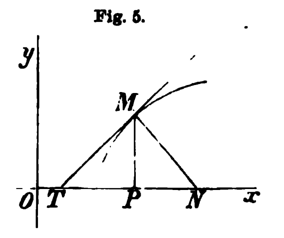
Anwendung auf einige einfache Aufgaben.

28. Die bisherigen Regeln reichen zur Lösung mehrerer Aufgaben bereits aus; es wird nützlich sein, hiervon einige Beispiele zu geben. Wir entnehmen dieselben der Geometrie und müssen zunächst einige in der Kurventheorie gebräuchliche Benennungen einführen. Ist eine Kurve auf zwei geradlinige Koordinatenaxen bezogen, und konstruiert man in einem Punkte die Tangente und die Normale, so heissen die Strecken auf diesen Geraden, welche zwischen dem Kurvenpunkte und der Abscissenaxe liegen, die *Länge der Tangente* und die *Länge der Normale*, während die Projektionen dieser Strecken auf die Abscissenaxe die Namen *Subtangente* und *Subnormale* haben.

29. Aufgabe I. *Es soll die Kurve bestimmt werden, für welche im rechtwinkligen Koordinatensysteme die Subnormale gleich einer gegebenen Konstanten* p *ist.*

Sind x und y die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes M der gesuchten Kurve, so ist y als stetige Funktion von x zu betrachten, und diese Funktion ist zu bestimmen. Es werde die Ordinate MP des Punktes M und die Normale MN konstruiert, dann ist die Subnormale PN gleich der Ordinate $MP = y$, multipliziert mit Tangente des Winkels PMN. Dieser Winkel ist aber gleich dem Winkel MTx, welchen die Tangente des Punktes M mit der Abscissenaxe bildet; also ist sein tangens gleich $\frac{dy}{dx}$.

Fig. 5.



Die Bedingung der Aufgabe ist also ausgedrückt durch die Gleichung

$$y\frac{dy}{dx} = p,$$

oder

$$2y\,dy = 2p\,dx.$$

Das erste Glied derselben ist das Differential von y^2 (nach § 21); das zweite Glied ist das Differential von $2px$. Wir haben also zwei Funktionen von x, nämlich y^2 und $2px$, welche gleiche Differentiale, oder was auf dasselbe hinauskommt, gleiche Ableitungen haben. Diese Funktionen können sich also nur (§ 15) um eine Konstante unterscheiden, und man hat:

$$y^2 = 2px + C,$$

wobei C eine willkürliche Konstante ist. Die Parabeln mit dem Parameter p, deren Axe mit der Geraden zusammenfällt, auf welcher man die Subnormale konstruiert, sind also die einzigen Kurven, welche der gestellten Aufgabe entsprechen.

30. Aufgabe II. *Es soll die Kurve bestimmt werden, deren Normale gleich einer gegebenen Konstante* a *ist.*

Man sieht aus der vorigen Figur, dass das Quadrat der Normalen gleich ist dem Quadrate der Subnormalen $y\frac{dy}{dx}$, vermehrt um das Quadrat der Ordinate; man hat also die Bedingung:

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a^2.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man $y = \pm a$ setzt; denn hieraus folgt $\frac{dy}{dx} = 0$. Die beiden Geraden, welche parallel zur Abscissenaxe in der Entfernung a von dieser Axe laufen, bilden also eine Lösung des Problemes. Abgesehen von dieser Lösung, folgt aus der obigen Gleichung:

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel sowohl positiv, wie negativ sein kann. Die rechte Seite dieser Gleichung ist das Differential von $-\sqrt{a^2 - y^2}$, folglich drückt diese Gleichung aus, dass die Funktionen

$$x \text{ und } -\sqrt{a^2 - y^2}$$

dasselbe Differential haben. Demnach können sich diese Funktionen nur um eine Konstante α unterscheiden, und man hat

$$x - \alpha = -\sqrt{a^2 - y^2},$$
$$(x - \alpha)^2 + y^2 = a^2.$$

Die Kreise mit dem Radius a, deren Mittelpunkte auf der Abscissenaxe liegen, sind die Lösungen der Aufgabe.

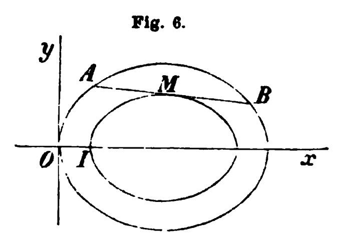
31. Aufgabe III. *Es ist ein Kegelschnitt* OAB *gegeben. Man soll eine Kurve* IM *so bestimmen, dass jede Sehne* AB *des Kegelschnittes, welche zugleich die Kurve* IM *berührt, durch den Berührungspunkt* M *in zwei gleiche Teile geteilt wird.*

Sei $Y^2 = 2pX + qX^2$ die Gleichung des gegebenen Kegelschnittes, und

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

die Gleichung der Tangente im Punkte $M\ (x, y)$ der unbekannten Kurve. Eliminiert man Y zwischen diesen beiden Gleichungen, so wird:

Fig. 6.



$$\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - q\right]X^2 + 2\left[y\frac{dy}{dx} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - p\right]X + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Die halbe Summe der beiden Wurzeln X dieser Gleichung ist:

$$\frac{p - y\dfrac{dy}{dx} + x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - q}.$$

Nach der Bedingung dieser Aufgabe soll diese halbe Summe gleich der Abscisse x des Berührungspunktes M sein. Man hat also

$$p + qx - y\frac{dy}{dx} = 0,$$

oder:

$$2y\,dy = 2p\,dx + 2qx\,dx.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist das Differential von $2px + qx^2$, die linke das Differential von y^2. Diese beiden

Funktionen unterscheiden sich also nur um eine Konstante, d. h. es ist

$$y^2 = 2px + qx^2 + C$$

die allgemeine Gleichung der gesuchten Kurve. Diese Kurven sind Kegelschnitte, welche zu dem gegebenen ähnlich und ähnlich liegend sind.

Satz für die Differentiation von Funktionen, welche aus mehreren Funktionen einer unabhängigen Variabelen zusammengesetzt sind.

32. Die Resultate, welche wir oben gefunden haben, sind in einem allgemeinen Satze enthalten, der sich auf die Differentiation einer Funktion bezieht, die aus mehreren zusammengesetzt ist.

Wenn u und v zwei Funktionen der unabhängigen Variabelen x sind, und

$$y = f(u, v)$$

eine Funktion von u und v bedeutet, so sagt man, y ist eine Funktion, welche aus den beiden Funktionen u und v zusammengesetzt ist.

Eine Funktion, welche von zwei Variabelen u und v abhängt, mögen nun dieselben wie hier angenommen selbst Funktionen einer dritten, oder auch ganz unabhängig von einander sein, heisst an einer Stelle u, v stetig, wenn man zu jeder noch so kleinen Zahl δ zwei Werte h und k ausfindig machen kann, so dass der Betrag der Differenz

$$[f(u + h, v + k) - f(u, v)] < \delta$$

wird, und kleiner als δ bleibt, wenn man h und k nun noch beliebig verkleinert. Für eine stetige Funktion ist also

$$\lim_{h=0, k=0} [f(u + h, v + k) - f(u, v)] = 0,$$

wie auch immer die Grössen h und k nach 0 konvergieren, oder, was dasselbe besagt, unendlich klein werden mögen.

Dies vorausgeschickt bilden wir nun

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)$$
$$= [f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)] + [f(u, v + \Delta v) - f(u, v],$$

also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$+ \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Der Grenzwert, welchen der Quotient

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u}$$

erhält, wenn man Δu nach 0 konvergieren lässt, während man Δv ungeändert lässt, wird als die Ableitung der Funktion in Bezug auf die Variabele u zu bezeichnen sein. Diese Ableitung wird eine Funktion von u sein und ausserdem von dem Werte $v + \Delta v$ abhängen. Wir bezeichnen sie mit $\varphi(u, v + \Delta v)$, und nehmen erstlich an, dass sie eine stetige Funktion von u ist. Alsdann ist aber nach dem Satze des § 14

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} = \varphi(u + \theta \Delta u, v + \Delta v).$$

Ebenso wird die Grenze des Quotienten

$$\frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}$$

als Ableitung der Funktion $f(u, v)$ nach v zu bezeichnen sein; wir nennen sie $\psi(u, v)$. Aus der Gleichung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(u + \theta \Delta u, v + \Delta v) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

folgt nun: Wenn die Funktionen u und v bestimmte Ableitungen besitzen, wenn ferner die Ableitung der Funktion $f(u, v)$ nach der einen Variabelen u eine bestimmte stetige Funktion der beiden Variabelen u und v ist, und wenn die Ableitung nach der andern Variabelen v einen bestimmten Wert hat, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(u, v) \frac{du}{dx} + \psi(u, v) \frac{dv}{dx}.$$

Denn lässt man Δx nach 0 konvergieren, so konvergieren auch Δu und Δv nach 0, und es wird, wenn φ eine stetige Funktion der beiden Variabelen ist, $\lim \varphi(u + \theta \Delta u, v + \Delta v) = \varphi(u, v)$, während der Quotient, welcher auf der rechten Seite der obigen Gleichung steht, die Grenze $\psi(u, v)$ hat.

Umgekehrt folgt auch: Weiss man, dass die Funktion y eine bestimmte Ableitung hat, dass ferner die Ableitungen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ den genannten Bedingungen genügen, so folgt aus der Existenz der Ableitung für die eine Funktion u oder v auch die Existenz der Ableitung für die andere und letztere ist aus der entwickelten Gleichung berechenbar.

Wenn eine Funktion y von den beiden willkürlichen Variabelen u und v abhängt, so bezeichnet man mit den Symbolen $\partial_u y$ und $\partial_v y$ die Differentiale dieser Funktion, welche man erhält, indem man nur eine der Grössen u oder v variiert; die Ableitungen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ sind also bezüglich gleich den beiden Quotienten $\frac{\partial_u y}{\partial u}$ und $\frac{\partial_v y}{\partial v}$. Man lässt gewöhnlich die Indices in den beiden Zählern fort; jedoch darf man dabei nicht ausser Acht lassen, dass die Zähler ∂y in beiden Quotienten etwas verschiedenes bedeuten, was übrigens durch die Nenner ohne irgend welche Unbestimmtheit ausgedrückt ist. Das Differential der Funktion y, als Funktion von x betrachtet, ist also

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

oder

$$dy = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} dv.$$

Man bezeichnet die beiden Ableitungen auch mit $f'_u(u, v)$, $f'_v(u, v)$; also ist

$$dy = f'_u(u, v)\, du + f'_v(u, v)\, dv.$$

33. Das erhaltene Resultat kann leicht verallgemeinert werden. Seien $u, v, w, s \ldots$ Funktionen der unabhängigen Variabelen x, und

$$y = f(u, v, w, s \ldots)$$

eine aus ihnen zusammengesetzte Funktion. Ersetzen wir dieselben mit Ausnahme der ersten durch ihre Werte in x, so hat man y ausgedrückt in u und x. Man kann also die Formel des vorigen Paragraphen anwenden und erhält

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + d'y,$$

wobei $d'y$ das Differential von y bedeutet, gebildet indem u als Konstante betrachtet wird. Man hat dann ebenso

$$d'y = \frac{\partial y}{\partial v} dv + d''y,$$

wobei $d''y$ das Differential von y ist, wenn u und v als konstant angesehen werden. Ferner ist

$$d''y = \frac{\partial y}{\partial w} dw + d'''y;$$

$d'''y$ ist das Differential von y, wenn u, v und w als Konstante gelten. Es ist leicht zu sehen, dass man, indem man die erhaltenen Gleichungen verbindet, die Gleichung gewinnt:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw + \frac{\partial y}{ds} ds + \ldots,$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \ldots$$

und man kann den Satz aussprechen:

Das Differential einer Funktion, welche aus mehreren Funktionen zusammengesetzt ist, ist gleich der Summe aus den Differentialen, welche man erhält, indem man nach einander jede der zusammensetzenden Funktionen als die einzige Variabele ansieht.

Prüft man nochmals die Voraussetzungen, unter denen dieser allgemeine Satz bewiesen wurde, so erkennt man folgendes: Erstens müssen die Funktionen $u, v, w, s \ldots$ bestimmte Ableitungen besitzen, zweitens muss auch die Funktion $f(u, v, w, s \ldots)$ bestimmte Ableitungen nach $u, v \ldots$ u. s. w. haben, und es muss $\frac{\partial f}{\partial u}$ eine stetige Funktion aller Variabelen $u, v, w \ldots$ sein; ferner $\frac{\partial f}{\partial v}$ eine stetige Funktion der Variabelen $v, w \ldots$, $\frac{\partial f}{\partial w}$ eine stetige Funktion der Variabelen $w \ldots$ Von der Ableitung in Bezug auf die letzte Variabele braucht bloss bekannt zu sein, dass sie einen bestimmten Wert hat.

34. Anwendungen:

1. Ist $y = Au + Bv + Cw \ldots$ und sind $A, B, C \ldots$ Konstante, so werden die Ableitungen $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w} \ldots$ bezüglich gleich $A, B, C \ldots$; es ist also

$$dy = Adu + Bdv + Cdw + \ldots$$

2. Ist $y = uvws\ldots$, so sind die Ableitungen $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w}$ bezüglich gleich

$$vws\ldots,\; uws\ldots,\; uvs\ldots,$$

man hat also:

$$dy = (vws\ldots)\,du + (uws\ldots)\,dv + (uvs\ldots)\,dw + \ldots,$$

wie schon im § 24 gefunden wurde. Diese Formel führt, wie im § 26 gezeigt ist, zur Regel für die Differentiation von Potenzen.

3. Ist

$$y = \frac{u}{v} = uv^{-1},$$

so hat man (wenn v nicht gleich 0 ist),

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v^{-1}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -uv^{-2},$$

also:

$$dy = v^{-1}du - uv^{-2}dv \quad \text{oder} \quad dy = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Folgerung aus dem vorigen Satze.

35. Jede explicite Funktion y der Variabelen x wird erhalten, indem man mit dieser Variabelen bestimmte Rechnungsoperationen in bestimmter Reihenfolge ausführt. Die Zahl dieser Operationen wird als begrenzt vorausgesetzt; ist sie grösser als 1, so ist die letzte Operation an einer oder an mehreren Funktionen $u, v, w\ldots$ auszuführen, welche vorher gebildet sind. So erhält man:

$$y = f(u, v, w\ldots).$$

Der vorige Lehrsatz nun führt die Differentiation von y auf die Differentiation der einfacheren Funktionen $u, v, w\ldots$ und auf die durch das Symbol f dargestellten Funktionen von u, von v, von $w\ldots$ u. s. w. zurück. Werden die Funktionen $u, v, w\ldots$ nicht durch eine einzige Operation aus x berechnet, so kann man auf sie dasselbe anwenden, was von y gesagt wurde, und so fort. Demnach reduziert sich die Differentiation von y immer auf die Bestimmung von Differentialen *elementarer Funktionen*, welche man nicht auf einfachere zurückführen

kann. Die elementaren oder irreduciblen Funktionen, mit denen wir uns hier zu beschäftigen haben, sind:

1. Die Funktionen, welche aus einer einzigen algebraischen Operation hervorgehen: nämlich $a \pm x$, ax, x^m.

2. Die Exponentialfunktion a^x und die Funktion Logarithmus: $\log x$.

3. Die Kreisfunktionen.

In Bezug auf die algebraischen Funktionen ist hier dem bereits gesagten (§ 27) nichts hinzuzufügen, und wir werden nun die verschiedenen elementaren transscendenten Funktionen betrachten.

Differentiation der Logarithmen und der Exponentialfunktionen.

36. Wenn zwei Variabele von einander abhängen, und man stellt jede von ihnen als Funktion der andern dar, so erhält man zwei Funktionen, von denen jede die *Inverse der andern* heisst. Dieser Art sind die beiden Funktionen, welche wir nun untersuchen werden. Allgemein, wenn man die Ableitung oder das Differential einer Funktion kennt, so kann man hieraus auch die Ableitung oder das Differential der inversen Funktion berechnen. In der That, nehmen wir an, dass die beiden Variabelen x und y unter einander durch eine Gleichung verbunden sind, welche sowohl die Form

$$y = f(x) \text{ als auch die Form } x = F(y)$$

annehmen kann, so folgt aus der ersten Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ und aus der zweiten: } 1 = F'(y)\frac{dy}{dx}, \text{ (§ 21)},$$

also ist

$$1 = F'(y)\, f'(x).$$

Die Voraussetzungen, unter welchen diese Gleichung bewiesen ist, sind nach dem früheren die folgenden: Es muss y eine stetige Funktion von x sein, welche eine bestimmte Ableitung hat, und es muss auch umgekehrt x eine stetige Funktion von y sein mit einer bestimmten Ableitung $F'(y)$; letzteres ist aber eine notwendige Folge der ersten Voraussetzung für alle Werte von x, für welche nicht gerade $\frac{dy}{dx} = 0$ ist.

37. Bestimmung der Grenze von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, wenn m unendlich wird. Die Bestimmung dieser Grenze ist unerlässlich für die Aufgaben, die wir uns gestellt haben. Wir nehmen zunächst an, dass die Zahl m nach einem positiven unendlich grossen Werte konvergiert, indem sie nur die Werte der ganzen Zahlen durchläuft. Alsdann hat man nach der Binomialformel in Bezug auf einen ganzzahligen positiven Exponenten:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{m^3} + \dots + \left(\frac{1}{m}\right)^m.$$

Ist nun n irgend eine ganze Zahl kleiner als m, und bezeichnet man mit R_n die Summe aller Glieder, welche auf das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied folgen, so kann man schreiben:

$$1)\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \dots \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\,..\,n} + R_n,$$

wobei der Wert von R_n gleich wird:

$$R_n = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2\dots n} \times\left[\frac{1-\frac{n}{m}}{n+1} + \frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{(n+1)(n+2)} + \dots \frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{(n+1)(n+2)\dots m}\right].$$

In der zwischen der Klammer enthaltenen Summe ist die Zahl der Glieder gleich $m-n$, und diese Glieder sind kleiner als die entsprechenden der unbegrenzten geometrischen Progression

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots$$

Die Summe dieser Reihe, d. h. die Grenze, welcher sich die Summe beliebig nähert, je mehr Glieder man summiert, ist $\frac{1}{n}$; folglich kann der Faktor zwischen den Klammern mit $\frac{\theta}{n}$ bezeichnet werden, wenn θ einen Bruch zwischen 0 und 1 bedeutet. Man hat also, wie gross auch immer m gewählt sein mag:

$$2)\qquad R_n = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\,.\,2\ldots n}\cdot\frac{\theta}{n}.$$

Die Zahl n kann als unveränderlich angesehen werden; wir lassen nun m beliebig wachsen und bezeichnen mit $\mathfrak{R}_n$ die Grenze von R_n, mit ϑ die Grenze von Θ, so erhalten wir:

$$3)\quad \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\ldots\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}+\mathfrak{R}_n,$$

und nach Formel 2) ist

$$4)\qquad \mathfrak{R}_n = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\cdot\frac{\vartheta}{n}.$$

ϑ ist eine Grösse, von der nur bekannt ist, dass sie nicht grösser als 1 und nicht kleiner als 0 ist.

Die Zahl n kann willkürlich gewählt werden, und wenn man annimmt, dass sie ins unendliche wächst, so konvergiert $\mathfrak{R}_n$ nach 0. Es folgt hieraus, dass, je mehr Glieder der Summe

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}+\ldots$$

addiert werden, um so genauer eine bestimmte Grenze erreicht wird. Denn durch Addition beliebig vieler Glieder erhält man Werte, die immer mehr wachsen, und die doch kleiner sind als der Wert

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\,\frac{1}{n}.$$

Diese bestimmte Grenze bezeichnet man mit dem Buchstaben e; es ist also

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$$

wenn man

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

setzt. Bricht man die Reihe mit dem Gliede ab, welches n im Nenner enthält, so ist der Fehler, d. h. die Abweichung vom vollständigen Werte, gleich der Grösse $\mathfrak{R}_n$, die man den *Rest der Reihe* nennt. Dieser Rest ist kleiner als der n^{te} Teil des $n+1$. Gliedes, mit dem man die Summation abgebrochen hat. Dies gestattet den numerischen Wert der Zahl e mit einer beliebig grossen Annäherung zu berechnen. Man findet:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ldots$$

38. Nehmen wir ferner an, m wird positiv unendlich, indem es alle Grössenwerte durchläuft, und bezeichnen wir mit μ die ganze Zahl, welche dem Werte m jedesmal am nächsten liegt und kleiner ist als m. Man hat alsdann:

$$\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1},$$

oder

$$\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1} : \left(1+\frac{1}{\mu+1}\right) < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right).$$

Wenn nun m ins unendliche wächst, so wird auch die ganze Zahl μ unendlich. Nun wird

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} = \lim\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1} = e,$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right) = \lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right) = 1.$$

Mithin ist die Grösse $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ zwischen zwei Variabelen eingeschlossen, welche beide die Grenze e haben; man hat folglich

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e.$$

Nimmt man endlich an, dass m negativ unendlich wird, und setzt man $m = -\mu$, so hat man:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = \left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{\mu} = \left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu},$$

also

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = \left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}.\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right).$$

Konvergiert m nach $-\infty$ (minus unendlich), so konvergiert $\mu - 1$ nach $+\infty$ (plus unendlich), und man hat

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}=e,\quad \lim\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)=1;$$

also ist auch in diesem Falle

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=e.$$

39. Differential der Funktion $\log x$. Die Basis der Logarithmen sei hier irgend eine feste positive Zahl a; die Variabele x kann alle positiven Werte annehmen. Erteilt man der Variabelen x den Zuwachs Δx, so wird

$$\Delta \log x = \log(x+\Delta x) - \log x = \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

also

$$\frac{\Delta \log x}{\Delta x} = \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Setzt man $\frac{x}{\Delta x} = m$ oder $\Delta x = \frac{x}{m}$, so folgt:

$$\frac{\Delta \log x}{\Delta x} = \frac{m}{x}\log\left(1+\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.$$

Wenn nun Δx nach 0 konvergiert, so konvergiert m nach unendlich, für jeden von 0 verschiedenen Wert von x; der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ hat die Grenze e, und also ist

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}\log e \quad \text{oder} \quad d\log x = \log e\cdot\frac{dx}{x}.$$

Sind die Logarithmen in Bezug auf die Basis e gebildet, so hat man das sogenannte Neper'sche oder natürliche System. Hier ist $\log e = 1$, also

$$d\log x = \frac{dx}{x}.$$

Auch ist zu bemerken, dass nach dem Satze des § 21 diese Gleichung für das Differential $d\log x$ auch dann noch besteht, wenn x nicht selbst die unabhängige Variabele ist. Ferner sieht man, dass das logarithmische Differential (§ 24) einer Funktion, welche durchaus positive Werte hat, nichts anderes

ist, als das Differential des natürlichen Logarithmus dieser Funktion.

Eine Anwendung dieser Formel machen wir auf den Fall der Potenz $y = x^\mu$ mit beliebigem irrationalem Exponenten. Bildet man für positive Werte von x, $\log y = \mu \log x$, so folgt nach § 21: $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{x}$, also $\frac{dy}{dx} = \mu x^{\mu-1}$, oder $dy = \mu x^{\mu-1} dx$; demnach gilt auch für irrationale Exponenten die frühere Regel.

40. Differential der Funktion a^x. Die Basis a ist als eine positive Konstante zu denken. Es wird

$$\Delta a^x = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1),$$

also:

$$\frac{\Delta a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Setzt man $a^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{m}$, oder $a^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{m}$, so erhält man, indem man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt:

$$\Delta x \log a = \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad \text{oder} \quad \Delta x = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\log a},$$

folglich:

$$\frac{\Delta a^x}{\Delta x} = a^x \frac{\log a}{m \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = a^x \frac{\log a}{\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}.$$

Lässt man Δx nach 0 konvergieren, so wird m unendlich; $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ wird gleich e und demnach

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \frac{\log a}{\log e}.$$

Die Basis der Logarithmen ist willkürlich. Wählt man das natürliche System, so ist $\log e = 1$ und demnach

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \log a, \quad da^x = a^x \log a \, dx.$$

Für den Fall $a = e$ gehen die Formeln über in:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x, \quad de^x = e^x \, dx.$$

Die Funktion e^x hat also die Eigenschaft, dass die Ableitung mit der Funktion identisch ist.

Es ist kaum nötig hinzuzufügen, dass diese Resultate auch dann noch bestehen, wenn x nicht mehr die unabhängige Variabele ist.

41. Wir haben die Bestimmung der Differentiale von $\log x$ und a^x direkt ausgeführt. Sobald aber das Differential von einer dieser Funktionen bekannt ist, so kann man, wie wir schon sagten, unmittelbar hieraus das Differential der anderen berechnen. Denn setzen wir

$$y = a^x,$$

so haben wir, indem wir die Logarithmen mit der Basis a von beiden Seiten nehmen:

$$\log y = x.$$

Wenn man nun als bekannt voraussetzt, dass das Differential von $\log y$ gleich ist $\log e \frac{dy}{y}$, so hat man

$$\log e \frac{dy}{y} = dx,$$

oder

$$da^x = \frac{a^x\, dx}{\log e}.$$

Da $\log a = 1$, so kann man auch schreiben

$$da^x = \frac{\log a}{\log e}\, a^x\, dx,$$

und nun kann man auch die Basis des Logarithmensystems willkürlich wählen, da der Wert des Quotienten sich dabei nicht ändert. Wählt man insbesonders e zur Basis, so hat man $da^x = a^x \log a\, dx$, wie schon auf direktem Wege gefunden wurde.

42. Anwendungen.

1. Es sei

$$y = \log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Die Basis des Logarithmus sei die Zahl e; solche Logarithmen pflegt man mit dem Zeichen log nat oder kurz mit l zu schreiben. Man kann setzen

$$y = \frac{1}{2}\, l(1-x) - \frac{1}{2}\, l(1+x),$$

daher:

$$dy = \frac{1}{2}\frac{d(1-x)}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{d(1+x)}{1+x} = -\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{2},$$

oder:

$$dy = \frac{dx}{x^2-1}.$$

2. Ist

$$y = l(x + \sqrt{x^2+a})$$

und a eine Konstante, so hat man

$$dy = \frac{d(x+\sqrt{x^2+a})}{x+\sqrt{x^2+a}} = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}\,dx,$$

oder:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

3. Ist

$$y = u^v$$

und sind u und v gegebene Funktionen von x, so wird

$$l(y) = vl(u),$$

also:

$$dl(y) = vdl(u) + l(u)\,dv,$$

oder:

$$\frac{dy}{y} = v\frac{du}{u} + l(u)\,dv,$$

also:

$$dy = vu^{v-1}\,du + u^v\,l(u)\,dv.$$

Man hätte dasselbe Resultat auch so gewinnen können, dass man die Regel für die Differentiation zusammengesetzter Funktionen anwendet, in Verbindung mit der Regel für die Ableitung der Funktion a^x.

Setzt man $u = x$, $v = \frac{1}{x}$, so giebt die obige Formel

$$d(x^{\frac{1}{x}}) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - lx)\,dx.$$

Man erkennt, dass die Funktion $x^{\frac{1}{x}}$ wächst, solange x kleiner ist als e, denn die Ableitung ist positiv, und dass sie abnimmt, solange x grösser ist als e. Folglich erlangt diese Funktion ihr Maximum für $x = e$, und dieser Maximalwert ist $e^{\frac{1}{e}}$. Für negative Werte von x ist die Funktion überhaupt nicht definiert.

4. *In welchen Logarithmensystemen giebt es Zahlen, welche gleich ihren Logarithmen sind?*

Es handelt sich darum zu bestimmen, bei welchen Werten von a Grössen x sich bestimmen lassen, so dass die Funktion

$$y = a^x - x$$

den Wert 0 annimmt. Bezeichnet man mit l einen natürlichen Logarithmus, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = a^x l(a) - 1.$$

Ist a kleiner als 1, so ist die Funktion y eine durchaus abnehmende, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, da die Ableitung durchaus negativ ist. Andererseits hat sie für $x = -\infty$ den Wert $+\infty$, für $x = 0$, den Wert 1, für $x = +\infty$ den Wert $-\infty$. Sie wird also für einen positiven Wert von x gleich 0.

Ist a grösser als 1, so ist y eine abnehmende Funktion, solange

$$a^x l(a) - 1 < 1,$$

solange also x kleiner ist als der Wert x_1, für welchen

$$a^{x_1} l(a) = 1 \quad \text{oder} \quad x_1 l(a) + l(la) = 0,$$

d. h.

$$x_1 = -\frac{l(la)}{l(a)}.$$

Für grössere Werte von x ist die Funktion eine wachsende. Die Funktion hat also ein Minimum, welches zum Werte x_1 gehört, und dieser Minimalwert ist gleich

$$\frac{1}{l(a)} + \frac{l(la)}{l(a)}.$$

Ist dieses Minimum negativ, so wird die Funktion zweimal 0, ist es positiv, so wird die Funktion nicht 0; es muss also, damit y gleich 0 werden könne,

$$\frac{1}{l(a)} + \frac{ll(a)}{l(a)} < 0 \quad \text{d. h.} \quad 1 + l(l(a)) < 0 \text{ sein.}$$

Dies ergiebt:

$$l(la) < -1 \quad \text{oder} \quad l(a) < e^{-1}, \;\; a < e^{\frac{1}{e}}.$$

Ist $a = e^{\frac{1}{e}}$, so ist $x_1 = e$ und die Funktion wird für diesen einen Wert gleich 0.

Differentiation der Kreisfunktionen.

43. Differentiale der goniometrischen Funktionen. Dieselben sind:

$$\sin x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \sec x,$$
$$\cos x, \quad \operatorname{cotg} x, \quad \operatorname{cosec} x.$$

1. Wir betrachten zuerst die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$. Erteilt man der Variabelen x den Zuwachs Δx, so hat man

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\Delta \cos x = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

oder:

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta \cos x}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Das Verhältnis $\sin \frac{\Delta x}{2} : \frac{\Delta x}{2}$ konvergiert nach dem Werte 1, wenn Δx null wird.

Geht man also zu den Grenzen über, so wird

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x,$$

oder:

$$d \sin x = \cos x \, dx, \quad d \cos x = -\sin x \, dx.$$

Die Kreisfunktionen sind im Unterschiede von den bisher betrachteten zunächst nicht numerisch, sondern geometrisch definiert. In der Trigonometrie aber wird schon gelehrt, wie man zu jedem Winkel eines Kreises den numerischen Wert der Funktionen sin, $\cos x$ etc. mit beliebiger Annäherung berechnen kann. Auch zeigt die geometrische Anschauung, dass diese Funktionen stetige Funktionen der Variabelen x sind, mit Ausnahme der Stellen, wo sie unendlich werden, wie das bei tang, cotg ... eintritt. Ein direkter Beweis der Stetigkeit ergiebt sich aus dem Umstande, dass der sinus eines Winkels gleich 0 wird, wenn die Grösse des Winkels nach 0 konvergiert.

Die Zahl x, durch welche die Grösse des Winkels gemessen wird, ist hierbei als absolute Zahl gedacht; sie ist die Längenzahl des zum Winkel gehörigen Bogens, gemessen auf einem Kreise mit dem Radius 1. Die volle Umdrehung, der Winkel von 360^0, erhält dabei den Zahlenwert 2π, und jeder Winkel, dessen Gradzahl a ist, den numerischen Wert

$$x = 2\pi \cdot \frac{a}{360}.$$

Der Satz, dass $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$ wird, lässt sich geometrisch wie folgt beweisen: konstruiert man in einem Kreise mit dem Radius 1 den Winkel $2x$, so ist der zu diesem Winkel gehörige Sektor seinem Inhalte nach grösser als das gleichschenklige Dreieck, welches durch die Radien und die zum Winkel gehörige Sehne begrenzt ist, dagegen kleiner als das gleichschenklige Dreieck, welches durch die Tangente, die zur Mitte des Bogens gehört und durch die Abschnitte, welche dieselben auf den verlängerten Radien bildet, bestimmt wird; d. h. es ist

$$\cos x \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Lässt man x nach 0 konvergieren, so wird $\lim \cos x$ und $\lim \frac{1}{\cos x} = 1$, also muss auch

$$\lim \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim \frac{\sin x}{x} = 1$$

sein.

2. Betrachtet man zweitens die Funktionen $\operatorname{tang} x$ und $\operatorname{cotg} x$. Man erhält

$$\begin{aligned}\Delta \operatorname{tang} x &= \operatorname{tang}(x + \Delta x) - \operatorname{tang} x \\ &= [1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang}(x + \Delta x)] \operatorname{tang} \Delta x, \\ \Delta \operatorname{cotg} x &= \operatorname{cotg}(x + \Delta x) - \operatorname{cotg} x \\ &= -[1 + \operatorname{cotg} x \operatorname{cotg}(x + \Delta x)] \operatorname{tang} \Delta x.\end{aligned}$$

Daher

$$\frac{\Delta \operatorname{tang} x}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tang} \Delta x}{\Delta x} [1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang}(x + \Delta x)],$$

$$\frac{\Delta \operatorname{cotg} x}{\Delta x} = -\frac{\operatorname{tang} \Delta x}{\Delta x} [1 + \operatorname{cotg} x \operatorname{cotg}(x + \Delta x)].$$

Beim Übergang zu den Grenzen wird

$$\frac{\operatorname{tang} \Delta x}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} : \cos \Delta x \text{ gleich } 1,$$

und man hat:

$$\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = 1 + \operatorname{tang}^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d \operatorname{cotg} x}{dx} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = -\operatorname{cosec}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

oder

$$d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d \operatorname{cotg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Da die Funktionen tang und cotg gleich den Quotienten

$$\frac{\sin x}{\cos x} \text{ und } \frac{\cos x}{\sin x}$$

sind, so kann man ihre Differentiale auch vermittelst der Regel für die Differentiation eines Quotienten mit den Differentialen von sin und cos ableiten, z. B.

$$d \operatorname{tang} x = \frac{\cos x \, d \sin x - \sin x \, d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

3. Für die Funktionen $\sec x$ und $\operatorname{cosec} x$ hat man:

$$\sec x = (\cos x)^{-1}, \quad \operatorname{cosec} x = (\sin x)^{-1}.$$

Nach der Regel für die Differentiation von Potenzen erhält man:

$$d \sec x = -(\cos x)^{-2} \, d(\cos x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tang} x \sec x \, dx,$$

$$d \operatorname{cosec} x = -(\sin x)^{-2} \, d(\sin x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x \, dx.$$

Die erhaltenen Formeln zusammengestellt ergeben:

$$d \sin x = \cos x \, dx, \quad d \cos x = -\sin x \, dx,$$

$$d \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cos^2 x} dx, \quad d \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\sin^2 x} dx,$$

$$d \sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx, \quad d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx.$$

Diese sechs Formeln bleiben auch bestehen, wenn x nicht die unabhängige Variabele ist; und man kann bemerken, dass die drei in zweiter Kolonne stehenden Formeln erhalten

werden, indem man die drei ersten mit der Variabelen $\frac{\pi}{2} - x$ bildet. Denn es wird:

$$d \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = d \cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = -\sin x \, dx,$$

$$d \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = d \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx = -\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) dx,$$

$$d \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = d \operatorname{cosec} x = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx = -\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx.$$

44. Anwendungen. Verbindet man die vorstehenden Regeln mit der Regel für Differentiation der Logarithmen, so erhält man unmittelbar die Differentiale der Funktionen

$$\log \sin x, \quad \log \cos x, \quad \log \operatorname{tang} x.$$

Es wird:

$$dl(\sin x) = \frac{d \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} dx = \operatorname{cotg} x \, dx,$$

$$dl(\cos x) = \frac{d \cos x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} dx = -\operatorname{tang} x \, dx,$$

$$dl(\operatorname{tang} x) = \frac{d \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x} = \frac{dx}{\operatorname{tang} x \cos^2 x} = \frac{2\,dx}{\sin 2x}.$$

Wenn man in der letzten Formel x und dx durch $\frac{x}{2}$ und $\frac{dx}{2}$, sodann durch $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$ und $\frac{dx}{2}$ ersetzt, so erhält man:

$$dl\left(\operatorname{tang} \frac{x}{2}\right) = \frac{dx}{\sin x},$$

$$dl\left[\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{dx}{\cos x}.$$

45. Differentiale der inversen Kreisfunktionen oder der cyklometrischen. Die unabhängige Variabele werde wiederum mit x bezeichnet; die inversen Kreisfunktionen sind:

$$\operatorname{arc} \sin x, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tang} x, \quad \operatorname{arc} \sec x,$$
$$\operatorname{arc} \cos x, \quad \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x, \quad \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x,$$

($\operatorname{arc} \sin x$ bedeutet den Bogen, dessen Sinus den Wert x hat, u. s. w.); da aber die trigonometrischen Linien, wenn ihre

Länge x gegeben ist, zu unendlich vielen verschiedenen Bogen gehören können, so sind die vorstehenden Ausdrücke nicht vollkommen bestimmt; damit sie also als Funktionen von x betrachtet werden können, muss ihre Definition noch genauer beschränkt werden. Wenn der Bogen eines Kreises stetig zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ variiert, so ändert sich auch jede dieser Linien, abgesehen von den Unendlichkeitsstellen, stetig. Demnach vervollständigt man die Definition der Kreisfunktionen, wenn man sie der Bestimmung unterwirft, dass sie sich stetig ändern, und wenn man dabei die Werte fixiert, welche sie bei *einem* gegebenen Werte der Variabelen annehmen sollen. So sind z. B. die Funktionen $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$ vollkommen definiert, wenn man ihnen die Bedingung auferlegt, dass sie für $x = 0$ null sind und dass sie stetig mit x sich ändern. Bei der ersten Funktion kann man dann dem x alle Werte von 0 bis -1, und von 0 bis $+1$ beilegen, bei der zweiten alle Werte von 0 bis $-\infty$ und 0 bis $+\infty$.

Die Differentiation der inversen Kreisfunktionen lässt sich unmittelbar auf die der direkten goniometrischen zurückführen (§ 36).

1. Ist
$$y = \operatorname{arc}\sin x \quad \text{oder} \quad \sin y = x,$$
so hat man
$$\cos y\, dy = dx \quad \text{oder} \quad dy = \frac{dx}{\cos y},$$
mit Ausnahme des Wertes y, für welchen $\cos y = 0$ ist, d. h. der Werte $x = \pm 1$.

Es ist
$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{also} \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel bestimmt sich durch das Zeichen von $\cos y$.

2. Ist
$$y = \operatorname{arc}\cos x \quad \text{oder} \quad \cos y = x,$$
so wird:
$$-\sin y\, dy = dx, \quad dy = -\frac{dx}{\sin y} = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist dasselbe wie bei $\sin y$.

3. Ist
$$y = \operatorname{arc}\operatorname{tang} x \quad \text{oder} \quad \operatorname{tang} y = x,$$
so wird:
$$\frac{dy}{\cos^2 y} = dx, \quad dy = \cos^2 y\, dx = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Besondere Werte sind hier nur diejenigen, für welche $x = \pm \infty$.

4. Ist
$$y = \operatorname{arc\,cotg} x \quad \text{oder} \quad x = \operatorname{cotg} y,$$
so wird
$$-\frac{dy}{\sin^2 y} = dx, \quad dy = -\sin^2 y\, dx = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

5. Ist
$$y = \operatorname{arc\,sec} x \quad \text{oder} \quad \sec y = x,$$
so wird
$$\operatorname{tang} y \sec y\, dy = dx, \quad dy = \frac{dx}{\operatorname{tang} y \sec y} = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist dasselbe wie bei $\operatorname{tang} y$, und nur der Punkt $x = \pm 1$ ist ein besonderer. Das Argument der Funktion $\operatorname{arc\,sec} x$ kann alle Werte von -1 bis $-\infty$, und $+1$ bis $+\infty$ annehmen.

6. Ist
$$y = \operatorname{arc\,cosec} x \quad \text{oder} \quad \operatorname{cosec} y = x,$$
so wird
$$-\operatorname{cotg} y \operatorname{cosec} y\, dy = dx,$$
oder
$$dy = -\frac{dx}{\operatorname{cotg} y \operatorname{cosec} y} = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Die Quadratwurzel hat dasselbe Zeichen wie $\operatorname{cotg} y$.

So hat man zusammengefasst:
$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$d \operatorname{arc\,tang} x = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad d \operatorname{arc\,cotg} x = -\frac{dx}{1+x^2},$$
$$d \operatorname{arc\,sec} x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \qquad d \operatorname{arc\,cosec} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Die Vorzeichen der Quadratwurzel sind, wie wir eben zeigten, bestimmte. Es ist zu bemerken, dass die Differentiale der cyklometrischen Funktionen algebraisch sind, ebenso wie das Differential von $\log x$.

Die Summe der Funktionen $\operatorname{arc\,tang} x$ und $\operatorname{arc\,cotg} x$ ist gleich einer Konstante, daher sind auch ihre Differentiale gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen. Die beiden Funktionen $\arcsin x$ und $\arccos x$, oder $\operatorname{arc\,sec} x$ und $\operatorname{arc\,cosec} x$

haben entweder eine konstante Summe oder eine konstante Differenz. Daher sind die Differentiale dieser Funktionen entweder gleich oder gleich mit entgegengesetzten Zeichen.

Differentiation der impliciten Funktionen.

46. Wir betrachten zuerst den Fall, dass *eine* Funktion y mit der Variabelen x durch eine Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

verbunden ist, deren linke Seite eine gegebene Funktion von x und y ist. Von derselben nehmen wir an, dass die Ableitungen

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

bei jedem Werte von x und y innerhalb gewisser Grenzen, die insbesondere auch solche Werte der Variabelen enthalten, für welche $f(x, y) = 0$ ist, bestimmte Werte haben, und dass von diesen beiden Ableitungen jedenfalls *eine* eine stetige Funktion der beiden Variabelen ist, in dem Sinne, welcher im § 32 erläutert wurde. Man kann alsdann $f(x, y)$ als eine mit den Variabelen x, y zusammengesetzte Funktion ansehen, und diese Funktion ist der Annahme nach konstant gleich 0. Also ist auch ihr Differentialquotient konstant gleich 0, und es besteht die Gleichung (§ 32)

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Hieraus kann man, für alle Wertsysteme von x und y, für welche nicht gerade $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ist, den gesuchten Differentialquotienten bestimmen:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{oder} \quad dy = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\,dx.$$

Die Ableitung einer Funktion y, *welche mit* x *durch die Gleichung* f(x, y) = 0 *verbunden ist, wird erhalten, indem man den negativen Wert der Ableitung nach* x *durch die Ableitung nach* y *dividiert.*

47. Beispiele.

1. Ist $f(x, y) = a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0$, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2b^2 x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a^2 y,$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Im vorliegenden Falle kann die gegebene Gleichung nach y aufgelöst werden und man findet

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Die Quadratwurzel kann sowohl mit dem Plus-, wie mit dem Minuszeichen berechnet werden. Substituiert man diesen Wert von y in die obige Formel, so wird sie

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Dieses Resultat erhält man auch unmittelbar, wenn man den obigen Wert von y differentiiert.

2. Hat man die Gleichung

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

welche die *Lemniskate von Bernoulli* darstellt, wenn man x und y als rechtwinklige Koordinaten betrachtet, so wird

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2) - 4a^2 x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2) + 4a^2 y,$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\,\frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2 + y^2 + a^2}.$$

Nur für den Wert $x = 0$, $y = 0$, welcher die Gleichung $f(x, y) = 0$ befriedigt, ergiebt diese Formel keine Bestimmung des Differentialquotienten.

48. Betrachtet man den Fall, dass zwei Gleichungen gegeben sind:

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

zwischen der unabhängigen Variabelen x und den zwei Funktionen y, z dieser Variabelen; da y und z Funktionen von x sind, so sind $f(x, y, z)$ und $F(x, y, z)$ zusammengesetzte

Funktionen, andererseits sind die Differentiale dieser Funktionen null, da diese selbst 0 sind; also hat man:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0.$$

Hieraus erhält man die Werte von dy und dz, nämlich:

$$dy = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}} dx,$$

$$dz = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}} dx.$$

Die Voraussetzungen, unter welchen dieser Satz bewiesen ist, sind aus § 32 zu entnehmen.

49. Beispiel. Aus den Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = p,$$

wo r, α, β, γ, p Konstante bezeichnen, folgt:

$$x dx + y dy + z dz = 0, \quad \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0,$$

oder:

$$\frac{dx}{\gamma y - \beta z} = \frac{dy}{\alpha z - \gamma x} = \frac{dz}{\beta x - \alpha y},$$

eine Formel, welche die Differentiale dy, dz der beiden Funktionen y und z bestimmen lässt.

50. In derselben Weise hat man in dem allgemeinen Falle zu verfahren, wo man n Gleichungen hat:

$$f(x, y, z, u \ldots) = 0,$$
$$F(x, y, z, u \ldots) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, u \ldots) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

zwischen einer unabhängigen Variabelen x und n Funktionen $y, z, u \ldots$ dieser Variabelen. Die Funktionen f, F, $\varphi \ldots$ sind, wie in den vorigen Fällen, zusammengesetzte Funktionen,

deren Werte durchaus 0 sind, und deren Differentiale daher ebenfalls verschwinden. Man hat also:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial u}du + \ldots = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial u}du + \ldots = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{du}du + \ldots = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Diese n Gleichungen bestimmen die Differentiale der n Funktionen $y, z, u \ldots$

Die Elimination willkürlicher Konstanten.

51. Es sei eine Gleichung gegeben

1) $$f(x, y, C) = 0$$

zwischen den Variabelen x, y und einer willkürlichen Konstante C. Die Differentiation dieser Gleichung liefert

2) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

und wenn man die Konstante C zwischen den Gleichungen 1) und 2) eliminiert, so ergiebt sich eine Gleichung

3) $$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

zwischen der unabhängigen Variabelen x, der Funktion y und ihrer Ableitung $\frac{dy}{dx}$.

Diese Gleichung, welche ganz unabhängig ist von den besonderen Werten, welche man der Konstanten C beilegen mag, heisst eine *Differentialgleichung.* In Bezug auf dieselbe heisst die Gleichung 1), welche eine willkürliche Konstante enthält, die *ursprüngliche oder primitive Gleichung.*

Interpretiert man x und y als geradlinige Koordinaten, und legt man der Konstanten C nach einander unendlich viele Werte bei, so stellt die Gleichung 1) ein Kurvensystem dar. Die Gleichung 3) drückt dann eine Eigenschaft der Tangente aus, die allen Kurven dieses Systems gemeinsam ist.

52. Beispiele.

1 Die Gleichung $y^2 = 2px + C$ giebt durch Differentiation

$$y\frac{dy}{dx} = p.$$

Hier ist die Konstante C bereits herausgefallen und diese Gleichung ist daher die Differentialgleichung, welche aus der gegebenen hervorgeht. Sie drückt (§ 29) aus, dass die Subnormale bei allen Kurven, welche durch die Gleichung $y^2 = 2px + C$ dargestellt werden, konstant ist.

2. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} = 1,$$

in welcher b eine fest gegebene Konstante ist, ϱ alle möglichen Werte annehmen kann, stellt ein System von *konfokalen Kegelschnitten* dar, wenn x und y rechtwinklige Koordinaten bedeuten. Die Differentiation ergiebt:

$$\frac{x\,dx}{\varrho^2} + \frac{y\,dy}{\varrho^2 - b^2} = 0,$$

oder:

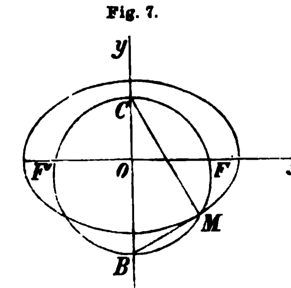
$$\frac{x\,dx}{\varrho^2} = \frac{y\,dy}{b^2 - \varrho^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{b^2}.$$

Durch die Elimination von ϱ^2 erhält man

$$\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\left(x\frac{dx}{dy} + y\right) = b^2$$

und dies ist die gesuchte Differentialgleichung. Legt man die Tangente MB und die Normale MC an eine Kurve des konfokalen Systemes, und sind B und C die Punkte, in denen diese Geraden die Axe Oy schneiden, so sind die Gleichungen für MB und MC

Fig. 7.



$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x),$$

wenn X und Y die laufenden Koordinaten bedeuten. Folglich hat man

$$OB = y - x\frac{dy}{dx}, \quad OC = y + x\frac{dx}{dy},$$

also

$$OB \, . \, OC = -b^2.$$

Das Produkt hat einen negativen Wert, weil OB und OC in entgegengesetztem Sinne auf der Ordinatenaxe liegen. Hieraus folgt, dass, wenn man dem Dreieck BMC einen Kreis umschreibt, dieser Kreis die Abscissenaxe in zwei Punkten F und F' schneidet, für welche die absoluten Werte

$$OF = OF' = b.$$

sind. Also sind F und F' die Brennpunkte unserer Kurve. Diese Eigenschaft wird durch die Differentialgleichung für alle Kurven des Systemes ausgedrückt.

53. Betrachtet man allgemein ein System von n Gleichungen:

$$1) \quad \begin{cases} f_1(x, y, z, u, \ldots a, b, c, \ldots) = 0, \\ f_2(x, y, z, u, \ldots a, b, c, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x, y, z, u, \ldots a, b, c, \ldots) = 0 \end{cases}$$

zwischen einer unabhängigen Variabelen x, n Funktionen $y, z, u, \ldots$ dieser Variabelen, und n willkürlichen Konstanten $a, b, c, \ldots$, so ergiebt die Differentiation dieser Gleichungen die n folgenden Gleichungen:

$$2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \ldots = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_n}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{\partial f_n}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \ldots = 0. \end{cases}$$

Eliminiert man nun die n willkürlichen Konstanten $a, b, c, \ldots$ zwischen den $2n$ Gleichungen 1) und 2), so erhält man n Gleichungen:

$$F_1\left(x, y, z, u, \cdots \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx} \cdots\right) = 0,$$

$$F_2\left(x, y, z, u, \cdots \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx} \cdots\right) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n\left(x, y, z, u, \cdots \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx} \cdots\right) = 0.$$

Dieselben bilden ein *System von simultanen Differentialgleichungen.*

Drittes Kapitel.

Differentiale höherer Ordnungen von Funktionen einer Variabelen. Partielle Ableitungen von Funktionen mehrerer Variabelen.

Ableitungen verschiedener Ordnungen.

54. Ist $f(x)$ eine Funktion der Variabelen x und $f'(x)$ ihre Ableitung, so bezeichnen wir mit $f''(x)$ die Ableitung von $f'(x)$, mit $f'''(x)$ die Ableitung von $f''(x)$ u. s. f. Auf diese Weise bilden wir eine Reihe von Funktionen:

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x), \ldots f^n(x) \ldots,$$

deren Zahl unbegrenzt ist, sobald $f(x)$ nicht eine rationale ganze Funktion ist.

Die Funktion $f^n(x)$, welche in der vorstehenden Folge die n^{te} Stelle einnimmt, wird die *Ableitung n^{ter} Ordnung* oder einfacher *die n^{te} Ableitung* von $f(x)$ genannt.

Differentiale verschiedener Ordnungen.

55. Es sei wiederum

$$1)\qquad y = f(x)$$

die gegebene Funktion der unabhängigen Variabelen x. Wir bezeichnen mit d^{h_1} das Differential dieser Funktion bei einem willkürlichen endlichen Zuwachs h_1 der Variabelen x; so hat man nach § 18

$$2)\qquad d^{h_1} y = f'(x)\, h_1.$$

Dieses Differential, welches, solange h_1 eine endliche Grösse bezeichnet, selbst im allgemeinen eine endliche Grösse

ist, ist zugleich eine Funktion von x. Sein Differential, gebildet für einen willkürlichen Zuwachs h_2 der Variabelen x, ist das Differential zweiter Ordnung der Funktion y, und wir bezeichnen es mit $d^{h_2} d^{h_1} y$. Man hat dann:

$$d^{h_2} d^{h_1} y = d^{h_2} f'(x) h_1 = h_1 d^{h_2} f'(x) = f''(x) h_1 h_2.$$

Desgleichen wird das Differential dieses Differentiales zweiter Ordnung bei einem willkürlichen Zuwachs h_3 der Variabelen x:

$$d^{h_3} d^{h_2} d^{h_1} y = f'''(x) h_1 h_2 h_3.$$

Fährt man so fort, so erhält man eine Folge von Werten:

$$d^{h_1} y, \quad d^{h_2} d^{h_1} y, \quad d^{h_3} d^{h_2} d^{h_1} y, \ldots$$

in welcher jedes Glied das Differential des vorhergehenden ist, in Bezug auf einen bestimmten Zuwachs, den man der Variabelen x erteilt. Das n^{te} Glied ist das Differential n^{ter} Ordnung der Funktion y, und man hat:

$$3) \qquad d^{h_n} d^{h_{n-1}} \ldots d^{h_2} d^{h_1} y = f^n(x) h_1 h_2 \ldots h_{n-1} h_n.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass sich das Differential n^{ter} Ordnung nicht ändert, wenn man die Reihenfolge der Charakteristiken d vertauscht.

Gewöhnlich nimmt man alle Grössen $h_1, h_2 \ldots h_n$ als unter einander gleich an. Ist h ihr gemeinsamer Wert, so kann man die Differentiale der verschiedenen Ordnungen mit den Zeichen

$$dy, \; d^2y, \ldots d^ny, \ldots$$

bezeichnen und man hat

$$4) \qquad d^ny = f^n(x) h^n = f^n(x)\, dx^n,$$

oder

$$5) \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x).$$

Diese Gleichung, durch welche dieselbe Grösse nur verschiedenartig definiert wird, besagt:

Die Ableitung n^{ter} Ordnung einer Funktion ist gleich dem Differentiale n^{ter} Ordnung dieser Funktion, dividiert durch die n^{te} Potenz des Differentiales der unabhängigen Variabelen.

Diese Bezeichnung wird am häufigsten angewandt für die Ableitungen, und die Formel 3) lässt sich daher auch schreiben

$$d^n y = \frac{d^n y}{dx^n}\, dx^n.$$

Es leuchtet ein, dass man die Differentiale der verschiedenen Ordnungen vermittelst der Regeln erhält, die wir im vorigen Kapitel aufgestellt haben.

56. Höhere Differentiale einiger einfacher Funktionen.

1. Ist

$$y = x^m,$$

so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)\, x^{m-2} \ldots,$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)\, x^{m-n}.$$

2. Ist

$$y = l(x),$$

so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 1.2x^{-3},$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1}.\, 1.2.3 \ldots (n-1)\, x^{-n}.$$

3. Ist

$$y = a^x$$

und a eine positive Konstante, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = a^x\, l(a), \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = a^x [l(a)]^2 \ldots \frac{d^n y}{dx^n} = a^x [la]^n.$$

In dem Falle $a = e$ ist $y = e^x$, und $\frac{d^n y}{dx^n} = e^x = y$.

4. Ist

$$y = \sin(x + \alpha)$$

und α eine Konstante, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x + \alpha) = \sin\left(x + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

sodass die Ableitung von $\sin(x+\alpha)$ erhalten wird, indem man die Konstante $\frac{\pi}{2}$ der Grösse α hinzufügt. Hieraus schliesst man, dass für jedes n

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin\left(x + \alpha + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Setzt man $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so erhält man:

$$\frac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Differenzen der verschiedenen Ordnungen.

57. Für eine Funktion $y = f(x)$ der Variabelen x wird der Zuwachs

$$f(x+h_1) - f(x)$$

die *Differenz erster Ordnung* oder *die erste Differenz* der Funktion y bei dem willkürlichen Zuwachs h_1 der Grösse x genannt und mit $\Delta^{h_1} y$ bezeichnet. Diese Differenz ist selbst eine Funktion von x, und ihre Differenz bei dem Zuwachs h_2 der Variabelen x ist die *Differenz zweiter Ordnung* oder *die zweite Differenz* der Funktion y; sie sei mit $\Delta^{h_2}\Delta^{h_1} y$ bezeichnet. Fährt man so fort, so entsteht die Aufeinanderfolge

$$\Delta^{h_1} y, \quad \Delta^{h_2}\Delta^{h_1} y, \quad \Delta^{h_3}\Delta^{h_2}\Delta^{h_1} y, \ldots$$

und jedes Glied ist die Differenz des vorhergehenden bei einem bestimmten Wachstum der Variabelen x; das n^{te} Glied ist die *Differenz von der Ordnung* n, oder die n^{te} *Differenz* von y.

Aus der Gleichung für die erste Differenz

$$\Delta^{h_1} y = f(x+h_1) - f(x)$$

folgt:

$$\Delta^{h_2}\Delta^{h_1} y = f(x+h_2+h_1) - f(x+h_2) - f(x+h_1) + f(x).$$

Diese Differenz ändert sich nicht, wenn man die Grössen h_1 und h_2, also die Ordnung der beiden Charakteristiken Δ vertauscht. Wenn man nun die Differenz von der Ordnung n betrachtet, so kann man, wie hieraus folgt, ohne ihren Wert zu ändern, die Ordnung zweier aufeinander folgender Charakteristiken vertauschen, und demnach die Charakteristiken überhaupt in jede beliebige Ordnung bringen.

58. Zwischen einer Differenz und dem Differentiale gleicher Ordnung besteht eine wichtige Beziehung, die wir nun erkennen wollen.

Die Gleichung für die erste Differenz ist nach § 14 Gleichung 5):

1) $$\Delta^{h_1} y = f(x + h_1) - f(x) = f'(x + \theta_1 h_1)\, h_1,$$

wobei θ_1 eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet, und nur wie a. a. O. gezeigt wurde, die Bedingung erfüllt sein muss, dass sich bei demselben Werte von x innerhalb des Intervalles von x bis $x + h_1$ nicht zwei verschiedene Werte für die Ableitung $f'(x)$ ergeben, wenn man dieselbe sowohl vorwärts wie rückwärts, d. h. mit positivem oder mit negativem Werte von Δx bildet. Diese Voraussetzungen halten wir auch für die höheren Ableitungen im folgenden fest, indem wir dabei noch bei der Bildung einer Ableitung voraussetzen, dass die vorhergehende stetig ist.

Betrachten wir die zweite Differenz

$$\Delta^{h_2} \Delta^{h_1} f(x) = \Delta^{h_2} [f(x + h_1) - f(x)] = \Delta^{h_2} \Pi(x),$$

wenn man $\Pi(x) = f(x + h_1) - f(x)$ setzt. Nach Gleichung 1) ist aber

$$\Delta^{h_2} \Pi(x) = \Pi'(x + \theta_2 h_2)\, h_2,$$

und aus der Definition der Funktion $\Pi(x)$ folgt:

$$\Pi'(x) = f'(x + h_1) - f'(x),$$

also ist:

$$\Delta^{h_2} \Delta^{h_1} f(x) = [f'(x + \theta_2 h_2 + h_1) - f'(x + \theta_2 h_2)]\, h_2,$$

und reduziert man den in der Klammer stehenden Ausdruck vermittelst der Formel 1, so ist

2) $$\Delta^{h_2} \Delta^{h_1} f(x) = f''(x + \theta_2 h_2 + \theta_1 h_1)\, h_1 h_2.$$

θ_1 und θ_2 sind positive Zahlen kleiner als 1.

Für die dritte Differenz $\Delta^{h_3} \Delta^{h_2} \Delta^{h_1} f(x)$ erhält man:

$$[f''(x + h_3 + \theta_2 h_2 + \theta_1 h_1) - f''(x + \theta_2 h_2 + \theta_1 h_1)]\, h_1 h_2,$$

und hieraus folgt nach Gleichung 1):

3) $$\Delta^{h_3} \Delta^{h_2} \Delta^{h_1} f(x) = f'''(x + \theta_3 h_3 + \theta_2 h_2 + \theta_1 h_1)\, h_1 h_2 h_3.$$

Fährt man so fort, so ist leicht zu sehen, dass man die n^{te} Differenz der Funktion y durch die folgende, von Ossian Bonnet gegebene Formel ausdrücken kann:

$$\Delta^{h_n}\Delta^{h_{n-1}}\ldots\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x)=f^n(x+\theta_n h_n+\theta_{n-1}h_{n-1}+\ldots\theta_2 h_2+\theta_1 h_1)h_1 h_2\ldots h_n.$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ sind positive Zahlen kleiner als 1.

Dividiert man diese Differenz durch das entsprechende Differential (§ 55), letzteres auch noch gebildet gedacht mit endlichen Werten von h, so wird

$$\frac{\Delta^{h_n}\Delta^{h_{n-1}}\ldots\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}y}{d^{h_n}d^{h_{n-1}}\ldots d^{h_2}d^{h_1}y}=\frac{f^n(x+\theta_n h_n+\ldots\theta_2 h_2+\theta_1 h_1)}{f^n(x)}.$$

Dieser Quotient hat die Einheit zur Grenze, wenn sämtliche Grössen h nach 0 konvergieren, und $f^n(x)$ eine stetige Funktion von x ist.

Letzteres gilt, wie man auf etwas andere Weise zeigen kann, sobald auch nur die n^{te} Ableitung $f^n(x)$ an der Stelle x einen bestimmten Wert besitzt, und die vorhergehenden Ableitungen stetig sind.

Partielle Ableitungen, partielle Differentiale und Differenzen höherer Ordnung bei einer Funktion von mehreren unabhängigen Variabelen.

59. Wir betrachten eine Funktion ω von mehreren unabhängigen Variabelen x, y, z, und wollen, um die Begriffe zu fixieren, die Zahl dieser Variabelen gleich 3 annehmen:

$$1)\qquad \omega = f(x, y, z).$$

Man kann die Ableitung von ω nach jeder der drei Variabelen bilden, indem man dabei jedesmal die beiden anderen als konstant betrachtet. Diese Ableitungen heissen die *partiellen Ableitungen erster Ordnung* der gegebenen Funktion und man bezeichnet sie mit

$$f'_x(x, y, z),\quad f'_y(x, y, z),\quad f'_z(x, y, z).$$

Die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen erster Ordnung sind die *partiellen Ableitungen zweiter Ordnung*; man bezeichnet sie mit

$$f''_{xx}(x, y, z),\quad f''_{xy}(x, y, z),\quad f''_{xz}(x, y, z),\quad f''_{yx}(x, y, z)\ldots$$

Die partiellen Ableitungen dieser sind die *partiellen Ableitungen dritter Ordnung* u. s. w. Allgemein wird eine partielle



Ableitung n^{ter} Ordnung durch die Charakteristik f mit zwei Indices zu bezeichnen sein. Der obere Index ist die Zahl n, welche die Ordnung der partiellen Ableitung angiebt, der untere Index wird durch die Aufeinanderfolge von n Buchstaben x, y, z angegeben, welche von rechts nach links gelesen die Differentiationen anzeigen, welche man nacheinander zur Bildung der n^{ten} Ableitung angewandt hat.

60. Lehrsatz. *Der Wert einer partiellen Ableitung einer Funktion von mehreren Variabelen ist unabhängig von der Ordnung, in welcher man die Aufeinanderfolge der Differentiationen vollzogen hat, wenn nur die Zahl der Differentiationen, welche zu jeder Variabelen gehören, die nämliche bleibt.*

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, den einer Funktion zweier Variabelen. Mit Δ_x^h und Δ_y^k wollen wir die Differenzen einer Funktion der beiden Variabelen x und y bezeichnen, wenn man diesen Variabelen den Zuwachs h und k bezüglich erteilt. Man erhält alsdann:

$$\Delta_x^h f(x, y) = f(x+h, y) - f(x, y),$$

und

$$1)\quad \Delta_y^k \Delta_x^h f(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y).$$

Das zweite Glied ändert sich nicht, wenn man die Differenzen in umgekehrter Reihenfolge bildet; man schliesst hieraus, dass

$$2)\quad \Delta_y^k \Delta_x^h f(x, y) = \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y)$$

ist. Stellt man nun diese beiden Differenzen nach der Methode von Ossian Bonnet dar (§ 58), so wird

$$\Delta_y^k \Delta_x^h f(x, y) = \Delta_y^k [f(x+h, y) - f(x, y)] = \Delta_y^k \Pi(x, y),$$

wenn man $\Pi(x, y) = f(x+h, y) - f(x, y)$ setzt. Die Anwendung der Formel 5) des § 14 auf die Funktion $\Pi(x, y)$, in welcher y variiert wird, ergiebt

$$\Delta_y^k \Pi(x, y) = \Pi_y'(x, y+\theta k)\, k,$$

und es ist nach der Definition von $\Pi(x, y)$:

$$\Pi_y'(x, y+\theta k) = f_y'(x+h, y+\theta k) - f_y'(x, y+\theta k).$$

Wendet man nun dieselbe Formel auf die Funktion $f'_y(x, y + \theta k)$ an, indem man x um h wachsen lässt, so wird

$$f'_y(x + h, y + \theta k) - f'_y(x, y + \theta k) = f''_{xy}(x + \theta' h, y + \theta k)\, h,$$

also ist

$$3)\quad \Delta^k_y \Delta^h_x f(x, y) = \Delta^h_y \Delta^k_x f(x, y) = f''_{xy}(x + \theta' h, y + \theta k) . hk,$$

oder

$$\frac{\Delta^h_x \Delta^k_y f(x, y)}{hk} = f''_{xy}(x + \theta' h, y + \theta k),$$

$$\frac{\Delta^k_y \Delta^h_x f(x, y)}{hk} = f''_{xy}(x + \theta' h, y + \theta k).$$

Lässt man in der ersten Formel zuerst k nach 0 konvergieren und sodann h, so geht die linke Seite in den Wert $f''_{xy}(x, y)$ über; und da auch die rechte Seite in den Wert $f''_{xy}(x, y)$ übergeht, sobald die Funktion f'' eine stetige Funktion der beiden Variabelen ist (§ 32), so hat man die identische Gleichung

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{xy}(x, y).$$

Die zweite Gleichung aber erhält auf der linken Seite, wenn man zuerst h nach 0 konvergieren lässt, und alsdann k, die Grenze $f''_{yx}(x, y)$; und da auch bei diesem Prozesse die rechte Seite den Wert $f''_{xy}(x, y)$ annimmt, so ergiebt sich die gesuchte Gleichung

$$4)\quad f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y).$$

Die Voraussetzung, unter welcher dieselbe bewiesen wurde, ist also, dass die Funktion $f''_{xy}(x, y)$, vor- oder rückwärts gebildet, eine stetige Funktion der beiden Variabelen ist. Dann ist auch $f''_{yx}(x, y)$ eine stetige Funktion und mit f''_{xy} identisch. Dass in der That die Grenzwerte der linken Seiten in den obigen beiden Gleichungen die gesuchten Ableitungen sind, ist aus der Definition dieser Quotienten ersichtlich, wird übrigens auch noch in den folgenden beiden Paragraphen erörtert.

61. Die Gleichung 4) hat unter denselben Voraussetzungen auch dann noch Geltung, wenn die Funktion von einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variabelen, ausser x und y, abhängt. Betrachtet man eine partielle Ableitung n^{ter} Ordnung von einer Funktion mit m unabhängigen Variabelen, so kann man, ohne dass sich das schliessliche Resultat ändert,

die Ordnung zweier aufeinander folgender Differentiationen vertauschen, und also die aufeinander folgenden Differentiationen in beliebiger Reihenfolge ausführen, sobald nur die bei einer bestimmten Aufeinanderfolge erhaltene Funktion eine stetige Funktion aller in ihr enthaltenen Variabelen ist. (Siehe Gleichung 4 des § 58.) Die Zahl der verschiedenen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung bei einer Funktion von m Variabelen ist gleich $\frac{m(m+1)}{1.2}$, und allgemein ist die Zahl der partiellen Ableitungen n^{ter} Ordnung gleich der Zahl von Gliedern in einem homogenen Polynome vom Grade n gebildet mit m Variabelen, nämlich

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Der bewiesene Satz gestattet die Bezeichnungsweise bei partiellen Ableitungen zu vereinfachen. Im Falle einer Funktion von drei Variabelen wird eine Ableitung n^{ter} Ordnung, wenn sie durch α-malige Differentiation nach x, β-malige Differentiation nach y und γ-malige Differentiation nach z bestimmt ist, mit

$$f^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z)$$

zu bezeichnen sein; die Summe $\alpha + \beta + \gamma$ ist gleich n.

62. Das Produkt jeder partiellen Ableitung erster Ordnung mit dem willkürlichen Zuwachs der entsprechenden Variabelen heisst ein *partielles Differential erster Ordnung*. Indem wir uns wieder auf den Fall einer Funktion ω von drei Variabelen x, y, z beschränken, werden wir diese partiellen Differentiale mit

$$d^{h_1}_x\omega, \quad d^{k_1}_y\omega, \quad d^{l_1}_z\omega$$

bezeichnen, wobei h_1, k_1, l_1 die Zuwüchse dieser Variabelen sind. Die partiellen Differentiale von diesen partiellen Differentialen, gebildet mit neuen willkürlichen Werten der Zuwüchse, welche man den Variabelen erteilt, sind die *partiellen Differentiale zweiter Ordnung* u. s. w. Ein partielles Differential n^{ter} Ordnung, gebildet, indem man in bestimmter Reihenfolge α-mal nach x, β-mal nach y, γ-mal nach z differentiiert, wird bezeichnet dadurch, dass man die Charakteristiken

$$\partial_x^{h_1}, \partial_x^{h_2}, \ldots \partial_x^{h_\alpha}, \quad \partial_y^{k_1}, \partial_y^{k_2}, \ldots \partial_y^{k_\beta}, \quad \partial_z^{l_1}, \partial_z^{l_2}, \ldots \partial_z^{l_\gamma}$$

in der Reihenfolge mit einander verbindet, in der die Operationen ausgeführt worden sind. Dieses partielle Differential ist gleich

$$f^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z)\, h_1 h_2 \ldots h_\alpha k_1 k_2 \ldots k_\beta l_1 l_2 \ldots l_\gamma,$$

es ändert sich nicht, wenn man die Reihenfolge der Charakteristiken ∂ verändert.

Gewöhnlich nimmt man die Zuwüchse, welche zu derselben Veränderlichen gehören, als unter einander gleich an. In diesem Falle kann man das obige Differential mit $\partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\omega$ bezeichnen, und man hat die Gleichung

$$5)\qquad \partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\omega = f^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z)\, \partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma.$$

Aus dieser Formel folgt

$$f^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} = \frac{\partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\omega}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma},$$

oder einfacher

$$f^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z) = \frac{\partial^n \omega}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma}.$$

Die Bedeutung des Zählers $\partial^n\omega$ ist aus dem Nenner unzweideutig zu erkennen. Diese letzte Bezeichnungsweise für partielle Ableitungen ist die üblichste. Die Formel 5) wird also

$$6)\qquad \partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\omega = \frac{\partial^n \omega}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma}\, \partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma.$$

63. *Partielle Differenzen* erster Ordnung der Funktion ω nennt man die Zuwüchse dieser Funktion bei einer bestimmten Änderung der Variabelen um die Grössen $h_1, k_1, l_1 \ldots$ Diese Differenzen wollen wir mit

$$\Delta_x^{h_1}\omega, \quad \Delta_y^{k_1}\omega, \quad \Delta_z^{l_1}\omega$$

bezeichnen. Die partiellen Differenzen gebildet von den partiellen Differenzen erster Ordnung sind von der zweiten Ordnung u. s. f. Eine partielle Differenz von der Ordnung n, gebildet, indem man in bestimmter Reihenfolge α-mal die Operation mit x, β-mal mit y, γ-mal mit z vollzieht, wird bezeichnet dadurch, dass man die Charakteristiken

$$\Delta_x^{h_1}, \Delta_x^{h_2}, \ldots \Delta_x^{h_\alpha}, \quad \Delta_y^{k_1}, \Delta_y^{k_2}, \ldots \Delta_y^{k_\beta}, \quad \Delta_z^{l_1}, \Delta_z^{l_2}, \ldots \Delta_z^{l_\gamma}$$

in der Reihenfolge mit einander verbindet, in welcher die Operationen ausgeführt worden sind. Nach den in den §§ 57 und 60 gemachten Bemerkungen über die Vertauschbarkeit der Ordnung zweier Charakteristiken bei einer Funktion mit einer oder mit zwei Variabelen kann man die Reihenfolge aller Charakteristiken Δ beliebig vertauschen. Indem man eine Reihe von Transformationen ausführt, welche den in §§ 58 und 60 benutzten analog sind, kann man die Differenz n^{ter} Ordnung, wie leicht ersichtlich, durch die Formel ausdrücken:

$$\Delta_z^{l_\gamma} \ldots \Delta_z^{l_1} \Delta_y^{k_\beta} \ldots \Delta_y^{k_1} \Delta_x^{h_\alpha} \ldots \Delta_x^{h_1} \omega$$

$$= f(x + \theta_1 h_1 + \ldots \theta_\alpha h_\alpha,\ y + \theta'_1 k_1 + \ldots \theta'_\beta k_\beta,\ z + \theta''_1 l_1 + \\ + \ldots \theta''_\gamma l_\gamma)\, h_1 \ldots h_\alpha k_1 \ldots k_\beta l_1 \ldots l_\gamma.$$

Dividiert man diese Differenz mit dem entsprechenden partiellen Differentiale

$$\partial_z^{l_\gamma} \ldots \partial_z^{l_1} \partial_y^{k_\beta} \ldots \partial_y^{k_1} \partial_x^{h_\alpha} \ldots \partial_x^{h_1} \omega,$$

so sieht man, dass der Quotient die Grenze 1 hat, wenn sämtliche Zuwüchse der Variabelen nach 0 konvergieren.

Berechnung der Differentiale höherer Ordnung von Funktionen, welche aus mehreren zusammengesetzt sind.

64. Es sei

$$y = f(u, v, w \ldots)$$

eine Funktion, welche mit m Funktionen $u, v, w \ldots$ der einen unabhängigen Variabelen x zusammengesetzt ist. Man hat zunächst (§ 33)

$$1)\qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw + \ldots$$

Da jedes Glied der rechten Seite ein Produkt von zwei Faktoren ist, so erhält man durch eine neue Differentiation

$$d^2 y = d\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + d\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv + d\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right) dw + \ldots \\ + \frac{\partial y}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial y}{\partial v} d^2 v + \frac{\partial y}{\partial w} d^2 w + \ldots$$

Wendet man aber auf die Funktionen $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w} \ldots$ den Satz an, der in der Gleichung 1) enthalten ist, so hat man

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} dv + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w} dw + \ldots,$$

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} dv + \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w} dw + \ldots,$$

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w} du + \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w} dv + \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} dw + \ldots$$

Der Ausdruck für $d^2 y$ wird also

$$2)\left\{\begin{aligned} d^2 y = \Big(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} du^2 &+ 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} du\, dv + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w} du\, dw \\ &+ \ldots \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} dv^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w} dv\, dw \ldots\Big), \\ &+ \Big(\frac{\partial y}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial y}{\partial v} d^2 v + \frac{\partial^2 y}{\partial w} d^2 w + \ldots\Big) \end{aligned}\right.$$

Dabei ist ausdrücklich vorausgesetzt, dass die Bedingungen erfüllt sind, damit $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$ etc. werde. Auf dieselbe Weise erhält man die Differentiale $d^3 y, d^4 y$ etc.

65. Wenn alle Funktionen $u, v, w \ldots$ von der Form $ax + b$ sind, wobei a und b Konstante bedeuten, so hat man

$$d^2 u = 0, \quad d^2 v = 0, \quad d^2 w = 0 \ldots$$

und die Gleichung 2) reduziert sich auf

$$d^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} du\, dv + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w} du\, dw + \ldots$$
$$+ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} dv^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w} dv\, dw + \ldots$$

Dieser Wert von $d^2 y$ kann symbolisch durch die Formel

$$d^2 y = \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw + \ldots\right)^2 = (dy)^2$$

dargestellt werden, die so zu verstehen ist, dass man, nachdem die Quadrierung ausgeführt ist,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right), \ldots$$

bezüglich durch

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} \dots$$

ersetzt. Dieses Resultat lässt sich verallgemeinern, so dass man für jedes n schreiben kann

$$d^n y = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\, du + \frac{\partial y}{\partial v}\, dv + \frac{\partial y}{\partial w}\, dw + \dots\right)^n = (dy)^n,$$

wobei man nach Ausführung der n^{ten} Potenz jedes Glied von der Form

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^\alpha \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^\beta \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^\gamma$$

durch die entsprechende Ableitung

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} y}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma}$$

zu ersetzen hat.

Denn da unsere symbolische Formel den wahren Wert von dy ergiebt, wenn $n = 1$ ist, so genügt es für ihren Beweis zu zeigen, dass sie, falls sie für einen Wert von n gilt, jedenfalls auch für den nächstfolgenden $n + 1$ richtig bleibt. Nehmen wir also die Gültigkeit der Formel für den Index n an, und sei

$$C\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^\alpha \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^\beta \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^\gamma \dots du^\alpha\, dv^\beta\, dw^\gamma \dots$$

ein Glied dieser Entwickelung. Der wahre Wert des entsprechenden Gliedes von $d^n y$ ist alsdann

$$C \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma \dots} y}{\partial u^\alpha\, \partial v^\beta\, \partial w^\gamma \dots}\, du^\alpha\, dv^\beta\, dw^\gamma \dots$$

Um nun $d^{n+1} y$ zu erhalten, muss man $d^n y$ differentiieren, und das angeschriebene Glied giebt

$$C\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma \dots +1} y}{\partial u^{\alpha+1}\, \partial v^\beta\, \partial w^\gamma \dots}\, du + \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\dots 1} y}{\partial u^\alpha\, \partial v^{\beta+1}\, \partial w^\gamma \dots}\, dv \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma \dots +1} y}{\partial u^\alpha\, \partial v^\beta\, \partial w^{\gamma+1} \dots}\, dw + \dots\right) du^\alpha\, dv^\beta\, dw^\gamma \dots,$$

da $du, dv, dw \dots$ konstant sind. Nach unserer Übereinkunft lässt sich aber dieser Ausdruck symbolisch in der Form

$$C\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^{\beta}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^{\gamma}\ldots du^{\alpha}\,dv^{\beta}\,dw^{\gamma}\ldots\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv+\frac{\partial y}{\partial w}dw\ldots\right)$$

schreiben. Hieraus folgt, dass die symbolische Darstellung von $d^{n+1}y = (dy)^n \,.\, dy = (dy)^{n+1}$ wird, womit die Behauptung bewiesen ist.

Formel für das Produkt mehrerer Funktionen.

66. Die allgemeine Formel für die Bildung höherer Differentiale eines Produktes von mehreren Funktionen ist wichtig.

Wir betrachten zunächst das Produkt uv von zwei Funktionen. Man hat hier

$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$

ferner

1) $$d^2(uv) = d(v\,du) + d(u\,dv) = v\,d^2u + dv\,du + dv\,du + u\,d^2v,$$

oder

2) $$d^2(uv) = v\,d^2u + 2dv\,du + u\,d^2v;$$

eine neue Differentiation ergiebt

3) $$d^3(uv) = v\,d^3u + 3dv\,d^2u + 3d^2v\,du + 3d^3v\,.\,u.$$

In den Formeln 1), 2), 3) vermindert sich die Ordnung des Differentiales von u um eine Einheit, und die Ordnung des Differentiales von v wächst um eine Einheit, wenn man von einem Gliede zum folgenden weiter geht. Dabei sind die numerischen Koeffizienten dieselben wie bei der Entwickelung der ersten, zweiten und dritten Potenz eines Binomes. Man kann also begründetermassen annehmen, dass man allgemein erhalten wird

4) $$\begin{cases} d^n(uv) = v\,d^nu + \frac{n}{1}\,dv\,d^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,d^2v\,d^{n-2}u \\ \qquad + \ldots \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\ldots k}\,d^kv\,d^{n-k}u + \ldots (d^nv)u. \end{cases}$$

Nachdem diese Formel für $n = 1, 2, 3$ verifiziert ist, wird ihre Allgemeingültigkeit bewiesen, wenn man unter Annahme derselben für die Ordnung n nachweist, dass die Formel für die Ordnung $n+1$ bestehen bleibt. Differentiieren wir also die Formel 4) und schreiben auf eine Zeile die Glieder, welche aus der Differentiation des zweiten Faktors in jedem Gliede

hervorgehen, auf eine zweite Zeile diejenigen, die aus der Differentiation jedes ersten Faktors folgen. Es wird

$$d^{n+1}(uv) = v\,d^{n+1}u + \frac{n}{1}dv\,d^n u + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2v\,d^{n-1}u + \dots d^n v\,du$$

$$+ dv\,d^n u + \frac{n}{1}d^2v\,d^{n-1}u \qquad + \dots n d^n v du$$

$$+ d^{n+1}v\,u.$$

Zieht man die gleichartigen untereinander stehenden Glieder zusammen, so erhält man eine Formel, die aus der Gleichung 4) durch Vertauschung von n mit $n+1$ hervorgeht; folglich ist diese Gleichung allgemein gültig.

Die Gleichung lässt sich *symbolisch* folgendermassen schreiben:

$$d^n(uv) \doteq (du + dv)^n,$$

d. h. man hat nach Ausführung des Binomes die Potenzen $(du)^k$, $(dv)^k$ jedesmal durch $d^k u$ und $d^k v$ zu ersetzen, und wenn $k = 0$ ist, durch u und v.

67. Für ein Produkt von m Faktoren $u_1, u_2 \dots u_m$, wobei jedes u eine Funktion von x bedeutet, besteht ebenfalls die *symbolische* Formel

$$d^n(u_1 u_2 \dots u_m) = (du_1 + du_2 + \dots du_{m-1} + du_m)^n,$$

d. h. nach Ausführung der n^{ten} Potenz der Summe

$$(du_1 + du_2 + \dots du_m)$$

vermittelst der Polynomialformel sind die Potenzen

$$du_1{}^k,\ du_2{}^k, \dots du_{m-1}{}^k,\ du_m{}^k$$

durch die Differentiale k^{ter} Ordnung

$$d^k u_1,\ d^k u_2, \dots d^k u_{m-1},\ d^k u_m$$

zu ersetzen, und wenn $k = 0$ ist, durch die Funktionen

$$u_1,\ u_2, \dots u_{m-1},\ u_m.$$

Dieser Satz ist für zwei Faktoren bereits bewiesen. Es genügt daher nachzuweisen, dass er, wenn er für $m-1$ Faktoren besteht, auch für m gültig bleibt. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit y das Produkt von $m-1$ Faktoren u_1, $u_2 \dots u_{m-1}$. Alsdann ist symbolisch:

$$d^n(u_1 u_2 \dots u_{m-1} u_m) = d^n(y\,u_m) = (dy + du_m)^n.$$

Ein beliebiges Glied dieser Entwickelung, wie

$$C_k\, dy^k\, du_m^{n-k}$$

giebt für $d^n(u_1 u_2 \ldots u_m)$ das entsprechende Glied

$$C_k\, d^k y\, d^{n-k} u_m.$$

Der Annahme nach ist nun symbolisch

$$d^k y = (du_1 + du_2 + \ldots du_{m-1})^k,$$

also ist der obige Term symbolisch gleich

$$C_k (du_1 + du_2 + \ldots du_{m-1})^k\, du_m^{n-k},$$

und bildet man die Summe aller Glieder, so wird symbolisch

$$d^n(u_1 u_2 \ldots u_m) = (du_1 + du_2 + \ldots du_{m-1} + du_m)^n.$$

Differentiale höherer Ordnung für implicite Funktionen.

68. Ist eine Funktion y der Variabelen x durch eine Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

definiert, so ist $f(x, y)$ eine zusammengesetzte Funktion, die einen konstanten Wert, nämlich 0 hat. Folglich sind auch die Differentiale beliebiger Ordnungen gleich 0. Man erhält demnach, wenn man diese verschiedenen Differentiale 0 setzt, und dabei beachtet, dass dx eine Konstante ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2\right) + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3\right)$$
$$+ 3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) d^2 y + \frac{\partial f}{\partial y} d^3 y = 0.$$

. . . .

Diese Formeln lassen nach einander die Differentiale dy, $d^2 y$, $d^3 y$ ..., und hieraus die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, ⋯ berechnen,

wenn die Grösse $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht gerade gleich 0 wird, für zusammengehörige Werte von x, y, für welche $f(x,y) = 0$ ist. Auch ist hierbei vorausgesetzt, dass die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x,y)$ für die betrachteten Werte der Stetigkeitsbedingung genügen.

69. Wir betrachten nun den allgemeinsten Fall eines Systemes von m Gleichungen:

$$1)\qquad \begin{cases} f_1(x, y_1, y_2 \dots y_m) = 0, \\ f_2(x, y_1, y_2 \dots y_m) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x, y_1, y_2, \dots y_m) = 0, \end{cases}$$

zwischen einer unabhängigen Variabelen x und m Funktionen $y_1, y_2, \dots y_m$ derselben. Es sind, weil $y_1 \dots y_m$ Funktionen von x sind, $f_1, f_2, \dots f_m$ zusammengesetzte Funktionen mit dem konstanten Werte 0. Die Differentiale beliebiger Ordnung dieser Funktionen sind demnach insgesamt 0. Durch einmalige Differentiation des Systemes 1) erhält man

$$2)\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} dy_2 + \dots \frac{\partial f_1}{\partial y_m} dy_m = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} dy_2 + \dots \frac{\partial f_2}{\partial y_m} dy_m = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x} dx + \frac{\partial f_m}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_m}{\partial y_2} dy_2 + \dots \frac{\partial f_m}{\partial y_m} dy_m = 0, \end{cases}$$

woraus sich, wie schon im § 50 gezeigt wurde, die Differentiale erster Ordnung

$$dy_1, dy_2, \dots dy_m$$

berechnen lassen. Die Differentiation des Systemes 2) ergiebt das neue System:

$$3)\begin{cases} \left(\frac{d^2 f_1}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\,\partial y_1} dx\,dy_1 + \dots\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} d^2 y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} d^2 y_2 + \dots\right) = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\,\partial y_1} dx\,dy_1 + \dots\right) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1} d^2 y_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} d^2 y_2 + \dots\right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{d^2 f_m}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f_m}{\partial x\,\partial y_1} dx\,dy_1 + \dots\right) + \left(\frac{\partial^2 f_m}{\partial y_1} d^2 y_1 + \frac{\partial^2 f_m}{\partial y_2} d^2 y_2 + \dots\right) = 0, \end{cases}$$

welches die Differentiale zweiter Ordnung

$$d^2y_1,\ d^2y_2, \dots d^2y_m$$

bestimmt. Durch Differentiation des Systemes 3) erhält man Gleichungen für die Differentiale dritter Ordnung u. s. w.

Über die Elimination von willkürlichen Konstanten.

70. Wenn die Gleichung

$$1)\qquad f(x, y, a, b, c, \dots)\ 0,$$

welche eine Funktion y mit ihrer unabhängigen Variabelen x verbindet, n willkürliche Konstanten $a, b, c \dots$ enthält, welche man auch die Parameter des Systems nennt, so kann man diese willkürlichen Grössen durch Anwendung der Differentiation eliminieren.

Differentiiert man nämlich die Gleichung 1) n-mal, so erhält man n neue Gleichungen

$$2)\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

und wenn man nun successive die n Parameter $a, b, c \dots$ zwischen den Gleichungen 1) und 2) eliminiert, so wird schliesslich eine Gleichung

$$3)\qquad f\left(x, y\,\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

zwischen x, y und den n ersten Ableitungen von y gebildet. Dieselbe heisst eine *Differentialgleichung* n^{ter} *Ordnung.*

Die Aufgabe, welche hier gestellt ist, bildet einen besonderen Fall derjenigen, die im § 53 behandelt wurde, und dort zur Kenntnis eines Systemes von simultanen Differentialgleichungen führte.

Denn setzen wir

$$4)\qquad \frac{dy}{dx} = y',\ \frac{dy'}{dx} = y'', \dots \frac{dy^{n-2}}{dx} = y^{(n-1)},$$

und verbinden mit der Gleichung 1) die $n-1$ ersten Gleichungen des Systems 2), indem man hier die Grössen $y', y'', \dots y^{n-1}$

einführt, so erhält man ein System von n Gleichungen zwischen der Variabelen x und den n Funktionen $y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ und n willkürlichen Grössen. Andererseits ist einleuchtend, dass die n Gleichungen, die man erhält, indem man dieses System differentiiert, ersetzt werden können durch die Gleichungen 4) zusammen mit der letzten Gleichung des Systems 2), und dass die Elimination der willkürlichen Konstanten zwischen den $2n$ Gleichungen 1), 2) und 4) ein System von n simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung liefert, das sich aus den $n-1$ Gleichungen 4) und der Gleichung 3) zusammensetzt, die durch Einführung der Variabelen $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ die Form

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}, \frac{dy^{(n-1)}}{dx}\right) = 0$$

annimmt, also zu einer Differentialgleichung erster Ordnung wird.

Die Änderung der unabhängigen Variabelen.

71. Wenn man mehrere Variabele zu betrachten hat, die von einander abhängen, so kann man eine unter ihnen willkürlich zur unabhängigen Variabelen wählen, also als diejenige, deren Differential konstant ist. Es kann nun aber eintreten, dass man nach Bestimmung einer unabhängigen Variabelen es als zweckmässig erkennt, eine andere dazu zu wählen; man muss dann die Formeln abändern. Dies ist die Frage, mit der wir uns nun beschäftigen wollen, und die wir folgendermassen stellen:

Es sei x *zur unabhängigen Variabelen gewählt und* y *eine von den anderen Variabelen, welche man noch zu betrachten hat. Man will die Ableitungen*

$$\frac{dy}{dx}, \ \frac{d^2y}{dx^2}, \ \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$$

welche unter der Annahme, dass dx *konstant ist, gebildet sind, als Funktionen der Differentiale* dx *und* dy *ausdrücken, indem man diese als Funktionen irgend einer anderen unabhängigen Variabelen betrachtet.*

Wir bezeichnen mit $y', y'', y'''\ldots$ die Ableitungen von y, gebildet unter der Annahme, dass x die unabhängige Variabele ist. Man hat dann:

$$1)\qquad dy = y'dx,\quad dy' = y''dx,\quad dy'' = y'''dx, \ldots$$

und nach dem Satze des § 21 gelten diese Formeln, wie auch immer die unabhängige Variabele gewählt sein mag. Die erste Gleichung ergiebt

$$2)\qquad y' = \frac{dy}{dx},$$

ein bekanntes Resultat, demzufolge y' der Quotient von dy und dx ist. Wendet man nun auf diese Gleichung die Regel der Differentiation eines Quotienten an, so folgt, was auch die unabhängige Variabele sein mag:

$$dy' = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2};$$

aber nach der zweiten Gleichung der Formel 1) ist $dy' = y''\,dx$, und demnach hat man

$$3)\qquad y'' = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}.$$

Dieselbe Regel, aufs neue angewandt, liefert:

$$dy'' = \frac{dx(dx\, d^3y - dy\, d^3x) - 3d^2x(dx\, d^2y - dy\, d^2x)}{dx^4},$$

und da nach der dritten Gleichung der Formel 1) $dy'' = y'''\,dx$ ist, so wird

$$4)\qquad y''' = \frac{dx(dx\, d^3y - dy\, d^3x) - 3d^2x(dx\, d^2y - dy\, d^2x)}{dx^5}.$$

Auf demselben Wege erhält man nacheinander $y^{\mathrm{IV}}, y^{\mathrm{V}}$ u. s. w., und man erkennt, dass sich $y^{(n)}$ vermittelst der Differentiale von x und y ausdrücken lässt bis zu denjenigen der n^{ten} Ordnung.

Wenn man in den Formeln 2), 3), 4)... dx konstant annimmt, so findet man wieder die bekannten Gleichungen

$$y' = \frac{dy}{dx},\quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}\ldots$$

Will man y zur unabhängigen Variabelen machen, so hat man dy konstant zu setzen und die Gleichungen werden:

$$y' = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}, \quad y'' = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}, \quad y''' = -\frac{\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

Man wird in der Folge erkennen, dass es oftmals in Hinsicht auf die Symmetrie und Eleganz der Formeln vorteilhaft ist, die unabhängige Variabele nicht zu fixieren.

Die Änderung aller Variabelen.

72. Wir wollen nun die folgende Aufgabe lösen:

Wenn $x, y, z \ldots$ *Variabele sind, die von einander abhängen, und* x *diejenige bezeichnet, deren Differential als konstant angesehen wurde, so sollen in einem Ausdrucke* V, *welcher eine Funktion von*

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots$$

ist, die Variabelen $x, y, z \ldots$ *durch andere Variabelen* $\xi, \eta, \zeta \ldots$ *ersetzt und unter diesen eine, z. B.* ξ, *als unabhängige Variabele betrachtet werden. Wie ist der Wert von* V *als Funktion von* ξ, η, ζ *und den Ableitungen* $\frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \cdots$ *zu bilden?*

Um diese Frage zu lösen, hat man zuerst die Funktion V vermittelst der Formeln des vorigen Paragraphen so auszudrücken, dass dabei die unabhängige Variabele willkürlich bleibt. Alsdann ist V eine Funktion von $x, y, z \ldots$ und ihren Differentialen. Nachdem dieses geschehen, lassen sich aus den Gleichungen, welche die Variabelen $x, y, z \ldots$ als Funktionen der neuen Variabelen definieren, nämlich

$$x = f(\xi, \eta, \zeta \ldots), \; y = F(\xi, \eta, \zeta \ldots), \; z = \varphi(\xi, \eta, \zeta \ldots),$$

durch Differentiation die Differentiale

$$dx, d^2x, \ldots dy, d^2y, \ldots dz, d^2z \ldots$$

berechnen, und hierbei ist $d\xi$ als konstant anzunehmen. Alle diese Werte sind in V zu substituieren, und damit ist die Aufgabe gelöst.

73. Anwendungen. *Es seien* x *und* y *die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte einer gegebenen Kurve, wobei* x *als unabhängige Variabele betrachtet ist. Man soll bestimmen, wie sich der Ausdruck*

$$V = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

transformiert, wenn man an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten Polarkoordinaten ϱ, ω *einführt, und* ω *als unabhängige Variabele ansieht.*

Nach § 71 wird der Ausdruck V gleich

$$V = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}.$$

Die unabhängige Variabele bleibt dabei beliebig.

Nun hat man

$$x = \varrho \cos\omega, \quad y = \varrho \sin\omega,$$

also durch Differentiation

$$dx = d\varrho \cos\omega - \varrho \sin\omega\, d\omega,$$
$$dy = d\varrho \sin\omega + \varrho \cos\omega\, d\omega.$$

Differentiiert man von neuem und setzt $d\omega =$ *konst*, so findet man

$$d^2x = d^2\varrho \cos\omega - 2\sin\omega\, d\varrho\, d\omega - \varrho\cos\omega\, d\omega^2,$$
$$d^2y = d^2\varrho \sin\omega + 2\cos\omega\, d\varrho\, d\omega - \varrho\sin\omega\, d\omega^2.$$

Hieraus entnimmt man:

$$dx^2 + dy^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2,$$
$$dx\, d^2y - dy\, d^2x = -\varrho\, d^2\varrho\, d\omega + 2 d\varrho^2 d\omega + \varrho^2 d\omega^3.$$

Also ist

$$V = \frac{(d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{-\varrho\, d^2\varrho\, d\omega + 2 d\varrho^2 d\omega + \varrho^2 d\omega^3},$$

oder

$$V = \frac{\left(\varrho^2 + \frac{d\varrho^2}{d\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\frac{d\varrho^2}{d\omega^2} - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\omega^2}}.$$

74. Bei Fragen in betreff der Änderung von Variabelen kann es auch eintreten, dass die ursprünglichen Variabelen nicht unmittelbar als Funktionen der neuen gegeben sind, sondern dass sie mit diesen durch gegebene Differentialgleichungen verknüpft sind. Dabei kann es vorkommen, dass die gegebenen Gleichungen zusammen mit denjenigen, die man durch Differentiation aus ihnen gewinnt, hinreichen, um die ursprünglichen Variabelen zu eliminieren und auf diese Weise den vorgelegten Ausdruck zu transformieren. Auch hiervon wollen wir ein Beispiel geben und denselben Ausdruck wie oben, nämlich

$$1)\qquad V = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

behandeln. Es soll die Form bestimmt werden, welche derselbe annimmt, wenn man an Stelle von x und y zwei andere Variabelen ϱ und s einführt, welche mit diesen durch die Gleichungen

$$2)\qquad x^2 + y^2 = \varrho^2,$$

$$3)\qquad dx^2 + dy^2 = ds^2$$

verbunden sind, wobei ds als konstantes Differential gelten soll. Zunächst transformieren wir wiederum V in

$$4)\qquad V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}.$$

Die Differentiation von 2) und 3) ergiebt

$$5)\qquad x\,dx + y\,dy = \varrho\, d\varrho,$$

$$6)\qquad dx\, d^2x + dy\, d^2y = 0.$$

Durch Differentiation der Gleichung 5) erhält man

$$x\, d^2x + y\, d^2y + (dx^2 + dy^2) = d\varrho^2 + \varrho\, d^2\varrho,$$

oder nach Gleichung 3)

$$7)\qquad x\, d^2x + y\, d^2y = \varrho\, d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2.$$

Die Gleichungen 3), 5), 6), 7) lassen dx, dy, d^2x, d^2y berechnen; und zwar wird aus den Gleichungen 6) und 7) erhalten:

$$(y\,dx - x\,dy)\,d^2x = -(\varrho\,d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2)\,dy,$$
$$(y\,dx - x\,dy)\,d^2y = +(\varrho\,d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2)\,dx,$$

also

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = \frac{(\varrho\,d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2)\,ds^2}{y\,dx - x\,dy}.$$

Nun ist

$$y\,dx - x\,dy = \sqrt{(x^2+y^2)(dx^2+dy^2) - (x\,dx + y\,dy)^2} = \varrho\sqrt{ds^2 - d\varrho^2},$$

also

$$8)\qquad dx\,d^2y - dy\,d^2x = \frac{(\varrho\,d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2)\,ds^2}{\varrho\sqrt{ds^2 - d\varrho^2}}.$$

Vermittelst der Formeln 3) und 8) wird

$$V = \frac{\varrho\,ds\sqrt{ds^2 - d\varrho^2}}{\varrho\,d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2},$$

oder

$$V = \frac{\varrho\sqrt{1 - \frac{d\varrho^2}{ds^2}}}{\varrho\,\frac{d^2\varrho}{ds^2} + \frac{d\varrho^2}{ds^2} - 1}.$$

Viertes Kapitel.

Die totalen Differentiale der Funktionen von mehreren unabhängigen Variabelen.

Das totale Differential erster Ordnung.

75. *Totales Differential* einer Funktion von mehreren unabhängigen Variabelen heisst die Summe aus den partiellen Differentialen der Funktion in Bezug auf die verschiedenen Variabelen. Man bezeichnet dieses Differential mit der Charakteristik d; demnach hat man

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \dots \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Aus dieser Definition ergeben sich die Folgerungen:

1. *Wenn eine Funktion* u *der unabhängigen Variabelen* x, y, z, ... t *für alle Werte der Variabelen, welche innerhalb gegebener Grenzen liegen, konstant ist, so ist ihr totales Differential* du *in diesem Wertgebiete null.* Und umgekehrt: *Wenn das totale Differential der Funktion* u *innerhalb eines Wertgebietes der Variabelen konstant gleich* 0 *ist, so ist auch die Funktion* u *selbst eine Konstante.*

Denn erstlich werden, wenn u konstant ist, die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \frac{\partial u}{\partial t}$ sämtlich 0 (§ 15), also ist auch das Differential $du = 0$.

Wenn zweitens $du = 0$ ist, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \cdots \frac{\partial u}{\partial t} dt = 0.$$

Da $dx, dy, \dots dt$ willkürliche Grössen sind, so kann man hieraus schliessen, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \dots \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Die erste Gleichung zeigt, dass u unabhängig ist von x (§ 15; dabei ist wie dort vorausgesetzt, dass jede Ableitung vor- und rückwärts gebildet, eindeutig bestimmt ist), die zweite, dass u unabhängig von y ist, endlich die letzte, dass u unabhängig von t ist. Also ist $u = konst.$

Man kann das Resultat noch evidenter machen vermittelst der Gleichung

$$u(x+h, y+k, \dots t+n) - u(x, y, \dots t)$$
$$= \frac{\partial u(x+\theta h, y+k, \dots t+n)}{\partial x} h + \frac{\partial u(x, y+\theta' k, \dots t+n)}{\partial y} k + \dots$$
$$\dots + \frac{\partial u(x, y, \dots t+\theta^{(m)} n)}{\partial t} n,$$

die man auf demselben Wege wie die analoge Differenzengleichung im § 32 gewinnt. Da nun die Ableitungen auf der rechten Seite sämtlich gleich 0 sein sollen, so ist

$$u(x+h, y+k, \dots t+n) = u(x, y, z, \dots t),$$

d. h. der Wert von u ist von jeder Veränderung der Variabelen unabhängig.

2. *Wenn zwei Funktionen* v *und* w *für alle Werte der unabhängigen Variabelen* x, y, ... t *innerhalb gegebener Grenzen nur um eine Konstante differieren, so sind ihre Differentiale gleich;* und umgekehrt: *Sind die vor- und rückwärts gebildeten Differentiale zweier Funktionen* v *und* w *für alle Werte der Variabelen innerhalb gegebener Grenzen einander gleich, so differieren diese Funktionen nur um eine Konstante.*

Dieser Satz ist in dem vorigen enthalten, wenn man die Differenz $v - w = u$ setzt.

Differentiation einer zusammengesetzten Funktion mit mehreren unabhängigen Variabelen.

76. Lehrsatz. *Bezeichnet* u *eine Funktion von mehreren Variabelen* x, y, z, ... t, *welche selbst Funktionen gewisser unabhängiger Variabelen sind, so ist*

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \dots \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

also genau ebenso, wie wenn x, y, z, ... t *die unabhängigen Variabelen wären.*

Denn sind $\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega$ die unabhängigen Variabelen, und ersetzt man $x, y, z, \ldots t$ durch ihre Werte als Funktionen derselben, so erhält man u ausgedrückt als Funktion der Variabelen $\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega$. Der Definition nach ist nun

$$du = \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta + \ldots \frac{\partial u}{\partial \omega} d\omega.$$

Nun ist aber $\frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi$ das partielle Differential von u in Bezug auf ξ, und ξ ist als unabhängige Variabele in $x, y, z, \ldots t$ enthalten. Nach der Regel für die Differentiation einer Funktion, welche aus mehreren Funktionen einer unabhängigen Variabelen zusammengesetzt ist, hat man demnach

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi\right) + \ldots \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi\right),$$

und ebenso:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta\right) + \ldots \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial \eta} d\eta\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} d\omega = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega\right) + \ldots \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial \omega} d\omega\right).$$

Summiert man diese Gleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} du = &\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \ldots \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega\right) \\ &+ \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \ldots \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial t}{\partial \eta} d\eta + \ldots \frac{\partial t}{\partial \omega} d\omega\right). \end{aligned}$$

Die in den Klammern enthaltenen Summen sind aber nichts anderes als die Differentiale $dx, dy, \ldots dt$; man hat also:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \ldots \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Folgerung. *Die Regeln für die Differentiation von Summen Produkten, Quotienten und Potenzen von Funktionen einer einzigen Variabelen sind auf Funktionen mehrerer unabhängiger Variabelen übertragbar.*

Die totalen Differentiale höherer Ordnungen.

77. Ist du dass totale Differential der Funktion du, so bezeichnen wir mit d^2u das totale Differential von du, gebildet, indem man den Variabelen Zuwüchse erteilt, welche denen gleich sind, die in dem Ausdruck du vorkommen, mit d^3u das totale Differential von d^2u und so fort, so dass in der Aufeinanderfolge:

1) $$du, \quad d^2u, \quad d^3u, \ldots d^nu$$

jedes Glied das totale Differential des vorhergehenden ausdrückt. Die Funktionen 1) heissen das *totale Differential der ersten, der zweiten, der dritten Ordnung* u. s. w.

Aus dem totalen Differentiale erster Ordnung

2) $$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \cdots \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

folgt, dass man das totale Differential der n^{ten} Ordnung symbolisch durch die Formel

3) $$d^n u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \cdots \frac{\partial u}{\partial t} dt\right)^n = du^n$$

darstellen kann, wenn man, nachdem die Entwickelung der rechten Seite ausgeführt ist, in jedem Gliede einen Faktor von der Form

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^\beta \cdots \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^\omega$$

durch die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots\omega} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots \partial t^\omega}$$

ersetzt.

Um diese Behauptung zu beweisen, genügt es, wörtlich die Überlegungen zu wiederholen, die wir im § 65 ausführten bei der Differentiation einer Funktion, welche aus linearen Funktionen einer Variabelen zusammengesetzt ist. Die beiden Fragen sind, wie leicht zu sehen, die nämlichen, weil die Differentiale der Variabelen in beiden Fällen konstant sind, und auch die aufeinander folgenden Differentiationen dasselbe Gesetz befolgen.

78. Die Gleichung 2) des vorigen Paragraphen gilt auch dann noch (§ 76), wenn $x, y, z, \ldots t$ nicht mehr die unabhängigen Variabelen bedeuten. Aber für die Formel 3) gilt das, sobald $n > 1$ ist, nicht mehr, ausser wenn $x, y, \ldots t$ lineare Funktionen der unabhängigen Variabelen sind. Im allgemeinen Falle sind $dx, dy, \ldots dt$ nicht mehr konstant, und um d^2u zu erhalten, muss man die Formel 2) so differentiieren, dass dabei jedes Glied als ein Produkt von zwei variabelen Faktoren behandelt wird. Da die Regel für Differentiation von Produkten auf totale Differentiale anwendbar ist, so erhält man

$$d^2u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \cdots \frac{\partial u}{\partial t} dt\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} d^2x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2y + \cdots \frac{\partial u}{\partial t} d^2t\right),$$

wobei der erste Teil der rechten Seite, welcher von den Differentialen höherer Ordnung unabhängig ist, symbolisch geschrieben und demgemäss zu deuten ist. Auf demselben Wege sind die totalen Differentiale $d^3u, d^4u \ldots$ zu bestimmen.

Meistens aber ist es zweckmässiger, die verschiedenen partiellen Differentiale, aus denen das totale schliesslich zusammenzusetzen ist, gesondert zu bestimmen, wodurch die Aufgabe sich immer nur auf die Betrachtung von Funktionen reduziert, die von einer einzigen Variabelen abhängen. Denn wenn $\xi, \eta, \ldots \omega$ die unabhängigen Variabelen bezeichnen und man will

$$\frac{\partial^n u}{\partial \xi^\alpha \, \partial \eta^\beta \ldots}$$

berechnen, so wird man die Gleichung für u,

$$u = f(x, y, z, \ldots t),$$

erst α-mal nach ξ differentiieren, wodurch $\frac{\partial^\alpha u}{\partial \xi^\alpha}$ erhalten wird; alsdann wird dieser Ausdruck β-mal nach η differentiiert, was $\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial \xi^\alpha \, \partial \eta^\beta}$ ergiebt u. s. w.

Das totale Differential bei impliciten Funktionen von mehreren unabhängigen Variabelen.

79. Der allgemeinste Fall impliciter Funktionen ist der, bei welchem m Gleichungen zwischen n unabhängigen Variabelen und m Funktionen derselben gegeben sind. Werden die rechten

Seiten dieser Gleichungen auf 0 gebracht, so sind die linken zusammengesetzten Funktionen der n Variabelen, welche durchaus den Wert 0 haben. Folglich sind die totalen Differentiale dieser Funktionen insgesamt gleich 0. Man kann also durch successive Differentiation aus den gegebenen Gleichungen neue ableiten, aus denen sich die totalen Differentiale erster Ordnung berechnen lassen; ferner sind aus diesen die totalen Differentiale zweiter Ordnung zu bestimmen, und so fort.

80. Anstatt aber direkt die totalen Differentiale zu bestimmen, kann man auch getrennt zuerst die verschiedenen partiellen Ableitungen berechnen, welche in den Ausdrücken für jene auftreten, und die Berechnung der partiellen Ableitungen erfolgt nach der Regel für implicite Funktionen einer unabhängigen Variabelen.

Betrachten wir z. B. eine Funktion z der Variabelen x, y, welche mit diesen durch eine gegebene Gleichung

$$1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

verbunden ist. Sind p und q die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, so hat man

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

ebenso hat man, wenn man mit r, s, t die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung bezeichnet $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

$$d^2 z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

immer unter der Voraussetzung, dass $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ u. s. w.

Dabei ist zu bemerken, dass für die totalen Differentiale von p und q, nämlich dp und dq die Gleichungen bestehen:

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy.$$

Um nun p und q zu ermitteln, differentiiere man die gegebene Gleichung, indem man zuerst x, sodann y als die einzige Variabele ansieht; man erhält auf diese Weise nach § 46

$$2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

wenn $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ für ein zusammengehöriges Wertsystem von x, y und z bestimmte Werte haben, und ausserdem $\frac{\partial f}{\partial z}$ nicht gerade gleich 0 ist und sich bei zusammengehörigen Werten von x und z, y und z stetig ändert. Hieraus folgt:

$$3)\qquad p = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}},\quad q = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Um r, s, t zu finden, genügt es die Gleichungen 2) oder 3) zu differentiieren. Durch Differentiation der Gleichungen 2) zuerst nach x, sodann nach y, ergeben sich die Gleichungen:

$$4)\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + p^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + r\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + q\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + p\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} + pq\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + s\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2q\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} + q^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + t\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion f bestimmte Werte haben, und dass sich die gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}$ mit x und z, resp. mit y und z stetig ändern. Dann ergiebt die Differentiation der ersten Gleichung 2) nach y dasselbe Resultat wie die Differentiation der zweiten Gleichung nach x, nämlich die mittlere der Gleichungen 4).

Die Differentiation der Gleichungen 4) liefert die partiellen Ableitungen dritter Ordnung u. s. w.

81. Beispiel: Aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

folgt:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

und man findet nacheinander

$$x + pz = 0, \quad y + qz = 0,$$

sodann

$$1 + p^2 + rz = 0, \quad pq + sz = 0, \quad 1 + q^2 + tz = 0.$$

Hiernach ist

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z}, \quad r = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}, \quad s = -\frac{xy}{z^3}, \quad t = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}.$$

Die Elimination willkürlicher Funktionen.

82. In der Theorie der Funktionen einer einzigen Variabelen wurde gezeigt, wie man durch Differentiation und Elimination willkürlicher Konstanten *Differentialgleichungen* oder Systeme von *simultanen Differentialgleichungen* bilden kann. Eine analoge Frage entsteht bei der Untersuchung von Funktionen mehrerer Variabelen. Aber hier sind die willkürlichen Grössen, welche man eliminieren kann, nicht bloss Konstante, sondern auch Funktionen. Die Differentialgleichungen, welche man auf diesem Wege erhält, werden *partielle Differentialgleichungen* genannt. Im folgenden wollen wir uns auf die Elimination einer einzigen willkürlichen Funktion beschränken. Die partielle Differentialgleichung wird dann von der *ersten Ordnung* werden.

Wir betrachten zunächst drei Variabele x, y, z, von denen die beiden ersten unabhängige sind. Während u und v *bestimmt gegebene* Funktionen dieser Variabelen sein sollen, bezeichne $\Phi(u, v)$ eine *willkürliche* Funktion von u und v. Wir nehmen an, dass die Variabele z mit x und y durch die Gleichung

$$\Phi(u, v) = 0 \tag{1}$$

verbunden ist und stellen nun die Aufgabe, zwischen x, y, z und den partiellen Ableitungen von z eine Gleichung zu

ermitteln, die ganz unabhängig ist von der besonderen Art der Funktion Φ.

Man kann, wenn man will, annehmen, dass die Gleichung 1) aufgelöst ist nach v; so hat man

$$v = \varphi(u),$$

und da die Funktion Φ willkürlich ist, so ist es auch die Funktion φ. Übrigens hat man keinen Grund, diese letzte Formel der ersten vorzuziehen.

Die Ableitungen der Funktionen u und v nach x sind, nach der Regel § 33:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z},$$

ebenso sind die Ableitungen nach y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z},$$

indem man, wie in § 80

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

setzt. Die Gleichung 1) werde nun nach x differentiiert, dabei wird der willkürlichen Funktion Φ die Beschränkung auferlegt, dass sie die partielle Differentiation nach u und v zulässt, und dass ihre partiellen Ableitungen stetige Funktionen von u und v sind. Dann hat man

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + p\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + p\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + q\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} + q\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen, homogen in Bezug auf $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$, lassen sich diese Grössen eliminieren und es folgt:

$$3)\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.$$

Führt man die Multiplikationen hier aus und setzt

$$P = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$V = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

so wird die Gleichung 3)

$$4) \qquad Pp + Qq = V.$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche wir bilden wollten; sie ist *linear* in Bezug auf die partiellen Ableitungen p und q. P, Q, V bezeichnen bestimmt gegebene Funktionen der drei Variabelen x, y, z.

83. Das Resultat lässt sich auf eine beliebige Zahl von unabhängigen Variabelen ausdehnen. Bezeichnen

$$z, x_1, x_2, \dots x_n$$

$n+1$ Veränderliche, von denen die n letzten unabhängige sind, und setzt man

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \dots p_n\,dx_n,$$

so ergiebt, wenn

$$u_1, u_2, \dots u_n$$

n bestimmt gegebene Funktionen der Variabelen $z, x_1, \dots x_n$ sind, die Gleichung

$$1) \qquad \Phi(u_1, u_2, \dots u_n) = 0$$

durch Differentiation und Elimination der willkürlichen Funktion Φ, eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche in Bezug auf die Ableitungen $p_1, p_2, \dots p_n$ linear ist. Denn man erhält, indem man nacheinander in Bezug auf jede der unabhängigen Variabelen differentiiert,

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) + \cdots \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial u_n}{\partial z}\right) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) + \cdots \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial u_n}{\partial z}\right) = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) + \cdots \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial u_n}{\partial z}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Bezeichnet man mit D die Determinante n^{ter} Ordnung:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_n}{\partial z} \end{vmatrix}$$

so wird die Gleichung, welche man durch Elimination der Grössen $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}$ aus dem Systeme 2) erhält:

$$D = 0.$$

Es sei Δ die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

und Δ_m die Determinante, die aus Δ hervorgeht, wenn man die Elemente der m^{ten} Horizontalzeile, nämlich

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_m} \; \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial x_m}$$

durch die Elemente

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} \; \frac{\partial u_2}{\partial z} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial z} \tag{3}$$

ersetzt. Es leuchtet ein, dass, wenn man die erste Horizontalzeile von Δ durch die erste Zeile von D ersetzt, eine neue Determinante $\Delta^{(1)}$ erhalten wird, für welche die Gleichung besteht:

$$\Delta^{(1)} = \Delta + p_1 \Delta_1.$$

Ersetzen wir in $\Delta^{(1)}$ die zweite Horizontalzeile durch die zweite Zeile von D, so wird eine neue Determinante $\Delta^{(2)}$ gewonnen. Durch diese Änderung wird aber Δ verwandelt in

$\Delta + p_2 \Delta_2$, während $p_1 \Delta_1$ sich nicht ändert, denn die Grösse, um welche es sich ändern müsste, ist eine Determinante, in welcher zwei Horizontalzeilen zusammengesetzt sind aus Elementen, die den Grössen 3) proportional sind, und die folglich den Wert 0 hat. So erhält man

$$\Delta^{(2)} = \Delta + p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2.$$

Ersetzt man nun in $\Delta^{(2)}$ die dritte Horizontalzeile durch die dritte Zeile von D, so bekommt man eine Determinante $\Delta^{(3)}$, deren Wert gleich ist

$$\Delta^{(3)} = \Delta + p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2 + p_3 \Delta_3,$$

und fährt man so fort, so erhält die Determinante $\Delta^{(n)}$ den Wert D und es ist

$$4) \qquad D = \Delta + p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2 + \dots p_n \Delta_n = 0$$

die gesuchte partielle Differentialgleichung.

84. Lehrsatz über homogene Funktionen. Eine Funktion mehrerer Variabelen heisst *homogen*, wenn die Multiplikation aller Variabelen mit einem Faktor t bewirkt, dass die Funktion sich bis auf einen Faktor t^m reproduziert. Der Exponent m kann eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl, auch gleich 0 sein; er heisst der *Grad der homogenen Funktion*. Demnach hat man, wenn $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ eine homogene Funktion ist, für jeden Wert von t, d. h. identisch

$$t^m f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x_1 t, x_2 t, \dots x_n t).$$

Setzt man insbesondere $t = \frac{1}{x_n}$, so ist

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = x_n^m f\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right).$$

Es kann also jede homogene Funktion z von n Variabelen in der Form dargestellt werden:

$$z = x_n^m F\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

Vermittelst der partiellen Ableitungen kann man die nämliche Eigenschaft homogener Funktionen ausdrücken, und zu diesem Zwecke hat man nur nach der Methode des vorigen

Paragraphen die willkürliche Funktion F zu eliminieren. Setzt man also

$$u_n = \frac{z}{x_n^m}, \; u_1 = \frac{x_1}{x_n}, \; u_2 = \frac{x_2}{x_n}, \dots \; u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n},$$

so ist auf die Gleichung

$$u_n = F(u_1, u_2, \dots u_{n-1})$$

die vorige Regel zu übertragen. Es wird durch partielle Differentiation nach den n unabhängigen Variabelen

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots \; \frac{\partial u_n}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \dots \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n},$$

also

$$\frac{p_1}{x_n^m} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{1}{x_n}, \dots \; \frac{p_{n-1}}{x_n^m} = \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} \frac{1}{x_n},$$

$$\frac{p_n}{x_n^m} - m \frac{z}{x_n^{m+1}} = -\left[\frac{\partial F}{\partial u_1} \cdot \frac{x_1}{x_n^2} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{x_2}{x_n^2} \dots \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_n^2}\right].$$

Addiert man diese Gleichungen, nachdem man die $n-1$ ersten bezüglich mit $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots \frac{x_{n-1}}{x_n}$ multipliziert hat, so folgt:

$$mz = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots p_n x_n,$$

oder

$$mF(x_1, x_2, \dots x_n) = x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \cdots x_n \frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Multipliziert man die partiellen Ableitungen einer homogenen Funktion m*ten Grades mit den entsprechenden Variabelen und bildet die Summe mit diesen Produkten, so ist dieselbe gleich dem* m*-fachen der homogenen Funktion.*

Folgerung. *Die partiellen Ableitungen einer homogenen Funktion* m^{ten} *Grades sind selbst homogene Funktionen vom Grade* $m-1$.

Dies folgt unmittelbar aus den Formeln

$$p_1 = x_n^{m-1} \frac{\partial F}{\partial u_1} \dots,$$

denn $\frac{\partial F}{\partial u_1}$ ist eine Funktion von $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$.

85. Die Elimination, mit welcher wir uns bisher beschäftigt haben, führt auf partielle Differentialgleichungen, die in Bezug auf die Variabelen linear sind. Wir wollen nun noch den allgemeinen Prozess aufdecken, durch welchen, wie in der Integralrechnung gezeigt werden wird, alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ableitbar sind.

Zunächst untersuchen wir den Fall dreier Variabelen x, y, z, von denen die beiden ersten die unabhängigen sind, und setzen wieder

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Es sei α ein veränderlicher Parameter, $\varphi(\alpha)$ eine willkürliche Funktion dieses Parameters und

$$V = f[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)]$$

eine bestimmt gegebene Funktion dieser fünf Grössen: $x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)$.

Wir betrachten das System der beiden Gleichungen:

$$1) \qquad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0.$$

Wenn die willkürliche Funktion $\varphi(\alpha)$ fixiert ist und man die Elimination von α zwischen den beiden Gleichungen 1) ausführen kann, so erhält man eine Gleichung zwischen den drei Variabelen x, y, z. Aber selbst wenn die Funktion φ ganz willkürlich bleibt, so kann man doch z als eine Funktion von x und y betrachten, welche durch das System der Gleichungen 1) bestimmt ist. Nun stellen wir uns die Aufgabe, die Funktion φ vermittelst Differentiation aus den Gleichungen 1) zu eliminieren. Dabei kann man so zu Werke gehen, wie wenn die Elimination von α ausgeführt wäre, d. h. man hat in der Gleichung $V = 0$ α als eine Funktion der Variabelen x, y, z zu betrachten, die durch die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0$ bestimmt ist. Bildet man dann noch das totale Differential der ersten Gleichung, so wird

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz + \frac{\partial V}{\partial \alpha}d\alpha = 0.$$

Das letzte Glied dieser Summe verschwindet aber zufolge der zweiten Gleichung 1), und wenn man dz durch seinen

Wert $p\,dx + q\,dy$ ersetzt, so hat man die Koeffizienten der beiden willkürlichen Differentiale dx und dy einzeln gleich 0 zu setzen. Es wird also

$$2)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Jetzt kann man α und $\varphi(\alpha)$ zwischen den beiden Gleichungen 2) und der ersten Gleichung 1) eliminieren. Auf diese Weise erhält man eine Gleichung

$$3)\qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

welche die partiellen Ableitungen erster Ordnung enthält und im übrigen von ganz allgemeiner Form ist. Es wird später gezeigt werden, dass, wenn x, y, z geradlinige Koordinaten bedeuten, die Gleichung 3) solch eine Eigenschaft der Tangentialebene ausdrückt, welche allen Flächen gemeinsam ist, die durch die Gleichungen 1) dargestellt werden.

86. Beispiel. Ist

$$V = (x-\alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + z^2 - R^2,$$

und R eine Konstante, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2(x-\alpha),\quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2[y-\varphi(\alpha)],\quad \frac{\partial V}{\partial z} = 2z.$$

Die Gleichungen 2) des vorigen Paragraphen sind also

$$x - \alpha + pz = 0,\quad y - \varphi(\alpha) + qz = 0.$$

Entnimmt man hieraus die Werte $x - \alpha = -pz$, $y - \varphi(\alpha) = -qz$, um sie in die gegebene Gleichung zu substituieren, so folgt

$$(1 + p^2 + q^2)z^2 = R^2,$$

oder

$$z = \frac{R}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

welches die partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist, um die es sich handelt.

87. Gehen wir nun zum allgemeinen Fall über. Es seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ die unabhängigen Variabelen, z die ab-

hängige, welche man oft auch die Hauptvariabele nennt, und es sei

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots p_n\,dx_n.$$

Andererseits seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, $n-1$ veränderliche Parameter und $\alpha = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})$ eine willkürliche Funktion derselben, endlich sei mit

$$V = f(z, x_1, x_2, \ldots x_n, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})$$

eine bestimmt gegebene Funktion der $n+1$ Variabelen und der $n-1$ Parameter, sowie der Funktion α bezeichnet.

Wir betrachten die n Gleichungen

$$1) \qquad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}} = 0,$$

welche $z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bestimmen; und es handelt sich darum, eine partielle Differentialgleichung zu bilden, welche unabhängig ist von der willkürlichen Funktion α.

Der Weg, welcher einzuschlagen ist, bleibt derselbe wie in § 85. Das totale Differential von V muss 0 sein, und man hat

$$\frac{\partial V}{\partial z}\,dz + \frac{\partial V}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\,dx_n + \frac{\partial V}{\partial \alpha_1}\,d\alpha_1 + \cdots \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}}\,d\alpha_{n-1} = 0.$$

Dabei sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}}$ so zu bilden, dass dabei α als Funktion von $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ anzusehen ist. Da die Koeffizienten von $d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$ gleich 0 sind zufolge der Gleichungen 1), so ist

$$\frac{\partial V}{\partial z}\,dz + \frac{\partial V}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\,dx_n = 0.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung dz durch

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots p_n\,dx_n,$$

so müssen, da die Differentiale $dx_1 \ldots dx_n$ ganz willkürlich bleiben, ihre Koeffizienten einzeln gleich 0 sein, und man erhält:



$$2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Eliminiert man jetzt $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$ zwischen den n Gleichungen 2) und der ersten Gleichung 1), so resultiert eine Gleichung

$$3)\qquad F(z, x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n) = 0,$$

welche die gesuchte partielle Differentialgleichung ist.

Die Änderung der unabhängigen Variabelen.

88. Wir stellen folgendes Problem:

In eine Funktion u *der* m *Variabelen* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_m$ *werden diese als Funktionen von* m *neuen Variabelen* $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$ *eingeführt; dadurch wird* u *eine Funktion dieser neuen Variabelen. Es sollen nun die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_1}, \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_m},$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_2}, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_3}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_2^2} \dots$$

als Funktionen der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \xi_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \xi_m},$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \xi_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \xi_1 \partial \xi_3}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \xi_2^2}, \dots$$

ausgedrückt werden.

Wenn die ursprünglichen Variabelen $x_1, x_2, \dots x_m$ als Funktionen der neuen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$ gegeben sind, so sind auch umgekehrt die letzteren als bekannte Funktionen von $x_1 \dots x_m$ anzusehen. Betrachtet man also u als eine Funktion von

von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ und diese als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_m$, so wird die Lösung der gestellten Aufgabe direkt nach der Regel für die Differentiation zusammengesetzter Funktionen gewonnen. Man hat

$$1)\qquad du = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots \frac{\partial u}{\partial \xi_m} d\xi_m,$$

ferner:

$$2)\qquad \begin{cases} d\xi_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \frac{\partial \xi_1}{\partial x_m} dx_m, \\ d\xi_2 = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \frac{\partial \xi_2}{\partial x_m} dx_m, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ d\xi_m = \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m} dx_m. \end{cases}$$

Da $\xi_1 \ldots \xi_m$ als Funktionen von $x_1 \ldots x_m$ gegeben sind, so sind auch die Ableitungen $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \cdots$ bekannte Funktionen von $x_1 \ldots x_m$, man muss dieselben aber ausdrücken in $\xi_1 \ldots \xi_m$. Substituiert man nun diese Werte in die Gleichung 1), so werden die Koeffizienten von $dx_1, dx_2, \ldots dx_m$ die gesuchten Ausdrücke für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

als Funktionen der Variabelen $\xi_1 \ldots \xi_m$, und der Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \cdots \frac{\partial u}{\partial \xi_m}.$$

Ebenso hat man bei den Ableitungen höherer Ordnung vorzugehen. So findet man

$$d\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_1}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_1}}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_1}}{\partial \xi_m} d\xi_m,$$

und nachdem man auf der rechten Seite für $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ den vorhin erhaltenen Wert, und für $d\xi_1 \ldots d\xi_m$ ihre Werte aus den Gleichungen 2) substituiert hat, werden die gesuchten Werte für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_m}$$

gewonnen. Führt man die nämliche Substitution in der Formel

$$d\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_2}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_2}}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \ldots \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_2}}{\partial \xi_m} d\xi_m$$

aus, so erhält man die Gleichungen für

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_m},$$

von denen die erste schon berechnet ist, u. s. w.

Dieselbe Methode ist für Ableitungen jedweder Ordnung anwendbar.

89. Anwendungen. Die Punkte im Raume können sowohl durch drei rechtwinklige Koordinaten x, y, z, als auch durch drei Polarkoordinaten r, θ, ψ dargestellt werden; diese sind mit den ersteren durch die Gleichungen verbunden:

1) $x = r \sin\theta \cos\psi, \quad y = r \sin\theta \sin\psi, \quad z = r\cos\theta,$

oder

2) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}.$

Wenn nun eine Grösse u zunächst als eine Funktion von x, y, z gegeben ist, so sollen die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von u, nämlich die neun Grössen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x},$$

als Funktionen der neuen Variabelen r, θ, ψ und der zu diesen gehörigen partiellen Ableitungen ausgedrückt werden.

Man folgert aus den Gleichungen 2):

$$dr = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\sin\theta\, d\theta = \frac{z(x\,dx + y\,dy) - (x^2 + y^2)\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{\cos\psi^2}\, d\psi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2},$$

oder, vermittelst der Gleichungen 1):

$$3)\begin{cases} dr = \sin\theta\cos\psi\, dx + \sin\theta\sin\psi\, dy + \cos\theta\, dz, \\ d\theta = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\psi\, dx + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\psi\, dy - \frac{1}{r}\sin\theta\, dz, \\ d\psi = -\frac{1}{r}\frac{\sin\psi}{\sin\theta}dx + \frac{1}{r}\frac{\cos\psi}{\sin\theta}dy. \end{cases}$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichung

$$du = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial u}{\partial\psi}d\psi,$$

so erhält man:

$$4)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\sin\psi + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\cos\psi}{r\sin\theta}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}. \end{cases}$$

Man muss jetzt die totalen Differentiale von

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z}$$

bilden, oder was auf dasselbe hinauskommt, die partiellen Ableitungen dieser Funktionen nach r, θ, ψ. Man findet:

$$5)\begin{cases} \frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta} \\ \qquad - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\sin\psi}{r^2\sin\theta}, \\ \frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta} \\ \qquad + \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta\cos\psi - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r\sin^2\theta}, \\ \frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\psi} = \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta} \\ \qquad - \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\sin\psi - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\cos\psi}{r\sin\theta}; \end{cases}$$

$$6)\begin{cases}
\dfrac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial r}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta\sin\psi+\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\dfrac{\cos\theta\sin\psi}{r}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\dfrac{\cos\psi}{r\sin\theta}\\
\qquad-\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\cos\theta\sin\psi}{r^2}-\dfrac{\partial u}{\partial\psi}\dfrac{\cos\psi}{r^2\sin\theta},\\
\dfrac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial\theta}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\sin\theta\sin\psi+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\dfrac{\cos\theta\sin\psi}{r}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\dfrac{\cos\psi}{r\sin\theta}\\
\qquad+\dfrac{\partial u}{\partial r}\cos\theta\sin\psi-\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\sin\theta\sin\psi}{r}-\dfrac{\partial u}{\partial\psi}\dfrac{\cos\psi\cos\theta}{r\sin^2\theta},\\
\dfrac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial\psi}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\sin\theta\sin\psi+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\dfrac{\cos\theta\sin\psi}{r}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\dfrac{\cos\psi}{r\sin\theta}\\
\qquad+\dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\cos\psi+\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\cos\theta\cos\psi}{r}-\dfrac{\partial u}{\partial\psi}\dfrac{\sin\psi}{r\sin\theta};
\end{cases}$$

$$7)\begin{cases}
\dfrac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial r}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\theta-\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\dfrac{\sin\theta}{r}+\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\sin\theta}{r^2},\\
\dfrac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\theta}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\cos\theta-\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\dfrac{\sin\theta}{r}-\dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\theta-\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\cos\theta}{r},\\
\dfrac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\psi}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\cos\theta-\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\dfrac{\sin\theta}{r}.
\end{cases}$$

Addiert man die Gleichungen 5), nachdem man sie zuvor mit den Gleichungen 3) multipliziert hat, so erhält man das totale Differential von $\frac{\partial u}{\partial x}$, und die Koeffizienten von dx, dy, dz werden die gesuchten Werte von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}.$$

Ebenso erhält man die weiteren partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, wenn man die Gleichungen 6) oder 7) mit 3) multipliziert und jedesmal addiert. Man findet so:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta\cos^2\psi+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\psi}{r}-2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi}{r^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin\theta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\sin^2\psi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi+\sin^2\psi}{r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\sin^2\psi-2\sin^2\theta\cos^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta}+2\frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\cos^2\psi-\sin^2\psi}{r}$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{(\cos^2\psi-\sin^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta}-\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(1+2\sin^2\theta)\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin\theta}-\frac{\partial u}{\partial}\frac{\cos^2\psi-\sin^2\psi}{r^2\sin^2\theta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta\cos\psi+\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos\psi}{r}-\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r\sin\theta}$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\sin\psi}{r^2}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos\psi}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta\sin^2\psi+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\psi}{r}+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi}{r^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin\theta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\cos^2\psi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi+\cos^2\psi}{r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\cos^2\psi-2\sin^2\theta\sin^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta}-2\frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta\sin\psi+\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\psi}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r\sin\theta}$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\cos\psi}{r^2}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\psi}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta-2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r}+2\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

90. Man kann die bei der Änderung von Variabelen notwendigen Rechnungen oftmals abkürzen, indem man sich gewisser, den Problemen angemessener Kunstgriffe bedient. Wir halten es für nützlich, von solchen Vereinfachungen klaren Begriff zu geben, indem wir eine Aufgabe behandeln, die in verschiedenen mathematischen Theorien vorkommt. Es soll der Ausdruck

$$1)\qquad S = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

transformiert werden, indem an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z die Polarkoordinaten r, θ, ψ eingeführt werden. Man kann diese Aufgabe direkt dadurch lösen, dass man die Formeln des vorigen Paragraphen benutzt. Aber wir wollen sie ausführen, ohne auf diese Formeln zurückzugehen.

Zu dem Zwecke führen wir an Stelle von x, y zunächst zwei Variabele ϱ und ψ ein, derart dass

$$x = \varrho \cos\psi, \quad y = \varrho \sin\psi,$$

oder

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}.$$

Hieraus folgert man:

$$d\varrho = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\psi\,dx + \sin\psi\,dy,$$

$$d\psi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\cos^2\psi = -\frac{\sin\psi}{\varrho}\,dx + \frac{\cos\psi}{\varrho}\,dy.$$

Diese Gleichungen bestimmen $\frac{\partial\varrho}{\partial x}, \frac{\partial\varrho}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}$, und man findet:

$$2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \varrho}\cos\psi - \dfrac{\partial u}{\partial \psi}\,\dfrac{\sin\psi}{\varrho}, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \varrho}\sin\psi + \dfrac{\partial u}{\partial \psi}\,\dfrac{\cos\psi}{\varrho}. \end{cases}$$

Summiert man diese Gleichungen, nachdem man die zweite mit $\sqrt{-1}$ multipliziert hat, so folgt

$$3)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial u}{\partial y} = (\cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)$$

Bezeichnet man mit v den Wert jeder Seite dieser Gleichung, so folgt, da diese Formel für jede Funktion u und unabhängig von dem Vorzeichen von $\sqrt{-1}$ Geltung hat, wenn man u durch v ersetzt, und statt $\sqrt{-1}$ die Formel $-\sqrt{-1}$ schreibt:

$$4)\quad \frac{\partial v}{\partial x}-\sqrt{-1}\,\frac{\partial v}{\partial y}=(\cos\psi-\sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial v}{\partial\varrho}-\frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\,\frac{\partial v}{\partial\psi}\right).$$

Aus der Gleichung

$$v=\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{-1}\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

folgt

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sqrt{-1}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\sqrt{-1}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

also

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\sqrt{-1}\,\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Ferner ergiebt die Gleichung:

$$v=(\cos\psi+\sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial u}{\partial\varrho}+\frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial\psi}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial\varrho}=(\cos\psi+\sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho^2}+\frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho\,\partial\psi}-\frac{\sqrt{-1}}{\varrho^2}\,\frac{\partial u}{\partial\psi}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial\psi}=(\cos\psi+\sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho\,\partial\psi}+\frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\right)$$

$$-(\sin\psi-\sqrt{-1}\cos\psi)\left(\frac{\partial u}{\partial\varrho}+\frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial\psi}\right),$$

folglich ist

$$(\cos\psi-\sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial v}{\partial\varrho}-\frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\,\frac{\partial v}{\partial\psi}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}+\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial\varrho},$$

und man hat

$$5)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}+\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial\varrho},$$

also

$$6)\quad S=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}+\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial\varrho}.$$

Um die Lösung zu vervollständigen, sind nun noch an Stelle der Variabelen ϱ und z die neuen Variabelen r und θ vermittelst der Gleichungen

$$z = r\cos\theta, \quad \varrho = r\sin\theta$$

einzuführen. Da nun z und ϱ von r und θ ebenso abhängen, wie x und y von ϱ und ψ, so folgt gemäss der Gleichung 5)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

und ebenso schliesst man aus der zweiten der Gleichungen 2)

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}.$$

Man erhält demnach, indem man die Ausdrücke in die Gleichung 6) substituiert und ϱ durch $r\sin\theta$ ersetzt:

$$S = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}$$
$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right),$$

$$S = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Die ersten beiden Glieder dieses Ausdruckes stellen mit r multipliziert die Ableitung $\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$ dar; die beiden letzten Terme sind mit $r^2\sin\theta$ multipliziert die Ableitung

$$\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta}.$$

Man hat also

$$r^2 S = r\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta}.$$

Es ist bei Anwendungen dieser Formel häufig zweckmässig

$$\cos\theta = \mu$$

als Variabele an Stelle von θ einzuführen. Dann hat man

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial \theta} = -\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \mu} \quad \text{oder} \quad \sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} = -(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}.$$

Demnach:

$$\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\partial\mu} = \sin\theta\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu}$$

und man erhält schliesslich den Ausdruck für S als Funktion der unabhängigen Variabelen r, μ, ψ:

$$r^2 S = r\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu}.$$

Die Änderung aller Variabelen.

91. Wenn man die abhängige oder Hauptvariabele gleichzeitig mit den unabhängigen verändern will, so ist das nämliche Verfahren einzuschlagen. Nehmen wir an, dass in einer Rechnung eine Variabele z als Funktion von m unabhängigen Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_m$ eingeht, und dass man an ihre Stelle eine andere Variabele ζ, welche von m neuen unabhängigen Variabelen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ abhängt, einführen will; dann handelt es sich darum, die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}, \ldots$$

als Funktionen der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_1}, \frac{\partial\zeta}{\partial\xi_2}, \ldots \frac{\partial\zeta}{\partial\xi_m}, \frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi_1^2}, \frac{\partial^2\xi}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\ldots$$

auszudrücken.

Hierbei sind die $m+1$ Variabelen des einen Systemes gegeben als Funktion der $m+1$ Variabelen des anderen. Also $\zeta, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ sind gegebene Funktionen von $z, x_1, x_2, \ldots x_m$, und die totalen Differentiale sind also von der Form:

$$d\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial z}dz + \frac{\partial\zeta}{\partial x_1}dx_1 + \cdots \frac{\partial\zeta}{\partial x_m}dx_m,$$

$$d\xi_1 = \frac{\partial\xi_1}{\partial z}dz + \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}dx_1 + \cdots \frac{\partial\xi_1}{\partial x_m}dx_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d\xi_m = \frac{\partial\xi_m}{\partial z}dz + \frac{\partial\xi_m}{\partial x_1}dx_1 + \cdots \frac{\partial\xi_m}{\partial x_m}dx_m.$$

Die partiellen Ableitungen sind bekannte Funktionen der Variabelen $z, x_1 \dots x_m$. Da aber z eine Funktion von $x_1, x_2 \dots x_m$ ist, so hat man

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \frac{\partial z}{\partial x_m} dx_m,$$

und folglich ist:

$$1) \left\{ \begin{aligned} d\zeta &= \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_m}\right) dx_m, \\ d\xi_1 &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_m}\right) dx_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\xi_m &= \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m} + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m}\right) dx_m. \end{aligned} \right.$$

Setzt man jetzt diese Werte in die Gleichung

$$2) \qquad d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m} d\xi_m,$$

so erhält man eine Gleichung, welche bei allen Werten von $dx_1 \dots dx_m$ bestehen muss, und welche sich daher in m Gleichungen zerlegt, nämlich:

$$3) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} \\ &\quad + \cdots \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} \\ &\quad + \cdots \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_m} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} \\ &\quad + \cdots \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m} + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m}. \end{aligned} \right.$$

Man kann $\frac{\partial \zeta}{\partial z}, \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial \xi_1}{\partial z}, \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdots$ in Funktion der Variabelen $\zeta, \xi_1 \ldots \xi_m$ ausdrücken, und diese Gleichungen ergeben alsdann die Werte der Funktionen $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial z}{\partial x_m}$ in der gesuchten Form.

Um zu den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung überzugehen, genügt es die Gleichungen 3) zu differentiieren. Betrachten wir z. B. die erste Gleichung in diesem Systeme; wir differentiieren dieselbe total und ersetzen $d\frac{\partial z}{\partial x_1}$ durch

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} dx_2 + \cdots \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_m} dx_m.$$

Sodann ersetzen wir

$$d\zeta, d\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1}, \cdots d\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m}$$

durch ihre Werte:

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \cdots \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m} d\xi_m,$$

$$d\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1^2} d\xi_1 + \cdots \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_1 \partial \xi_m} d\xi_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_1 \partial \xi_m} d\xi_1 + \cdots \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_m^2} d\xi_m$$

und führen endlich für $d\xi_1 \ldots d\xi_m$ ihre Werte aus den Gleichungen 1) ein. Die Gleichung, die auf diese Weise gewonnen wird, gilt für beliebige Werte der Differentiale $dx_1 \ldots dx_m$. Sie zerfällt also in m Gleichungen, aus denen die m partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \cdots \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_m}$$

zu berechnen sind. Ebenso bestimmt man die anderen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} \cdots$$

Die Ableitungen höherer Ordnung werden dann auf demselben Wege gewonnen.

Schliesslich ist es auch leicht einzusehen, dass die im vorstehenden entwickelte Methode auf den Fall einer beliebigen Anzahl von abhängigen Variabelen anwendbar ist, wie gross auch immer die Zahl der unabhängigen Variabelen sein mag.

Die Transformation von Legendre.

92. Legendre hat bei gewissen Fragen eine Transformation angewandt, die oftmals von Vorteil ist und welche wir hier mitteilen wollen, indem wir uns auf den Fall zweier unabhängiger Variabelen beschränken.

Es sei z eine Funktion der unabhängigen Variabelen x, y; wir bezeichnen mit

$$1)\qquad dz = p\,dx + q\,dy$$

das Differential von z, und mit

$$2)\qquad \begin{aligned} dp &= r\,dx + s\,dy \\ dq &= s\,dx + t\,dy \end{aligned}$$

die Differentiale von p und q.

Setzt man

$$3)\qquad u = px + qy - z,$$

so hat man

$$du = (p\,dx + q\,dy - dz) + x\,dp + y\,dq,$$

also zufolge der Gleichung 1)

$$4)\qquad du = x\,dp + y\,dq.$$

Löst man andererseits die Gleichungen 2) nach dx und dy auf, so wird:

$$5)\qquad \begin{aligned} dx &= \frac{t}{rt - s^2}\,dp + \frac{-s}{rt - s^2}\,dq, \\ dy &= \frac{-s}{rt - s^2}\,dp + \frac{r}{rt - s^2}\,dq. \end{aligned}$$

Die Transformation von Legendre besteht darin, dass p, q, u als Variabele an Stelle von x, y, z eingeführt, und dass dabei p und q als unabhängige Variabele betrachtet werden.

Nun zeigt die Gleichung 4), dass x und y die partiellen Ableitungen von u nach p und q sind, so dass also

$$6)\qquad \frac{\partial u}{\partial p} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = y$$

ist; ferner zeigen die Gleichungen 5), dass $\frac{t}{rt - s^2}$, $\frac{-s}{rt - s^2}$, $\frac{r}{rt - s^2}$ bezüglich die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial x}{\partial p}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad \frac{\partial y}{\partial q}$$

sind. Man hat also

$$7)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p\, \partial q} = -\frac{s}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{r}{rt - s^2},$$

und hieraus schliesst man

$$8)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\, \partial q}\right)^2 = \frac{1}{rt - s^2}.$$

Die Gleichungen 7) und 8) liefern die Ableitungen r, s, t als Funktionen der Ableitungen von u nach p und q.

93. Will man x und p zu unabhängigen Variabelen nehmen, so sind die totalen Differentiale von y und q gemäss den Gleichungen 2):

$$dy = \frac{1}{s}\, dp - \frac{r}{s}\, dx,$$

$$dq = \frac{t}{s}\, dp - \frac{rt - s^2}{s}\, dx.$$

Die Gleichungen 1) und 4) lassen dann weiter die totalen Differentiale dz und du bestimmen:

$$dz = p\, dx + q\, dy = \left(p - \frac{qr}{s}\right) dx + \frac{q}{s}\, dp,$$

$$du = x\, dp + y\, dq = \left(x + \frac{yt}{s}\right) dp - \frac{rt - s^2}{s}\, y\, dx.$$

Aus den Formeln folgt insbesonders

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{rt - s^2}{s},$$

wenn p und x die unabhängigen Variabelen sind. Ist also die Differenz $rt - s^2$ identisch, d. h. bei allen Werten von x und y gleich 0, so hat man

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Daraus folgt, dass q nicht von x abhängt, und dass also diese Grösse nur eine Funktion von p ist. In diesem Falle können die Grössen p und q nicht als unabhängige Variabele gewählt werden; auch werden in der That die Transformationsformeln von Legendre alsdann illusorisch.

Fünftes Kapitel.

Entwickelung der Funktionen in Potenzreihen.

Einleitende Bemerkungen über Reihen.

94. *Unendliche Reihe* nennt man eine unbegrenzte Folge von Grössen, die nach irgend welchem Gesetze auf einander folgen. Wir werden uns hier nur mit solchen Reihen beschäftigen, in denen alle Glieder reelle Grössen sind.

Die Summe einer Reihe

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$$

oder auch kürzer die Reihe selbst heisst *konvergent*, wenn die Summe

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots u_{n-1}$$

der n ersten Glieder einer endlichen und bestimmten Grenze S zustrebt, während die Zahl n unbegrenzt wächst. Diese Grenze S heisst dann die *Summe* der Reihe; die Differenz $S - S_n$ ist der *Rest* der Reihe von der n^{ten} Stelle ab. Bezeichnet man diesen Rest mit R_n, so ist

$$S = S_n + R_n.$$

Die Reihe wird *divergent* genannt, wenn die Summe der n ersten Glieder, während n unbegrenzt zunimmt, über jede Grenze hinaus wächst, oder auch, wenn diese Summe überhaupt keiner bestimmten Grenze zustrebt.

So ist z. B. die geometrische Progression

$$a, ax, ax^2, ax^3, \ldots$$

eine konvergente Reihe, wenn der Betrag von x kleiner als 1 ist, denn es ist

$$S_n = a(1 + x + x^2 + \dots x^{n-1}) = \frac{a}{1-x} - \frac{a}{1-x} x^n,$$

und diese Summe konvergiert nach der Grenze

$$S = \frac{a}{1-x},$$

wenn n unendlich wird. Dieselbe Reihe ist aber eine divergente, wenn der absolute Wert von x grösser als 1 ist; denn in diesem Falle wächst S_n über jeden Betrag. Sie ist auch aus dem gleichen Grunde divergent für $x = +1$, und in dem Falle $x = -1$ besitzt

$$S_n = a[1 - 1 + 1 - 1 + \dots (-1)^{n-1}] = \begin{matrix} 1 \text{ wenn } n \text{ ungerade} \\ 0 \text{ wenn } n \text{ gerade} \end{matrix}$$

keine bestimmte Grenze; die Reihe kann daher nicht als konvergent betrachtet werden.

95. Lehrsatz I. *Ist die Reihe*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_{n-1} + \dots$$

konvergent, so hat die Summe

$$u_n + u_{n+1} + \dots u_{n+p-1}$$

die Grenze 0, *bei jedem Werte von* p, *wenn* n *unbegrenzt wächst.*

Denn bezeichnet S die Grenze, nach welcher die Summe

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots u_{n-1}$$

konvergiert, so hat die Differenz

$$1)\qquad S - S_n$$

die Grenze 0, bei beliebig wachsendem Werte von n; d. h. aber (§ 3) es lässt sich zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine untere Grenze für n bestimmen, so dass die Beträge der Differenzen

$$2)\qquad S - S_n,\ S - S_{n+1}, \dots, S - S_{n+p} \dots$$

sämtlich kleiner sind als δ. Subtrahiert man diese Differenzen von einander, so folgt, dass auch die Beträge von

$$S_{n+1} - S_n = u_n,$$
$$S_{n+2} - S_n = u_n + u_{n+1},$$
$$S_{n+3} - S_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$S_{n+p} - S_n = u_n + u_{n+1} + \dots u_{n+p-1}$$

sämtlich kleiner sind als 2δ; bei beliebig wachsenden Werten von n haben sie also die 0 zur Grenze. Hieraus erkennt man:

Erstens: Die einzelnen Glieder einer konvergenten unendlichen Reihe werden schliesslich kleiner als jede gegebene Zahl, sie konvergieren nach 0. Zweitens: Die Summe beliebig vieler Glieder, gebildet vom n^{ten} Gliede ab, konvergiert nach 0, wenn n unbegrenzt zunimmt.

96. Lehrsatz II. Umgekehrt:

Wenn die Summe

$$u_n + u_{n+1} + \dots u_{n+p-1}$$

für jedweden Wert von p *bei beliebig wachsendem Werte von* n *die Grenze* 0 *hat, so ist die Reihe*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_{n-1} + \dots$$

konvergent.

Dieser Satz, der unmittelbar aus der Definition eines bestimmten Grenzwertes (§ 3) hervorgeht, soll hier nochmals erörtert werden. Bezeichnen wir mit ε eine positive beliebig kleine Grösse, so kann man, da die Differenz

$$S_{n+p} - S_n = u_n + u_{n+1} + \dots u_{n+p-1}$$

für jedweden Wert von p mit beliebig wachsendem Werte von n nach 0 konvergiert, der Zahl n einen bestimmten hinreichend grossen Wert beilegen, derart, dass diese Differenz zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ gelegen ist, wie gross auch p sein mag. Man hat also

$$S_n - \varepsilon < S_{n+p} < S_n + \varepsilon.$$

Wird die Zahl n nicht geändert, wächst aber p über alle Grenzen, so bleibt die Summe S_{n+p} immer zwischen den zwei bestimmten Grössen $S_n - \varepsilon$ und $S_n + \varepsilon$ eingeschlossen, deren Unterschied 2ε dabei von vornherein so klein als man nur will gemacht werden kann. Mithin stellt S_{n+p}, wenn p, also auch $n + p$ unbegrenzt wachsen, eine bestimmte Grösse dar, von deren Grenze wir auch sagen, dass sie eine bestimmte ist, weil sie sich von einer bestimmten angebbaren Grösse beliebig wenig unterscheidet.

Man kann diese Überlegung zu deutlicher Anschauung bringen, wenn man ihr eine geometrische Form giebt. Es

sei O ein bestimmter Punkt auf einer Axe Ox. Wir tragen auf dieser Axe vom Punkte O aus eine Strecke $ON = S_n$ ab; alsdann machen wir $AN = NA' = \varepsilon$.

Fig. 8.

O A N P A' x

Wir nehmen sodann $OP = S_{n+p}$, so wird der Punkt P zwischen A und A' fallen. Also wird die Summe S_{n+p} der $n+p$ ersten Glieder unserer Reihe durch eine Strecke dargestellt, deren Endpunkt P immer zwischen zwei gegebene Punkte A und A' fällt. Sie ist also endlich; aber noch mehr, sie ist auch bestimmt, denn die Entfernung AA' kann durch Vergrösserung von n kleiner gemacht werden, als jede gegebene Länge.

Folgerung I. *Eine Reihe* $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ *ist konvergent, sobald die Beträge (absoluten Werte) ihrer Glieder eine konvergente Reihe bilden:* $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$

Denn wenn die Reihe $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$ konvergent ist, so hat die Summe $U_n + U_{n+1} + \ldots U_{n+p-1}$ die Grenze 0, bei jedem Werte von p, wenn n unbegrenzt wächst. Also muss auch die Summe $u_n + u_{n+1} + \ldots u_{n+p-1}$ die Null zur Grenze haben, denn ihr numerischer Wert kann nicht grösser sein als die vorige Summe. Daraus folgt, dass die vorgelegte Reihe konvergent ist.

Folgerung II. *Wenn von einer bestimmten Stelle ab die Glieder einer Reihe abwechselnd positiv und negativ sind, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe, dass die Beträge der Glieder schliesslich abnehmen und nach* 0 *konvergieren.*

Die Konvergenz der Reihenglieder nach 0 ist, wie gezeigt wurde, ein notwendiges Erfordernis für die Konvergenz jeder Reihe. Dasselbe reicht aber im allgemeinen für die Konvergenz nicht aus, auch dann nicht, wenn dabei die Reihenglieder von einer Stelle ab durchaus abnehmen, sodass jedes dem Betrage nach kleiner ist als das vorhergehende. In dem Falle, den wir jetzt untersuchen, ist die ausgesprochene Bedingung zugleich hinreichend.

Denn bezeichnen wir mit U_n den absoluten Betrag von u_n, so hat man, wenn von dem n^{ten} Gliede an die Reihenglieder abwechselnd positiv und negativ sind:

$\pm(u_n + u_{n+1} + \ldots u_{n+p-1}) = (U_n - U_{n+1} + U_{n+2} \ldots \pm U_{n+p-1}).$
Die rechte Seite dieser Gleichung kann auf zweierlei Weise folgendermassen angeordnet werden:

$$(U_n - U_{n+1}) + (U_{n+2} - U_{n+3}) + \ldots,$$

oder

$$U_n - (U_{n+1} - U_{n+2}) - (U_{n+3} - U_{n+4}) + \ldots$$

Die erste Summe ist, wie auch p gewählt sein mag, positiv, also grösser als 0; die zweite ist jedenfalls kleiner als U_n. Mithin liegt der Betrag von

$$(u_n + u_{n+1} + \ldots u_{n+p-1})$$

zwischen 0 und U_n, und konvergiert bei wachsenden Werten von n gleichzeitig mit U_n nach 0.

97. Es giebt kein allgemeines Kriterium, nach welchem man bei jedweder gegebenen Reihe entscheiden kann, ob sie konvergent oder divergent ist. Man muss vielmehr in jedem einzelnen Falle die zu betrachtende Reihe mit anderen Reihen zu vergleichen suchen, deren Konvergenz oder Divergenz feststeht, und in dieser Hinsicht lässt sich ein Satz beweisen, aus welchem wir mehrere wichtige Folgerungen ziehen werden. Dieser Satz bezieht sich auf Reihen, deren Glieder sämtlich positiv sind, aber die Regeln, die hieraus hervorgehen, sind auch auf andere Reihen anwendbar, indem man den Folgesatz I des § 96 benutzt.

Lehrsatz III. *Wenn von zwei Reihen:*

$$\mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + \ldots \mathrm{v}_{n-1} + \ldots,$$
$$\mathrm{u}_0 + \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \ldots \mathrm{u}_{n-1} + \ldots$$

deren Glieder von einer bestimmten Stelle ab sämtlich positiv sind, die erste konvergent ist, und wenn beständig

$$\mathrm{u}_n < \mathrm{v}_n$$

ist, für alle Werte von n *ab, die grösser sind als eine bestimmte Zahl, so ist auch die zweite Reihe konvergent.*

Wenn dagegen die erste Reihe divergent ist, und von einem bestimmten Werte von n *ab*

$$\mathrm{u}_n > \mathrm{v}_n$$

bleibt, so ist auch die zweite Reihe divergent.



Im ersten Falle konvergiert die Summe

$$v_n + v_{n+1} + \dots v_{n+p-1}$$

nach 0, bei jedem Werte von p, wenn n unbegrenzt wächst. Also hat auch die Summe

$$u_n + u_{n+1} + \dots u_{n+p-1},$$

welche aus kleineren Summanden besteht, ebenfalls die 0 zur Grenze, und mithin konvergiert die zweite Reihe.

Im zweiten Falle kann die Reihe $u_0 + u_1 + \dots$ nicht konvergent sein, denn sonst müsste nach dem eben Bewiesenen auch die erste Reihe konvergieren, was der Annahme zuwiderläuft.

Folgerung I. *Die Reihe* $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$, *deren Glieder schliesslich sämtlich positiv sind, ist konvergent, wenn für alle Werte von* n, *die grösser sind als eine bestimmte Zahl, der Quotient* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *kleiner bleibt als eine Zahl* k, *die selbst eine positive Grösse kleiner als* 1 *ist.*

Denn für hinreichend grosse Werte von n wird der Voraussetzung nach

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k, \dots \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < k,$$

also, wie durch Multiplikation hervorgeht,

$$\frac{u_{n+p}}{u_n} < k^p \quad \text{oder} \quad u_{n+p} < u_n k^p.$$

Hieraus folgt, dass die Glieder der vorgelegten Reihe von einer bestimmten Stelle ab, nämlich

$$u_n, \; u_{n+1}, \; \dots \; u_{n+p}, \dots$$

kleiner sind als die Glieder der Reihe

$$u_n, \; u_n k, \dots u_n k^p, \dots$$

Diese letztere aber ist eine konvergente geometrische Progression; also ist auch die vorgelegte Reihe konvergent.

Folgerung II. *Die Reihe* $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$, *deren Glieder schliesslich positiv sind, ist konvergent, wenn das Verhältnis* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *bei beliebig wachsendem Werte von* n *einer bestimmten Grenze* α *zustrebt, die kleiner ist als* 1.

Denn wenn das Verhältnis $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ eine Grenze α besitzt, so wird die Differenz $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \alpha$ schliesslich kleiner als jede gegebene Grösse, für alle Werte von n, die grösser sind, als eine bestimmte Zahl. Man kann also eine Grösse k zwischen α und 1 bezeichnen, derart, dass von einem bestimmten Werte von n ab das Verhältnis

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$$

bleibt. Dies aber ist die Bedingung des vorigen Satzes, und folglich ist die vorgelegte Reihe konvergent.

Bemerkung. Ist die Grenze des Verhältnisses $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ grösser als 1, so ist die Reihe stets divergent, weil ihre Glieder beständig wachsen und also nicht nach 0 konvergieren. Wenn aber $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ wird, so kann die Reihe konvergent sein; der letzte Satz sagt über diesen Fall nichts aus.

Folgerung III. *Die Reihe* $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$, *deren Glieder schliesslich positiv sind, ist konvergent, wenn für die Werte von* n, *welche grösser sind als eine bestimmte Zahl,* $\sqrt[n]{u_n} < k$ *bleibt, wobei* k *eine Grösse kleiner als* 1 *ist.*

Denn hat man von einer bestimmten Stelle ab

$$u_n < k^n,$$

so sind die Glieder der Reihe kleiner als die entsprechenden Glieder der geometrischen Progression

$$k^n,\ k^{n+1},\ k^{n+2}, \ldots$$

Folgerung IV. *Die Reihe* $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$, *deren Glieder schliesslich positiv sind, ist konvergent, wenn* $\sqrt[n]{u_n}$ *einer bestimmten Grenze zustrebt, die kleiner ist als* 1.

Denn man kann in diesem Falle eine Grösse k zwischen α und 1 bestimmen, so dass

$$\sqrt[n]{u_n} < k$$

bleibt, für alle Werte von n, die grösser als eine bestimmte Zahl sind.

98. Beispiel I. Wir betrachten die Reihe

$$\frac{1}{1^{1+\varrho}} + \frac{1}{2^{1+\varrho}} + \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \cdots \frac{1}{n^{1+\varrho}} + \cdots,$$

wobei ϱ eine gegebene Zahl bedeutet. Das Verhältnis

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\varrho}$$

hat den Wert 1 zur Grenze, und also reicht der zweite Folgesatz des vorigen Paragraphen für diesen Fall nicht aus. Auch der vierte Satz giebt keinen Aufschluss. Denn es ist

$$\sqrt[n]{u_n} = n^{-\frac{1+\varrho}{n}}, \quad \log \sqrt[n]{u_n} = -(1+\varrho)\frac{\log n}{n}.$$

Der Quotient $\frac{\log n}{n}$ konvergiert nach 0, wie man vermittelst einer Regel, die später bewiesen werden wird, finden kann, und folglich hat $\sqrt[n]{u_n}$ die Grenze 1. Eine geschickte Anwendung des Lehrsatzes 3 (§ 97) lässt uns dagegen bestimmen, in welchen Fällen die vorgelegte Reihe konvergiert.

Setzt man:

$$1)\quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{1^{1+\varrho}}, \\ u_1 = \dfrac{1}{2^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{3^{1+\varrho}}, \\ u_2 = \dfrac{1}{4^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{5^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{6^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{7^{1+\varrho}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m = \dfrac{1}{(2^m)^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{(2^m+1)^{1+\varrho}} \cdots \dfrac{1}{(2^{m+1}-1)^{1+\varrho}}, \end{cases}$$

so hat man, wie leicht zu sehen, die Beziehungen:

$$u_1 < 2 \cdot \frac{1}{2^{1+\varrho}}, \quad \text{oder} \quad < \frac{2}{2^\varrho},$$

$$u_2 < 4 \cdot \frac{1}{4^{1+\varrho}}, \quad \text{oder} \quad < \frac{1}{4^\varrho} = \frac{1}{(2^\varrho)^2},$$

. . . .

$$u_m < 2^m \cdot \frac{1}{(2^m)^{1+\varrho}}, \quad \text{oder} \quad < \frac{1}{(2^\varrho)^m};$$

folglich sind in der Reihe

$$u_0, u_1, u_2 \ldots u_m \ldots$$

die Glieder kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$1, \frac{1}{2^\varrho}, \frac{1}{(2^\varrho)^2}, \ldots \frac{1}{(2^\varrho)^m}.$$

Diese letztere aber ist konvergent, wenn ϱ grösser als 0 ist. Folglich konvergiert auch die vorgelegte Reihe bei jedem positiven Werte von ϱ.

Bildet man an Stelle der Formeln 1):

$$u_0 = \frac{1}{1^{1+\varrho}},$$

$$u_1 = \frac{1}{2^{1+\varrho}},$$

$$u_2 = \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \frac{1}{4^{1+\varrho}},$$

$$u_3 = \frac{1}{5^{1+\varrho}} + \frac{1}{6^{1+\varrho}} + \frac{1}{7^{1+\varrho}} + \frac{1}{8^{1+\varrho}},$$

. . . .

$$u_m = \frac{1}{(2^{m-1}+1)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(2^{m-1}+2)^{1+\varrho}} \cdots \frac{1}{(2^m)^{1+\varrho}},$$

. . . .

so hat man:

$$u_2 > 2 \cdot \frac{1}{4^{1+\varrho}}, \quad \text{oder} \quad > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2^\varrho)^2},$$

$$u_3 > 4 \cdot \frac{1}{8^{1+\varrho}}, \quad \text{oder} \quad > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2^\varrho)^3},$$

. . . .

$$u_m > 2^{m-1} \cdot \frac{1}{(2^m)^{1+\varrho}}, \quad \text{oder} \quad > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2^\varrho)^m},$$

. . . .

also sind die Glieder der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_m + \dots$$

grösser als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^\varrho} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^\varrho}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^\varrho}\right)^3 + \dots$$

Diese aber ist divergent, wenn ϱ gleich 0 oder auch negativ ist, also ist auch bei diesen Werten von ϱ die vorgelegte Reihe divergent.

99. Beispiele II. Die Reihen:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \frac{x^n}{1.2\dots n} + \dots,$$

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + - \dots$$

$$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\dots 5} - \frac{x^7}{1.2\dots 7} + - \dots$$

sind konvergent für jeden Wert von x. Sie bleiben konvergent, selbst wenn man jedes Glied durch seinen absoluten Wert ersetzt. Denn das Verhältnis der Beträge zweier aufeinander folgender Glieder hat in diesen Reihen den Wert

$$\frac{x}{n}, \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{n(n+1)},$$

und diese Grössen konvergieren bei jedem endlichen Werte von x nach 0, wenn n unendlich wächst.

100. Beispiel III. Die Reihe

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

konvergiert, wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt, denn hier ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{x}{1 + \frac{1}{n}}$$

und die Grenze für $n = \infty$ ist $-x$. Dass die Reihe divergiert, wenn der Betrag von x grösser als 1 wird, ist evident. Für $x = +1$ konvergiert die Reihe, weil ihre Glieder mit wechselndem Zeichen abnehmen und nach 0 konvergieren (§ 96, Folgesatz II), für $x = -1$ dagegen divergiert sie (§ 98).

101. Unter den konvergenten Reihen, deren Glieder nicht von einerlei Zeichen sind, muss man unterscheiden zwischen denjenigen, deren Konvergenz einzig und allein auf der Beschaffenheit der numerischen Werte der Glieder beruht, und denjenigen, bei welchen die Konvergenz zugleich von der Aufeinanderfolge der Vorzeichen abhängt. Die Reihen der ersten Art bleiben konvergent, wenn man jedes Glied durch seinen absoluten Betrag ersetzt, dahingegen die anderen divergent werden, wenn man allen Gliedern das nämliche Vorzeichen giebt. Es ist nun wichtig zu bemerken, dass die Summe einer konvergenten Reihe der zweiten Art von der Reihenfolge abhängt, in welcher man die Glieder der Reihe anordnet.

Betrachten wir z. B. die Reihe

$$1) \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots,$$

welche selbst konvergiert (§ 96), dagegen divergent wird, wenn man allen Gliedern das positve Zeichen giebt (§ 98). Wir bilden eine zweite Reihe mit denselben Gliedern, indem wir die negativen derart verschieben, dass einem jeden derselben zwei positive vorangehen und nachfolgen. Diese zweite Reihe wird also

$$2) \qquad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Sie ist konvergent, hat aber nicht denselben Summenwert wie die erste.

Vereinigt man nämlich drei aufeinander folgende Glieder

$$\frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{2n},$$

so ist ihre Summe

$$\frac{8n-3}{32n^3 - 32n^2 + 6n},$$

also kleiner als $\frac{1}{n^2}$, weil n gleich oder grösser ist als 1. Schreibt man also die obige Reihe in dieser Weise, so bleiben ihre Glieder stets kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots,$$

und da diese nach § 98 konvergent ist, so ist auch die Reihe 2) konvergent.

Brechen wir nun die Reihe 1) mit dem Gliede $-\frac{1}{4n}$ und die Reihe 2) mit dem Gliede $-\frac{1}{2n}$ ab und bezeichnen wir mit S_n und S'_n die Summen bis zu diesen Gliedern, so ist

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n},$$

$$S'_n=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=\sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{1}{4m-3}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{2m}\right).$$

Da man S_n auch unter der Form

$$S_n=\sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{1}{4m-3}-\frac{1}{4m-2}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{4m}\right)$$

betrachten kann, so wird

$$S'_n-S_n=\sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{1}{4m-2}+\frac{1}{4m}-\frac{1}{2m}\right)=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right).$$

Lässt man nun n beliebig wachsen, so wird, wenn man die Grenze von S_n mit S bezeichnet, auch

$$\lim\sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right)=S.$$

Mithin ist

$$\lim S'_n-S=\frac{1}{2}S, \quad \text{oder} \quad \lim S'_n=\frac{3}{2}S.$$

102. Es kann auch eintreten, dass von zwei Reihen, welche mit den nämlichen Gliedern und mit den nämlichen Vorzeichen derselben gebildet sind, die eine konvergent, die andere divergent ist. Die beiden Reihen:

1) $$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-+\cdots,$$

2) $$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$

bieten hierfür ein Beispiel. Hier sind die absoluten Werte der einzelnen Glieder die Quadratwurzeln aus den absoluten Werten der entsprechenden Glieder in den Reihen 1) und 2) des vorigen Paragraphen, und die Vorzeichen sind dabei dieselben wie dort.

Die Reihe 1) ist konvergent nach § 96, weil die Vorzeichen Plus und Minus wechseln, und die Glieder abnehmen und nach 0 konvergieren. Die zweite Reihe aber ist divergent. Denn sind S_n und S'_n die Summen, welche man erhält, indem man die Reihen mit dem Gliede $-\frac{1}{\sqrt{2n}}$ abbricht, so ist

$$S'_n - S_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{4n-1}}.$$

Das letzte Glied der n Summanden auf der rechten Seite ist kleiner als die vorhergehenden; folglich ist

$$S'_n - S_n > \frac{n}{\sqrt{4n-1}}, \text{ oder } > \sqrt{n}\sqrt{\frac{n}{4n-1}} = \sqrt{n}\cdot\sqrt{\frac{1}{4-\frac{1}{n}}}.$$

Der Faktor $\sqrt{\frac{1}{4-\frac{1}{n}}}$ hat die Grenze $\frac{1}{2}$ und der Faktor $\sqrt{n}$ wird unendlich für $n=\infty$. Folglich wächst die Differenz $S'_n - S_n$ über jede Grenze, und dasselbe gilt daher auch für S'_n.

Reihen, deren Konvergenz unabhängig ist von dem Vorzeichen der einzelnen Glieder, heissen *unbedingt konvergente*, die anderen *bedingt konvergente*.

Bei einer bedingt konvergenten Reihe bilden die Glieder mit positivem Zeichen, und ebenso die Glieder mit negativem Zeichen für sich gesondert betrachtet divergente Reihen. Denn bezeichnet man in einer solchen Reihe die positiven Glieder in der gegebenen Aufeinanderfolge mit

$$v_1, \; v_2, \; v_3 \; \ldots.$$

die negativen durch

$$-w_1, \ -w_2, \ -w_3 \ldots,$$

so muss sowohl die Grenze von $S_n = v_1 + v_2 + \ldots v_n$ als auch die Grenze von $S'_n = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots w_n$ unendlich sein. Wären nämlich beide endlich, so würde auch die ursprüngliche Reihe nach Gleichmachung der Zeichen konvergieren, denn es würde alsdann, wenn man mit $[u_n]$ den absoluten Wert eines Gliedes u_n bezeichnet,

$$[u_1] + [u_2] + \ldots [u_n] = S_{n_1} + S'_{n_2}$$

sein, wobei n_1 und n_2 die Anzahl der positiven und die der negativen Glieder in der Reihe u_1 bis u_n bedeuten. Also wäre

$$\lim \left\{ [u_1] + \ldots [u_n] \right\} = \lim S_{n_1} + \lim S'_{n_2}.$$

Wäre aber der eine Grenzwert endlich, der andere unendlich, so wäre

$$\lim \left\{ u_1 + u_2 + \ldots u_n \right\} = \lim S_{n_1} - \lim S'_{n_2},$$

d. h. die ursprüngliche Reihe könnte auch nicht bedingt konvergieren. Man kann leicht beweisen, dass sich bei jeder bedingt konvergenten Reihe die Glieder so anordnen lassen, dass der Summenwert der neu gebildeten unendlichen Reihe eine beliebig gewählte Grösse ist.

103. Die Einzelheiten, auf welche wir zuletzt eingegangen sind, waren notwendig, um die Bedeutung des folgenden Theoremes richtig zu schätzen, welches sich auf Reihen der ersten Art bezieht.

Lehrsatz IV. *Wenn eine unendliche Reihe unbedingt konvergiert (also konvergent bleibt auch für die absoluten Werte ihrer Glieder), so kann man die Reihenfolge der Glieder beliebig ändern, ohne dass die Konvergenz oder der Summenwert der Reihe irgend eine Änderung erleidet.*

Sind

1) $$u_0, u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$$

die Glieder der unendlichen Reihe, von welchen wir annehmen, dass auch ihre absoluten Werte

2) $$U_0, U_1, U_2 \ldots U_n \ldots$$

eine konvergente Reihe bilden, so ist die Behauptung, dass die Reihe

3) $$u_\alpha, u_\beta, u_\gamma \ldots u_\omega \ldots,$$

in welcher die Indices $\alpha, \beta, \ldots \omega$ nach irgend einem anderen Gesetze, als dem der natürlichen Zahlenreihe, aufeinander

folgen, konvergent ist und die nämliche Summe hat wie die Reihe 1). Wählen wir in der Reihe 3) die Anzahl der Glieder so gross, dass die n ersten Glieder der Reihe 1) darin enthalten sind, so ist

4) $$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots u_\omega = u_0 + u_1 + \ldots u_{n-1} + R,$$

wenn man mit R die Summe aller der Glieder auf der linken Seite versteht, deren Index grösser ist als $n-1$. Diese Glieder seien mit $u_p, u_q, u_r \ldots u_s$ bezeichnet, so dass

$$R = u_p + u_q + u_r \ldots u_s$$

ist. Der Betrag von R ist nicht grösser als die Summe

$$U_p + U_q + \ldots U_s.$$

Bezeichnet man nun mit R_n den Rest der konvergenten Reihe 2), gerechnet von dem Gliede U_{n-1} ab, nämlich

$$U_n + U_{n+1} + U_{n+2} + U_{n+3} + \ldots,$$

so ist, weil sämtliche Indices $p, q \ldots s$ grösser sind, als $n-1$, auch

$$\text{abs}\,[R] < R_n \quad \text{oder} \quad \text{abs}\,[R] = \theta \, . \, R_n,$$

wobei θ eine zwischen 0 und 1 gelegene Grösse bedeutet. Wenn also S_n die Summe der n ersten Glieder der Reihe 1) darstellt, so wird die Gleichung 4):

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots u_\omega = S_n \pm \theta\, R_n.$$

Wächst n unbegrenzt, so wird R_n gleich 0, weil die Reihe 2) der Voraussetzung nach konvergiert; lim S_n ist aber gleich S dem Summenwert der Reihe 1). Folglich konvergiert auch die Summe

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots u_\omega$$

nach dem Werte S, wenn man die Anzahl der Glieder unbegrenzt vermehrt.

104. Lehrsatz V. Multiplikation von Reihen. *Sind*

1) $$\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \ldots \mathrm{u}_{n-1} \ldots,$$

2) $$\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \ldots \mathrm{v}_{n-1} \ldots$$

zwei unbedingt konvergente Reihen, mit den Summenwerten S *und* S′, *so ist auch die Reihe*

3) $$w_0, w_1, w_2 \ldots w_{n-1} \ldots$$

deren allgemeines Glied w_m *den Wert hat:*

$$w_m = u_0 v_m + u_1 v_{m-1} + u_2 v_{m-2} + \ldots u_{m-1} v_1 + u_m v_0$$

konvergent, und ihre Summe ist gleich dem Produkte SS', *gebildet aus den Summen der beiden ersten Reihen.*

Wir bezeichnen mit S_n, S'_n, S''_n die folgenden Werte:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots u_{n-1},$$
$$S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots v_{n-1},$$
$$S''_n = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots w_{n-1},$$

also

$$S''_n = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots$$
$$+ \ldots (u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-2} + \ldots u_{n-1} v_0),$$

und nehmen zunächst an, dass alle Glieder der Reihen 1) und 2) positiv sind. Das Produkt $S_n S'_n$ wird alle Glieder von S''_n enthalten, ausserdem aber noch andere positive Terme. Mithin ist

$$S_n S'_n > S''_n.$$

Bezeichnet man weiter mit m die grösste ganze Zahl, welche in $\frac{n}{2}$ enthalten ist, also $\frac{n}{2}$, oder $\frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade, so bilden, wie leicht einzusehen ist, die Glieder des Produktes $S_m S'_m$ einen Teil der Glieder, aus denen S''_n besteht; demnach ist

$$S_m S'_m < S''_n.$$

Lässt man jetzt n unendlich werden, so wird auch m unendlich. Die Grössen S_n und S_m konvergieren nach der Grenze S die Grössen S'_n und S'_m nach der Grenze S'. Also ist S''_n zwischen zwei Grössen eingeschlossen, deren Grenze das Produkt SS' ist; mithin hat auch S''_n eine bestimmte Grenze S'', und es ist:

$$S'' = SS'.$$

Wir nehmen jetzt weiter an, dass die Reihen 1) und 2) positive sowohl wie negative Glieder enthalten, dass sie aber konvergent bleiben, auch wenn man jedes negative Glied durch seinen absoluten Wert ersetzt.

Nun wird

$$S_n S'_n - S''_n = u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \dots$$
$$+ \dots (u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \dots u_2 v_{n-2} + u_1 v_{n-1})$$

und wir haben eben gesehen, dass diese Grösse nach 0 konvergiert, bei beliebig wachsendem Werte von n, in dem Falle, wo die Grössen u und v sämtlich positiv sind. Unserer Annahme nach bleiben aber die Reihen 1) und 2) konvergent, wenn man die Vorzeichen der negativen Glieder ändert; also konvergiert die vorstehende Summe mit $\frac{1}{n}$ nach 0, wenn man hier jedes Glied u oder v durch seinen absoluten Wert ersetzt. Solch eine Änderung kann aber den Betrag der betrachteten Summe nicht verkleinern, und folglich ist auch

$$\lim (S_n S'_n - S''_n) = 0$$

für $n = \infty$. Also hat auch jetzt S''_n eine bestimmte Grenze S'', und es ist

$$S'' = SS'.$$

Bemerkung. Der bewiesene Satz braucht nicht mehr zu gelten, wenn die absoluten Werte der Reihen 1) und 2) keine konvergenten Reihen bilden. Man überzeugt sich hiervon, indem man als Reihen 1) und 2) die folgende wählt:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots$$

Die Reihe 3) wird hier:

$$1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \left[\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{2}{\sqrt{4}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right] + \left[\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{8}} + \frac{1}{3}\right] + \dots$$

und diese Reihe ist divergent, weil ihre Glieder nicht nach 0 konvergieren; denn ein allgemeines Glied mit positivem Zeichen wird:

$$\frac{1}{\sqrt{n.n}} + \frac{2}{\sqrt{n-1.n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n-2.n+2}} + \dots$$
$$+ \dots \frac{2}{\sqrt{2.2n-2}} + \frac{2}{\sqrt{1.2n-1}} > \frac{2n-1}{\sqrt{n.n}} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Abel hat bewiesen, dass die Reihe 3), falls sie konvergent ist, stets auch das Produkt der Reihen 1) und 2) darstellt.

Für eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n + \dots,$$

in welcher die Koeffizienten $a_0, a_1 \dots$ gegebene Grössen sind, lassen sich folgende Konvergenzkriterien aufstellen:

Erstlich § 97 Folgerung II. Die Reihe konvergiert und zwar unbedingt, wenn der Betrag des Quotienten

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} x < 1$$

wird; d. h. für alle Werte von x, deren Betrag kleiner ist als der Betrag von $\lim \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

Umfassender noch ist folgender Satz: Wenn für einen positiven Wert X von x der Betrag sämtlicher Glieder der Potenzreihe endlich bleibt, also wenn

$$\lim [a_n X^n] < K$$

wird, wobei K irgend eine bestimmte endliche Zahl bedeutet, so konvergiert die Reihe und zwar unbedingt für alle Werte von x, deren Betrag kleiner ist als X.

Denn ist

$$[a_n X^n] < K, \quad [a^{n+1} X^{n+1}] < K, \quad [a^{n+2} X^{n+2}] < K \dots,$$

so ist

$$[a_n x^n] < K \frac{x^n}{X^n}, \quad [a_{n+1} x^{n+1}] < K \frac{x^{n+1}}{X^{n+1}}, \quad [a_{n+2} x^{n+2}] < K \frac{x^{n+2}}{X^{n+2}} \dots.$$

Mithin wird

$$[a_n x^n] + [a_{n+1} x^{n+1}] + [a_{n+2} x^{n+2}] + \dots < K \left(\frac{x}{X}\right)^n \left[1 + \frac{x}{X} + \left(\frac{x}{X}\right)^2 + \dots\right]$$

$$< K \left(\frac{x}{X}\right)^n \frac{1}{1 - \dfrac{x}{X}}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt, dass der Rest der Reihe durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann, wenn $x < X$ ist, selbst wenn man allen Gliedern der Potenzreihe einerlei Vorzeichen giebt.

Über die Konvergenz der Reihe für den Wert $x = X$ ist durch diese Untersuchung nichts entschieden. Wenn dagegen für einen Wert $x = X$ $\lim a_n X^n$ nicht mehr endlich ist, so divergiert die Reihe für diesen Wert von x, sowie für alle Werte, deren Betrag grösser ist als X.

Beispiel: In der Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

bleibt, wie gross auch n wird, $\lim \frac{x^n}{n!}$ immer endlich; denn in dem Produkte

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{n}$$

ist die Anzahl i der Faktoren, welche gleich oder grösser sind als eine Zahl α, eine begrenzte. Bezeichnet man also das Produkt derselben mit P, so ist der Betrag dieses Produktes kleiner als

$$P \cdot \alpha^{n-i},$$

und wählt man α kleiner als 1, so hat dieses Produkt die 0 zur Grenze. Mithin konvergiert die Reihe für jeden endlichen Wert von x.

Die Glieder der Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \frac{x^n}{n} + \cdots$$

bleiben durchaus endlich, wenn der Betrag von x gleich 1 ist; also konvergiert die Reihe und zwar unbedingt, solange

$$-1 < x < +1;$$

für $x > 1$ werden die Glieder schliesslich unendlich gross. Der Fall $x = \pm 1$ bedarf noch einer besonderen Untersuchung. Nach früheren Sätzen folgt, dass die Reihe divergent ist für $x = +1$, konvergent für $x = -1$.

Darstellung des Wertes, den eine Funktion, welche für $x = x_0$ nebst ihren $n - 1$ ersten Ableitungen verschwindet, für $x = x_0 + h$ annimmt.

105. Es seien $f(x)$ und $F(x)$ zwei Funktionen von x, welche für alle Werte von x zwischen x_0 und $x_0 + h$ stetig sind, und innerhalb der nämlichen Grenzen eindeutig bestimmte erste Ableitungen haben, d. h. solche Ableitungen, die vor- und rückwärts gebildet nicht verschiedene Werte besitzen. Wird die Ableitung $F'(x)$ im Innern des Intervalles x_0 bis $x_0 + h$ weder null noch unendlich, so ist nach dem Satze im § 17:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)}.$$

Dabei bedeutet h_1 eine zwischen 0 und h gelegene Grösse. Ist nun

$$f(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad F(x_0) = 0,$$

so reduziert sich diese Gleichung auf die Form

$$1) \qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)}.$$

Sind auch die Funktionen $f'(x)$ und $F'(x)$ im Intervalle von x_0 bis x_0+h stetig, und haben sie in diesem Intervalle die eindeutig bestimmten Ableitungen $f''(x)$ und $F''(x)$, so wird, wenn $F''(x)$ im Innern des Intervalles weder null noch unendlich wird, und wenn

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad F'(x_0) = 0$$

ist, nach dem vorigen Satze

$$\frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)} = \frac{f''(x_0+h_2)}{F''(x_0+h_2)},$$

wobei h_2 eine Grösse zwischen 0 und h_1 bezeichnet.

Wir nehmen nun allgemein an, dass die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ und ebenso alle ihre Ableitungen bis einschliesslich derjenigen $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung stetig bleiben für alle Werte von x zwischen x_0 und x_0+h (einschliesslich dieser Grenzen), dass ferner die Ableitungen n^{ter} Ordnung eindeutig bestimmte Werte haben, und dass die Funktionen $F'(x) \ldots F^n(x)$ im Innern des Intervalles weder null noch unendlich werden.

Ist dann

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0 \ldots, \quad f^{n-1}(x_0) = 0,$$
$$F(x_0) = 0, \quad F'(x_0) = 0 \ldots, \quad F^{n-1}(x_0) = 0,$$

so ergiebt sich auf Grund der Gleichung 1):

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)} = \frac{f''(x_0+h_2)}{F''(x_0+h_2)} \cdots = \frac{f^n(x_0+h_n)}{F^n(x_0+h_n)}.$$

$h, h_1, h_2, \ldots h_n$ bezeichnen Grössen von einerlei Vorzeichen, deren absolute Werte eine abnehmende Reihe bilden. Bedeutet θ eine Grösse zwischen 0 und $+1$, so kann man

$$h_n = \theta h$$

schreiben, und es wird

$$2) \qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f^n(x_0+\theta h)}{F^n(x_0+\theta h)}.$$

Setzen wir jetzt

$$F(x) = (x - x_0)^n,$$

also

$$F^m(x) = n(n-1)\dots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m}$$

und

$$F^n(x) = 1.2.3\dots n = n!$$

so sind alle Bedingungen, die für $F(x)$ aufgestellt wurden, erfüllt, und die Gleichung 2) ergiebt

$$3)\qquad f(x_0+h) = \frac{h^n}{n!} f^n(x_0+\theta h).$$

Diese Gleichung ist es, die wir bilden wollten. Sie setzt die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ und ihrer $n-1$ ersten Ableitungen, für alle Werte von x bis x_0+h voraus; sie erfordert ferner, dass die n^{te} Ableitung einen eindeutigen Wert hat für jeden Wert von x innerhalb dieser Grenzen, und dass

$$4)\qquad f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0)\dots = f^{n-1}(x_0) = 0$$

ist. Sind alle diese Bedingungen erfüllt, und wird h als unendlich kleine Grösse erster Ordnung angenommen, so wird $f(x_0+h)$ eine unendlich kleine Grösse n^{ter} Ordnung, wenn $f^n(x)$ endlich bleibt. Man sagt dann auch, dass die Gleichung $f(x) = 0$ die Wurzel $x = x_0$ hat, und dass die Vielfachheit dieser Wurzel vom Grade n ist.

Die Taylorsche Reihe.

106. Es sei $F(x)$ eine Funktion der Variabelen x, welche nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen für alle Werte von x von x_0 bis x_0+h stetig ist, und deren n^{te} Ableitung eindeutige Werte hat. Bezeichnet man mit $\varphi(x)$ das Polynom $n-1^{ter}$ Ordnung:

$$1)\qquad \begin{aligned}\varphi(x) = F(x_0) + \frac{x-x_0}{1} F'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(x_0)\\ + \dots \frac{(x-x_0)^{n-1}}{n-1!} F^{n-1}(x_0),\end{aligned}$$

so ist die Ableitung m^{ter} Ordnung dieses Polynomes:

$$\varphi^m(x) = F^m(x_0) + \frac{x-x_0}{1} F^{m+1}(x_0) + \dots \frac{(x-x_0)^{n-m-1}}{n-m-1!} F^{n-1}(x_0)$$

und setzt man $x = x_0$ in diesen beiden Gleichungen, so ist

$$\varphi(x_0) = F(x_0), \quad \varphi^{m}(x_0) = F^{m}(x_0),$$

hieraus folgt, dass die Gleichung 3) des vorigen Paragraphen auf die Funktion

$$f(x) = F(x) - \varphi(x)$$

anwendbar ist; denn alle Bedingungen dieser Gleichung sind erfüllt. Es ist also, weil $\varphi^n(x) = 0$ wird:

$$F(x_0 + h) - \varphi(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!} F^n(x_0 + \theta h), \qquad (0 < \theta < 1).$$

Der Wert von $\varphi(x_0 + h)$ ist durch die Gleichung 1) bestimmt, und es wird

$$2) \quad F(x_0 + h) = F(x_0) + \frac{h}{1} F'(x_0) + \frac{h^2}{2!} F''(x_0) + \cdots \frac{h^{n-1}}{n-1!} F^{n-1}(x_0) + \frac{h^n}{n!} F^n(x_0 + \theta h).$$

Wir wollen x_0 durch x ersetzen und schreiben:

$$3) \quad F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \cdots \frac{h^{n-1}}{n-1!} F^{n-1}(x) + R^n.$$

Dabei ist:

$$4) \qquad R_n = \frac{h^n}{n!} F^n(x + \theta h).$$

Die Gleichung 3) erfordert, wie wir nochmals wiederholen müssen, dass die Funktion $F(x)$ und ihre $n-1$ ersten Ableitungen für alle Werte von x bis $x+h$ stetig sind, und dass die n^{te} Ableitung eindeutige Werte hat.

Letzteres besagt, dass

$$\lim \frac{F^{n-1}(x + \Delta x) - 2 F^{n-1}(x) + F^{n-1}(x - \Delta x)}{\Delta x} = 0$$

ist.

Nimmt man nun weiter an, dass alle Ableitungen der Funktion $F(x)$, wie viele man auch bilden mag, die Bedingung der Stetigkeit erfüllen, und dass die Grösse R_n zur Grenze 0 konvergiert, wenn n unbegrenzt wächst, so hat man nach Gleichung 3)

$$5) \quad F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \frac{h^3}{3!} F'''(x) + \cdots$$

Dies ist die Taylorsche Reihe. Sie liefert die Entwickelung von $F(x+h)$ in eine konvergente unendliche Reihe, welche nach ganzen wachsenden Potenzen von h geordnet ist, sobald die obigen Bedingungen erfüllt sind; und lässt also den Wert der Funktion $F(x)$ an der Stelle $x+h$ mit beliebiger Annäherung berechnen, sobald der Wert der Funktion und beliebig vieler Ableitungen an einer Stelle x bekannt sind. Die Grösse R_n, welche durch die Gleichung 4) bestimmt ist, heisst der Rest der Reihe. Diese Gleichung 4) giebt eine Schätzung des Fehlers, den man begeht, wenn man die unendliche Reihe mit dem n^{ten} Gliede abbricht.

107. Andere Form des Restes. Dem Reste R_n kann man noch eine andere Form geben, welche oft von Nutzen ist. Um sie zu erhalten, ersetze man h in der Gleichung 3) durch $z-x$. Der Rest R_n wird eine Funktion von x und z, aber wir bezeichnen ihn einfach mit $f(x)$. Man hat alsdann

$$6)\quad \begin{aligned} F(z) = F(x) + \frac{z-x}{1} F'(x) + \frac{(z-x)^2}{2!} F''(x) \\ + \ldots \frac{(z-x)^{n-1}}{n-1!} F^{n-1}(x) + f(x). \end{aligned}$$

Bildet man nun die Ableitungen auf beiden Seiten in Bezug auf x, indem man z als konstant ansieht, so erhält man, wenn alle Reduktionen ausgeführt sind, die Gleichung

$$7)\quad f'(x) = -\frac{(z-x)^{n-1}}{n-1!} F^n(x).$$

Die Funktion $f(x)$, welche durch die Gleichung 6) definiert ist, ist nach unserer Voraussetzung eine kontinuierliche Funktion für alle Werte von x bis $x+h=z$; man hat also nach § 14, wenn man mit θ eine Grösse zwischen 0 und 1 bezeichnet:

$$f(z) - f(x) = (z-x) f'[x + \theta (z-x)],$$

was nichts anderes als die Taylorsche Gleichung ist, nur eingeschränkt auf das erste Glied und vervollständigt durch den Rest. Gemäss der Gleichung 6) verschwindet aber $f(x)$ für $x=z$. Also ist

$$8)\quad f(x) = -(z-x) f'[x + \theta (z-x)].$$

Die Gleichung 7) ergiebt aber, wenn man x durch $x+\theta(z-x)$ ersetzt, die Relation:

$$f'[x+\theta(z-x)] = -\frac{(z-x)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{n-1!} F^n[x+\theta(z-x)]$$

und folglich ist nach Gleichung 8):

$$9) \qquad f(x) = \frac{(1-\theta)^{n-1}(z-x)^n}{n-1!} F^n[x+\theta(z-x)].$$

Führt man wiederum an Stelle von z den Wert $x+h$ ein, so folgt:

$$10) \qquad R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1} h^n}{n-1!} F^n(x+\theta h).$$

Die Grösse, welche hier mit θ bezeichnet ist, ist nicht dieselbe wie in der Gleichung 4); aber wie diese liegt sie zwischen 0 und 1.

108. Setzt man

$$y = F(x)$$

und

$$\Delta y = F(x+h) - F(x),$$

so sind die Grössen

$$h F'(x),\ h^2 F''(x),\ h^3 F'''(x)\ldots$$

genau die auf einander folgenden Differentiale:

$$dy,\ d^2y,\ d^3y\ldots$$

der Funktion y. Bezeichnet man ferner mit

$$d'^n y$$

die Grösse $h^n F^n(x+\theta h)$, welche das n^{te} Differential von y ist, nur gebildet für einen Wert der Variabelen zwischen x und $x+h$, so erhält die Gleichung 3) des § 106 die Form:

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{2!} + \frac{d^3y}{3!} + \cdots \frac{d^{n-1}y}{n-1!} + \frac{d'^n y}{n!}.$$

Nimmt man an, dass h oder dx unendlich klein werden, und betrachtet diese Grösse als unendlich klein von der ersten Ordnung, so sind $dy, d^2y, \ldots d^{n-1}y$ unendlich klein bezüglich von der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots n-1^{\text{ten}}$ Ordnung; desgleichen wird $d'^n y$ im allgemeinen unendlich klein von der n^{ten} Ordnung sein.

Bemerkungen über die Taylorsche Reihe.

109. 1. Die Gleichung 3) des § 106 kann bis zu einem bestimmten Werte von n richtig sein, für grössere Werte aber ungiltig werden. Es sei z. B.

$$F(x) = (x - x_0)^\mu \varphi(x) + \psi(x),$$

wobei μ eine positive gebrochene Zahl bedeutet, und die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ nebst ihren Ableitungen für alle Werte von $x = x_0$ bis $x = x_0 + h$ stetig sind. Ist m die grösste ganze in μ enthaltene Zahl, so gilt die Gleichung 3) für $x = x_0$ nur, solange n nicht grösser ist als m; denn die $m + 1^{te}$ Ableitung von $F(x)$ wird für $x = x_0$ unendlich.

2. Um die Giltigkeit der Taylorschen Formel behaupten zu können, genügt es nicht, dass die rechte Seite eine konvergente Reihe ist. Wenn man z. B.

$$F(x) = f(x) + e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$$

setzt, und $f(x)$ eine Funktion ist, auf welche die Taylorsche Reihenentwickelung für $x = x_0$ anwendbar ist, so hat man für jeden Wert von n

$$F^n(x_0) = f^n(x_0),$$

weil die Funktion $e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$ ebenso wie alle ihre Ableitungen für $x = x_0$ verschwindet, was im § 125 bewiesen werden wird. Also konvergiert hier die rechte Seite der Gleichung 5) in § 106 nach der Grenze $f(x_0 + h)$, und nicht nach $F(x_0 + h) = f(x_0 + h) + e^{-\frac{1}{h^2}}$. Für die Giltigkeit der allgemeinen Gleichung muss also der Nachweis erbracht sein, dass der Rest R_n nach der Grenze 0 konvergiert.

3. Bricht man die Taylorsche Reihe bei irgend einem Gliede

$$u_n = \frac{h^{n-1}}{n-1!} F^{n-1}(x)$$

ab, welches nicht null ist, so kann man h so klein wählen, dass dieses Glied seinem absoluten Werte nach den Rest R_n übertrifft. Denn es ist: $R_{n-1} = u_n + R_n$ oder:

$$\frac{R_n}{u_n} = \frac{R_{n-1} - u_n}{u_n} = \frac{F^{n-1}(x + \theta h) - F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(x)}.$$

Dieser Quotient wird mit h unendlich klein, weil $F^{n-1}(x)$ als stetig vorausgesetzt ist. Er wird also kleiner als irgend eine gegebene Grösse, wenn man h einen hinreichend kleinen Wert beilegt. Dabei ist vorausgesetzt, dass die n^{te} Ableitung der Funktion $F(x)$ eine eindeutige Funktion im früher definierten Sinne ist.

4. Wenn bei jedem Werte der Variabelen von x bis $x+h$ die n^{te} Ableitung der Funktion $F(x)$ endlich ist, und, wie gross auch n werden mag, endlich bleibt, d. h. dem Betrage nach kleiner bleibt als eine angebbare endliche Grösse, so gilt auch die Taylorsche Entwickelung. Denn der Restausdruck kann in der Form

$$R_n = \frac{h}{1} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdots \frac{h}{n} F^n(x+\theta h)$$

dargestellt werden. Wie gross auch der gegebene Wert von h sein mag, die Anzahl i derjenigen Quotienten

$$\frac{h}{1}, \frac{h}{2}, \frac{h}{3} \cdots,$$

welche grösser sind als eine gegebene Grösse α, ist eine begrenzte. Bezeichnen wir also mit P_n das Produkt dieser i Quotienten, multipliziert mit der Grösse $F^n(x+\theta h)$, deren Betrag, wie gross auch n werden mag, zufolge unserer Annahme stets kleiner bleibt als eine endliche Grösse, so ist leicht zu ersehen, dass der Betrag des Restes R_n kleiner ist als der Betrag des Produktes $P_n \cdot \alpha^{n-i}$. Man kann nun für α eine beliebige Grösse kleiner als 1 wählen; dann konvergiert α^{n-i} nach 0, während n unbegrenzt wächst, und P_n behält einen endlichen Wert. Also hat R_n die Grenze 0.

Die Mac-Laurinsche Reihe.

110. Setzt man in der Gleichung 3) des § 106 $x = 0$ und schreibt man x an Stelle von h, so folgt

$$1)\quad F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0) + \dots \frac{x^{n-1}}{n-1!} F^{n-1}(0) + R_n,$$

zugleich ergeben die Formeln 4) und 10) desselben Paragraphen:

2) $$R_n = \frac{x^n}{n!} F^n(\theta x)$$

und

3) $$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{n-1!} x^n F^n(\theta x).$$

θ bezeichnet in beiden Formeln eine Grösse zwischen 0 und 1. Dabei erfordert die Gleichung 1), dass die Funktion $F(x)$ nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen bei allen Werten der Variabelen von 0 bis x stetig bleibt, und dass die n^{te} Ableitung eindeutig ist.

Genügen alle Ableitungen der Funktion $F(x)$ der Bedingung der Stetigkeit, und hat der Rest R_n bei unbegrenzt wachsenden Werten von n die Grenze 0, so giebt die Gleichung 1) eine Entwickelung der Funktion $F(x)$ in eine konvergente, nach ganzen positiven Potenzen von x geordnete Reihe, nämlich

4) $$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0) + \frac{x^3}{3!} F'''(0) + \ldots$$

Dies ist die von Mac-Laurin gebildete Reihe; die Gleichungen 2) oder 3) lassen die Grenzen des Fehlers bestimmen, welchen man begeht, indem man die Reihe mit irgend einem Gliede abbricht.

Bemerkung. Die Mac-Laurinsche Reihe folgt unmittelbar aus der Taylorschen; aber auch das umgekehrte findet statt. Man erhält die Taylorsche Reihe, wenn man die Mac-Laurinsche Entwickelung auf die Funktion

$$f(x) = F(x + h)$$

anwendet, und schliesslich in der Formel h mit x vertauscht.

Die Reihe von Mac-Laurin gilt ebenso wie die Taylorsche sicherlich dann, wenn die n^{te} Ableitung der Funktion $F(x)$ bei allen Werten der Variabelen von 0 bis x endlich bleibt, wie gross auch n werden mag.

111. Ist eine Funktion $F(x)$ durch eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe definiert:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n + \ldots,$$

für welche $\lim a_n X^n$ endlich, d. h. kleiner als eine bestimmte Zahl K bleibt, so konvergiert (§ 104) die Reihe und zwar unbedingt für das Intervall

$$-X < x < X.$$

Die Funktion $F(x)$ ist alsdann im Innern dieses Intervalles eine stetige Funktion. Denn setzt man:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_{n-1} x^{n-1} + \varphi(x) = S_n(x) + \varphi(x),$$

so ist

$$\varphi(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n-2} + \dots,$$

also

$$[\varphi(x)] < \left[\frac{x}{X}\right]^n \cdot \frac{K}{1 - \left[\frac{x}{X}\right]}.$$

Nun ist

$$F(x \pm \Delta x) - F(x) = \left\{S_n(x \pm \Delta x) - S_n(x)\right\} + \left\{\varphi(x \pm \Delta x) - \varphi(x)\right\}.$$

Man kann hier zunächst n so gross wählen, dass die Beträge von $\varphi(x)$ sowohl wie von $\varphi(x + \Delta x)$ kleiner werden als eine beliebige Zahl δ, und zwar unabhängig von dem Werte Δx, falls nur x und $x + \Delta x$ innerhalb des Konvergenzintervalles liegen; denn es lassen sich

$$\left[\frac{x}{X}\right]^n \frac{K}{1 - \left[\frac{x}{X}\right]} \quad \text{und} \quad \left[\frac{x \pm \Delta x}{X}\right]^n \cdot \frac{K}{1 - \left[\frac{x \pm \Delta x}{X}\right]}$$

durch Wahl von n kleiner machen als δ, weil $\left[\frac{x}{X}\right]$ und $\left[\frac{x \pm \Delta x}{X}\right]$ echte Brüche sind. Sonach ist

$$F(x \pm \Delta x) - F(x) = S_n(x \pm \Delta x) - S_n(x) + (< 2\delta).$$

Da nun das Polynom $S_n(x)$ stetig ist, so kann durch Wahl von Δx die Differenz $S_n(x \pm \Delta x) - S_n(x)$ beliebig verkleinert werden, und folglich ist auch für $F(x)$ die Stetigkeitsbedingung erfüllt.

Damit ist bewiesen:

Jede durch eine Potenzreihe definierte Funktion ist innerhalb ihres Konvergenzintervalles stetig.

Bildet man durch gliedweise Differentiation die Reihen:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots n a_n x^{n-1} + \dots,$$

$$2a_2 + 3 \,.\, 2 \,.\, a_3 x + \dots n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots,$$

$$3 \,.\, 2\, a_3 + \dots n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

so konvergiert auch jede derselben sicherlich für alle Werte von x, welche *innerhalb* des Konvergenzintervalles der ursprünglichen Reihe liegen.

Denn ist $[x] < X$, so wird

$$[n a_n x^{n-1}] = \left[n a_n X^{n-1} \cdot \left(\frac{x}{X}\right)^{n-1}\right] < \frac{nK}{X} \cdot \left[\frac{x}{X}\right]^{n-1}.$$

Der Quotient $\frac{K}{X}$ bleibt endlich, während $n\left(\frac{x}{X}\right)^{n-1}$ mit beliebig wachsenden Werten von n nach 0 konvergiert, sobald $\frac{x}{X}$ ein echter Bruch ist. Es ergiebt sich dies nach den Regeln des § 125, kann aber auch aus folgender Betrachtung entnommen werden. Multipliziert man die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots \alpha^n + \ldots,$$

welche unbedingt konvergiert, wenn α ein echter Bruch ist, mit sich selbst (§ 104), so wird

$$\frac{1}{(1-\alpha)^2} = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \ldots n\alpha^{n-1} + \ldots,$$

und da diese Reihe unbedingt konvergieren muss, so ist $\lim n\alpha^{n-1} = 0$, wenn α kleiner als 1 ist.

Die erste abgeleitete Reihe konvergiert also bei allen Werten von x, deren Betrag kleiner ist als X; daraus folgt, dass auch die aus dieser abgeleitete Reihe, und ebenso auch alle folgenden innerhalb des nämlichen Intervalles konvergent sind. Hieraus folgt weiter:

Die durch eine Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n + \ldots$$

definierte Funktion wird differentiiert, indem man die abgeleitete Reihe durch gliedweise Differentiation bildet.

Es seien x und $x + \Delta x$ zwei Werte innerhalb des Konvergenzintervalles, die beide positiv oder beide negativ gewählt seien (der Fall $x = 0$ erledigt sich besonders einfach); da die Reihe unbedingt konvergiert, so vereinige man alle die Glieder, welche nach Substitution der Werte x und $x + \Delta x$ das positive Zeichen erhalten zu einer Reihe $\varphi(x)$ und alle Glieder, welche das negative Zeichen erhalten, zu einer Reihe $-\psi(x)$. Es ist dann $F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$; und es wird genügen, den ausgesprochenen Satz der gliedweisen Differentiation bloss für die Reihe $\varphi(x)$ zu beweisen, denn alsdann gilt er auch für $\psi(x)$ und für die Differenz $\varphi(x) - \psi(x)$.

Ist also in einer Potenzreihe $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n + \ldots$, x positiv gewählt und sind alle Glieder von einerlei Zeichen, so bilde man

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=a_1+a_2\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

$$+a_3\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}+\ldots a_n\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}+\cdots$$

Nun ist

$$\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=n(x+\theta\Delta x)^{n-1},$$

also wenn Δx positiv gewählt wird, so ist

$$n(x+\Delta x)^{n-1}>\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}>n\,x^{n-1}.$$

Mithin wird

$$a_1+2ax+3a_3x^2+\ldots n\,a_n\,x^{n-1}+\ldots<\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$$

$$<a_1+2a_2(x+\Delta x)+3a_3(x+\Delta x)^2+\ldots$$

Die beiden unendlichen Reihen sind konvergent, solange x und $x+\Delta x$ innerhalb des Konvergenzintervalles der Reihe $\varphi(x)$ liegen. Lässt man nun Δx nach 0 konvergieren, so wird, weil eine Potenzreihe, wie zuvor bewiesen wurde, stetig ist,

$$\lim\,[a_1+2a_2(x+\Delta x)+3a_3(x+\Delta x)^2+\ldots]=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots,$$

also ist auch

$$\lim\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots$$

Differentiiert man die abgeleitete Reihe nochmals gliedweise, so erhält man die zweite Ableitung der Funktion u. s. f. Es bestehen also die Gleichungen:

Ist

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots \qquad (-X<x<+X),$$

so ist:

$$F'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots \qquad (-X<x<+X),$$

$$F''(x)=2a_2+3\,.\,2a_3x+4\,.\,3\,.\,a_4x^2+\ldots \qquad (-X<x<+X),$$

$$F'''(x)=3\,.\,2\,.\,a_3+4\,.\,3\,.\,2a_4x^2+5\,.\,4\,.\,3a_5x^3+\ldots \qquad (-X<x<+X),$$

. . . .

Setzt man in diesen Reihen $x=0$, so wird

$$F(0)=a_0,\quad F'(0)=a_1,\quad F''(0)=2a_2,\quad F'''(0)=3\,.\,2a_3 \text{ u. s. w.}$$

Mithin kann man der ursprünglichen Reihe die Form geben:

$$F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\frac{x^3}{3!}F'''(0)+\ldots$$

und damit ist bewiesen:

Wenn eine Funktion innerhalb eines Intervalles überhaupt durch eine konvergente, nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelbar ist,, so ist diese Entwickelung die Mac-Laurinsche Reihe. Es existiert für die Funktion keine andere Reihenentwickelung derselben Art.

Die Potenzreihe für die Funktion e^x.

112. Die Entwickelung einer Funktion in eine Potenzreihe hat den Zweck, die Funktion durch einen Ausdruck zu definieren, der zugleich eine einfache Berechnung derselben für die verschiedenen Werte der unabhängigen Variabelen ermöglicht. Mit der Definition, welche wir für e^x, $\log x$, und ebenso $\sin x$, $\cos x$ u. s. w. aufgestellt haben, ist noch keine zweckmässige Methode zur wirklichen Berechnung gegeben.

Die aufeinander folgenden Ableitungen der Funktion e^x sind mit der Funktion identisch, und bleiben also endlich, welchen bestimmten Wert man auch der Variabelen x beilegen mag. Hieraus geht hervor (§ 110), dass die Funktion e^x in eine Potenzreihe, der Mac-Laurinschen Formel gemäss, entwickelbar sein muss, welche für alle Werte von x zwischen $-\infty$ und $+\infty$ konvergiert. Für $x=0$ reduzieren sich die Werte der Funktion und ihrer Ableitungen auf 1, und man hat

$$1)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^{n-1}}{n-1!} + \cdots$$

Der Rest der Reihe vom n^{ten} Gliede ab ist

$$2)\qquad R_n = \frac{x^n}{n!}\, e^{\theta x}.$$

Ist a irgend eine positive Zahl, und ersetzt man x durch $x \log a$, wobei der Logarithmus die Basis e hat, so folgt aus der Gleichung $e^{x \log a} = a^x$:

$$3)\qquad a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\log a)^3}{3!} + \cdots$$

und

$$4)\qquad R_n = \frac{x^n (\log a)^n}{n!}\, a^{\theta x}.$$

113. Bemerkung über die Zahl e. Man kann leicht beweisen, dass die Zahl e nicht nur irrational ist, sondern dass

sie auch, wie Liouville zuerst bemerkt hat, nicht Wurzel einer Gleichung zweiten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten sein kann. Denn wäre e Wurzel einer solchen Gleichung, so hätte man die Relation

$$\alpha e \pm \frac{\beta}{e} = \pm \gamma,$$

worin α, β, γ positive ganze Zahlen sind. Nun ist aber nach den Formeln 1) und 2):

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n-1!} + \frac{e^\theta}{n!} \qquad (0 < \theta < 1),$$

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{n-1!} + \frac{(-1)^n e^{-\lambda}}{n!} \quad (0 < \lambda < 1).$$

Die Substitution dieser Werte ergiebt also:

$$\alpha \left[1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n-1!} + \frac{e^\theta}{n!} \right]$$
$$\pm \beta \left[1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{n-1!} + \frac{(-1)^n e^{-\lambda}}{n!} \right] = \pm \gamma.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit $n-1!$, so folgt

$$\frac{\alpha e^\theta \pm \beta (-1)^n e^{-\lambda}}{n} = \mu,$$

und hier ist μ eine ganze Zahl. Da man für n eine gerade oder ungerade Zahl wählen kann, so kann man das Vorzeichen von $\pm(-1)^n$ willkürlich fixieren. Wählt man das positive Zeichen, so hat man

$$\frac{\alpha e^\theta + \beta e^{-\lambda}}{n} = \mu.$$

Diese Gleichung kann nicht bestehen; denn die rechte Seite ist eine ganze Zahl (allenfalls 0), die linke Seite aber ist, da n beliebig gross gewählt werden kann, ein echter positiver Bruch. Also ist die Behauptung bewiesen.

Hr. Hermite hat nachgewiesen, dass die Zahl e auch nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung beliebigen Grades mit ganzzahligen Koeffizienten sein kann: Sur la fonction exponentielle, Paris 1874.

Die Potenzreihen für die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$.

114. Die Ableitungen n^{ter} Ordnung der Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ sind bezüglich

$$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

π ist die Längenzahl der halben Peripherie eines Kreises mit dem Radius 1. Die Ableitungen bleiben also endlich für jeden beliebigen endlichen Wert von x, und hieraus folgt (§ 110), dass sich die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ nach der Mac-Laurinschen Formel für jeden Wert von x entwickeln lassen.

Für $x = 0$ bilden die Werte der Funktion $\cos x$ und ihrer Ableitungen eine periodische Reihe, deren Periode

$$1, \quad 0, \quad -1, \quad 0$$

ist; ebenso bilden die Werte der Funktion $\sin x$ und ihrer Ableitungen eine periodische Reihe mit der Periode:

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad -1.$$

Also hat man bei allen Werten von x zwischen $-\infty$ und $+\infty$:

$$1) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots (-1)^m \frac{x^{2m}}{2m!} + \cdots$$

$$2) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1!} + \cdots$$

Um den Rest der Reihe 1) zu erhalten, wenn man sie mit dem Gliede vom Grade $2m$ abbricht, hat man in der ersten allgemeinen Form für R_n statt n den Wert $2m + 2$ zu setzen; dann wird

$$3) \qquad R_{2m+2} = \frac{x^{2m+2}}{2m+2!} \cos\left[\theta x + (m+1)\pi\right].$$

Ebenso wird, wenn die zweite Reihe mit dem Gliede vom Grade $2m + 1$ geschlossen wird:

$$4) \qquad \begin{aligned} R_{2m+3} &= \frac{x^{2m+3}}{2m+3!} \sin\left[\theta x + \frac{2m+3}{2}\pi\right] \\ &= \frac{x^{2m+3}}{2m+3!} \cos\left[\theta x + (m+1)\pi\right]. \end{aligned}$$

Ist die Länge x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ enthalten, und giebt man m nach einander die Werte 0, 1, 2, 3 ..., so wird der Wert von R_{2m+2} oder R_{2m+3} abwechselnd negativ und positiv. Hieraus folgt, dass man, wenn man die Reihe 1) oder 2) mit dem ersten, mit dem zweiten Gliede u. s. w. abbricht, eine Reihe von Werten erhält, welche abwechselnd grösser und kleiner sind, als die Werte $\cos x$ und $\sin x$. So ist insbesondere

$$\cos x < 1, \quad \cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

$$\sin x < x, \quad \sin x > x - \frac{x^3}{3!}, \quad \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Die Potenzreihe für die Funktion $\log(1+x)$.

115. Bezeichnet man mit $l(x)$ den natürlichen Logarithmus, so ist

$$\frac{dl(1+x)}{dx} = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

und allgemein:

$$\frac{d^n l(1+x)}{dx^n} = (-1)^{n-1}\, \overline{n-1}!\, (1+x)^{-n}.$$

Für $x = 0$ reduzieren sich diese Werte bezüglich auf 1 und $(-1)^{n-1}\, \overline{n-1}!$, $l(1+x)$ wird 0, es ist also

$$1)\quad l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n,$$

ferner:

$$2)\qquad R_n = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+\theta x)^n},$$

oder:

$$3)\qquad R_n = \frac{(-1)^{n-1}(1-\theta)^{n-1} x^n}{(1+\theta x)^n}.$$

Wenn also der Rest R_n für unbegrenzt wachsende Werte von n die Grenze 0 hat, so hat man nach der Mac-Laurinschen Formel

$$4)\qquad l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Diese Reihe konvergiert nicht, wenn der Betrag von x grösser als 1 ist, denn das Verhältnis des $(n+1)$ Gliedes zum vorhergehenden, nämlich $\frac{n}{n+1}x = \frac{x}{1+\frac{1}{n}}$ konvergiert nach der Grenze x, wenn n unendlich wird. Also kann die Gleichung 4) nicht bestehen, ausser für Werte von x zwischen -1 und $+1$.

Um nun zu entscheiden, ob der Rest die Grenze 0 hat, wollen wir die beiden Fälle, dass x positiv und dass es negativ ist, unterscheiden.

1. Ist $x > 0$, so wenden wir die Form 2) des Restes an, nämlich

$$R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n.$$

Ist nun $x \leq 1$, so konvergieren beide Faktoren $\frac{1}{n}$ und $\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$ mit beliebig wachsenden Werten von x nach 0; für $x=1$ kann es zwar eintreten, dass der zweite Faktor nicht 0 wird, aber er wird doch nie grösser als 1. Also wird der Rest R_n schliesslich 0 und die Gleichung 4) ist gültig.

2. Wenn $x < 0$ ist, so benutzen wir die Form 3) des Restes, und indem wir $x = -z$ setzen, wird

$$R_n = \frac{-z}{1-\theta z}\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^{n-1}.$$

Ist nun $z < 1$, so ist der Betrag des ersten Faktor immer eine endliche Grösse kleiner als $\frac{z}{1-z}$; der zweite Faktor ist kleiner als z^{n-1} und konvergiert also bei beliebig wachsenden Werten von n nach 0. Also gilt die Formel 4) auch für die Werte zwischen $x=0$ und $x=-1$. Für den Wert $x=-1$ werden die beiden Seiten dieser Gleichung unendlich (§ 98).

Bemerkung. Ist x positiv, so hat der Rest das Zeichen $(-1)^{n-1}$, und sein absoluter Wert ist kleiner als $\frac{1}{n}x^n$. Dieser Rest kann also auch in der Form

$$R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{\theta x^n}{n} \qquad (0<\theta<1)$$

dargestellt werden.

Ist x negativ und gleich $-z$, so ist, für $z<1$, $-R_n$ gleich dem Produkt von zwei positiven Faktoren, welche bezüglich kleiner sind als

$$\frac{z}{1-z} \quad \text{und} \quad z^{n-1}.$$

Demnach kann man setzen:

$$R_n = -\frac{\theta z^n}{n(1-z)}, \quad \text{oder} \quad R_n = (-1)^{n-1}\cdot\frac{\theta x^n}{n(1+x)} \quad (0<\theta<1).$$

So hat man also, wenn man mit x eine Grösse zwischen 0 und 1, und ebenso mit θ und θ' Grössen zwischen 0 und 1 bezeichnet:

$$l(1+x) = x - \frac{\theta x^2}{2},$$

$$l(1-x) = -x - \frac{\theta' x^2}{2(1-x)}.$$

Formeln für die Berechnung von Logarithmen.

116. Berechnung der natürlichen Logarithmen. Ist die Grösse x zwischen 0 und 1 enthalten, so hat man die beiden Gleichungen:

$$1)\qquad l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

$$2)\qquad l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots,$$

und zieht man die zweite von der ersten ab, so folgt:

$$3)\qquad l\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

Setzt man in der Gleichung 1) $x = \frac{h}{N}$, so wird $l(1+x) = l\left(1+\frac{h}{N}\right) = l(N+h) - l(N)$ und

$$4)\qquad l(N+h) - l(N) = \frac{h}{N} - \frac{h^2}{2N^2} + \frac{h^3}{3N^3} - \cdots;$$

setzt man ferner in der Gleichung 3)

$$x = \frac{h}{2N+h} \quad \text{oder} \quad \frac{1+x}{1-x} = \frac{N+h}{N},$$

so folgt:

5) $l(N+h)-l(N)=2\left[\frac{h}{(2N+h)}+\frac{h^3}{3(2N+h)^3}+\frac{h^5}{5(2N+h)^5}+\cdots\right].$

Die Gleichungen 4) und 5) werden angewandt, um den natürlichen Logarithmus einer Zahl $N+h$ zu bestimmen, wenn der Logarithmus der Zahl N bekannt ist. Die in diesen Gleichungen enthaltenen Reihen sind rasch konvergent, sobald nur N einigermassen grösser ist als h. Insbesondere wird für $h=1$:

6) $$l(N+1)-l(N)=\frac{1}{N}-\frac{1}{2N^2}+\frac{1}{3N^3}-\cdots,$$

7) $$l(N+1)-l(N)=2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\frac{1}{5(2N+1)^5}+\cdots\right].$$

117. Modul der gewöhnlichen Logarithmen. Es ist

$$e^{l(x)}=10^{\log\text{ vulg }x}=x.$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so folgt

$$l(x)=\log\text{vulg}\,x\,.\,l(10),$$

und setzt man $M=\frac{1}{l(10)}$, so ist

8) $$\log\text{vulg}\,x=M\cdot l(x).$$

Demnach erhält man die Logarithmen in Bezug auf die Basis 10, indem man die natürlichen Logarithmen mit der Konstante M multipliziert, welche der *Modul* der gewöhnlichen Logarithmen genannt wird.

Die Formeln des vorigen Paragraphen liefern die Berechnung von M; zunächst ergiebt die Formel 7) für $N=1$:

9) $$l(2)=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\,.\,3^3}+\frac{1}{5\,.\,3^5}+\frac{1}{7\,.\,3^7}+\frac{1}{9\,.\,3^9}+\cdots\right).$$

Die Formel 5) giebt sodann, indem man $N=8$ und $h=2$ setzt:

10) $$l(10)=3\,l(2)+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\,.\,9^3}+\frac{1}{5\,.\,9^5}+\cdots\right),$$

und man hat folglich

11) $$\frac{1}{M}=6\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\cdots\right)+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\cdots\right).$$

Diese Reihen sind genügend rasch konvergente; aber man kann auch unendlich viele andere bilden, in denen die Glieder noch rascher abnehmen. Wenn man z. B. in der Gleichung 5) $N = 4096 = 2^{12}$, $h = 4$, also $N + h = 4100$ setzt, und in der Formel 7) $N = 40 = 2^2 . 10$, so folgt:

$$l(41)+2l(10)=12l(2)+2\left[\frac{1}{2049}+\frac{1}{3.(2049)^3}+\frac{1}{5.(2049)^5}+\cdots\right],$$

$$l(41)=l(10)+2l(2)+2\left[\frac{1}{81}+\frac{1}{3.81^3}+\frac{1}{5.81^5}+\cdots\right],$$

und eliminiert man $l(41)$ und $l(2)$ zwischen diesen Gleichungen und der Gleichung 10), so wird:

$$12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{M} &= 20\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\cdots\right) \\ &+ 6\left(\frac{1}{81}+\frac{1}{3.81^3}+\frac{1}{5.81^5}+\cdots\right) \\ &- 6\left(\frac{1}{2049}+\frac{1}{3.2049^3}+\cdots\right). \end{aligned}\right.$$

Berechnet man jedes Glied der Gleichung 11) oder 12) auf 28 Dezimalstellen, um für die Werte von $\frac{1}{M}$ und M 25 Dezimalen zu erhalten, so findet man:

$$13)\quad \frac{1}{M} = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ldots,$$

$$14)\quad M = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ldots$$

118. Berechnung der gewöhnlichen Logarithmen. Die Formeln 4) und 5) dienen zur Berechnung der gewöhnlichen Logarithmen, wenn man ihre rechten Seiten mit dem Modul M multipliziert. Man hat also:

$$15)\quad \left\{\begin{aligned} \log(N+h)-\log N &= M\left[\frac{h}{N}-\frac{h^2}{2N^2}+\frac{h^3}{3N^3}+\cdots\right], \\ \log(N+h)-\log N &= 2M\left[\frac{h}{2N+h}+\frac{h^3}{3(2N+h)^3}+\cdots\right], \end{aligned}\right.$$

und setzt man $h = 1$:

$$16)\quad \begin{cases} \log(N+1) - \log N = M\left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \cdots\right], \\ \log(N+1) - \log N = 2M\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \cdots\right]. \end{cases}$$

Da der Modul M bekannt ist, so kann man mittelst dieser Gleichungen die Berechnung ausführen.

119. Bemerkung über den Gebrauch von Logarithmentafeln. Bei der Benutzung der Logarithmentafeln nimmt man an, dass kleine Änderungen des Numerus proportional sind den entsprechenden Änderungen des Logarithmus. Wir wollen zeigen, dass diese Annahme für diejenige Annäherung, welche man zu erreichen wünscht, zulässig ist. Zu dem Zwecke nehmen wir die Gleichung

$$l(1+x) = x - \frac{\theta x^2}{2},$$

welche im § 115 abgeleitet wurde, und in welcher x eine gegebene, zwischen 0 und 1 gelegene Zahl bedeutet, ebenso θ eine positive Grösse kleiner als 1. Multiplizieren wir die rechte Seite mit dem Modul M, um zu den gewöhnlichen Logarithmen überzugehen, und ersetzen wir x durch $\frac{h}{N}$, so wird

$$17)\qquad \log(N+h) - \log N = M\left(\frac{h}{N} - \frac{\theta h^2}{2N^2}\right),$$

auch hat man, indem man $h = 1$ setzt und θ an Stelle von θ' schreibt:

$$18)\qquad \log(N+1) - \log N = M\left(\frac{1}{N} - \frac{\theta'}{2N^2}\right).$$

Setzen wir

$$\log(N+h) - \log N = \Delta,\ \log(N+1) - \log N = D,$$

ferner:

$$19)\qquad \Delta = hD + \varepsilon,\quad h = \frac{\Delta}{D} + \eta,$$

so ist ε der Fehler, welcher bei der Berechnung des Logarithmus von $N+h$ begangen wird, wenn man bei Benutzung der Logarithmentafel den Proportionalteiler

20) $$\Delta = \frac{h}{1} D$$

addiert. Desgleichen ist η der Fehler, welchen man bei der Bestimmung des Numerus zu einem gegebenen Logarithmus begeht, wenn man die nämliche Proportion anwendet.

Ersetzt man nun in den Formeln 19) Δ und D durch ihre Werte aus den Formeln 17) und 18), so wird:

$$\varepsilon = \frac{M(\theta' h - \theta h^2)}{2N^2}, \quad \eta = \frac{\theta h^2 - \theta' h}{2N - \theta'};$$

h, θ, θ' sind aber enthalten zwischen 0 und 1, und M ist kleiner als $\frac{1}{2}$; also ist

$$\text{abs}\,[\varepsilon] < \frac{1}{4N^2}, \quad \text{abs}\left[\frac{\eta}{N}\right] < \frac{1}{2N^2}.$$

Man sieht hieraus, dass, wenn N grösser ist als 10000, der Betrag von ε kleiner ist als der vierte Teil der achten Dezimalstelle; ebenso ist der relative Fehler $\frac{\eta}{N}$ kleiner als die Hälfte der achten Dezimalstelle. Also ist die Anwendung der Proportion 20) zulässig, wenn man sich auf sieben Stellen beschränkt, sei es, dass man den Logarithmus zu einer gegebenen Zahl, oder umgekehrt zu einem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl berechnen will.

Die Binomialreihe.

120. Der Ausdruck $(a + b)^m$, in welchem m eine beliebige reelle Zahl bedeuten soll, kann mehrere Werte annehmen, ausgenommen, wenn m eine ganze, positive oder negative Zahl ist. Ist aber $a + b$ positiv, so ist immer einer dieser Werte reell und positiv. Dieser eine Wert ist es, den wir betrachten. Setzt man $\frac{b}{a} = x$, so wird der obige Ausdruck gleich dem Produkte von a^m mit $(1 + x)^m$. Mit dieser letzteren Funktion haben wir uns zu beschäftigen, indem wir uns die Aufgabe stellen, dieselbe in einer Reihe, fortschreitend nach ganzen positiven Potenzen von x, zu entwickeln.

Man hat

$$\frac{d^n(1+x)^m}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

und für $x = 0$ reduziert sich die Ableitung auf den Wert:

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1).$$

Folglich hat man:

$$1)\quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3$$
$$+ \dots \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{n-1!}x^{n-1} + R_n,$$

und

$$2)\quad R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n(1+\theta x)^{m-n},$$

oder

$$3)\quad R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n-1!}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{m-n}.$$

θ bezeichnet wie gewöhnlich eine Grösse zwischen 0 und 1. Wenn nun schliesslich R_n mit unbegrenzt wachsenden Werten von n nach 0 konvergiert, so wird:

$$4)\quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

und dies ist die Binomialformel für einen beliebigen Exponenten m. Es ist kaum nötig hinzuzufügen, dass diese Reihe von selbst abbricht, wenn m eine positive ganze Zahl ist; von diesem Falle sehen wir im folgenden ab.

Das Verhältnis des $n+1^{\text{ten}}$ Gliedes zum n^{ten} ist:

$$\frac{m-n+1}{n}x \quad \text{oder} \quad -\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x,$$

eine Grösse, die für beliebig wachsende Werte von n nach $-x$ konvergiert. Hieraus folgt, dass die Gleichung 4) nicht besteht, ausser wenn x zwischen -1 und $+1$ enthalten ist, denn anderen Falles wachsen die absoluten Werte der Reihenglieder von einer bestimmten Stelle ab beständig.

Wir nehmen zuerst an, dass x zwischen 0 und 1 liegt; dann hat man, nach der Formel 2) des Restes:

$$R_n = \left[\frac{mx}{1}\cdot\frac{(m-1)x}{2}\cdot\frac{(m-2)x}{3}\dots\frac{(m-n+1)x}{n}\right]\frac{1}{(1+\theta x)^{n-m}}.$$

Die Grösse zwischen den Klammern konvergiert bei beliebig wachsenden Werten von n nach 0. Denn wenn n um die Einheit vergrössert wird, erhält dieses Produkt den Faktor $-x\left(1-\frac{m+1}{n}\right)$, der nach der Grenze $-x$ konvergiert, wenn n beliebig wächst. Hieraus folgt, dass in diesem Produkte die Anzahl derjenigen Faktoren, deren Betrag grösser ist als 1, eine begrenzte ist, während die Anzahl der Faktoren, deren Betrag kleiner wird als 1, ja selbst kleiner wird als irgend ein zwischen x und 1 enthaltener Wert, grösser wird als jede angegebene Zahl. Der andere Faktor $\frac{1}{(1+\theta x)^{m-n}}$ kann die Einheit zur Grenze haben, wenn die Grenze von θ null ist; aber er überschreitet keinesfalls die Eins. Demnach konvergiert R_n nach 0, wenn x positiv und kleiner als 1 ist, und folglich besteht in diesem Falle die Gleichung 4).

Nehmen wir nun an, dass x zwischen 0 und -1 enthalten ist; wir setzen hierbei $x = -z$ und wenden die Form 3) für den Rest an. Er ist

$$R_n = (-1)^n\left[\frac{(m-1)z}{1}\cdots\frac{(m-n+1)z}{n-1}\right] mz\,(1-\theta z)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}.$$

Wenn n unendlich wächst, so konvergiert der zwischen den Klammern enthaltene Faktor nach 0, wie eben gezeigt wurde. Der Faktor $mz\,(1-\theta z)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}$ konvergiert ebenfalls nach 0, ausser wenn die Grenze von θ null ist. Dann aber ist der Wert desselben endlich und höchstens gleich mz. Hieraus folgt, dass R_n nach 0 konvergiert, und dass also die Gleichung 4) auch für die Werte von x zwischen 0 und -1 besteht.

121. Die bisherige Untersuchung lehrt, dass die Gleichung 4) für alle Werte von x zwischen -1 und $+1$ gültig ist, aber sie sagt nichts aus über die Grenzen -1 und $+1$ selber. Abel hat bewiesen, dass eine Potenzreihe mit positiven ganzzahligen Exponenten, wenn sie für einen Wert x_1 der Variabelen konvergiert, auch für jeden Wert x konvergent ist, dessen Betrag kleiner ist als x_1 (§ 104); und weiter, dass,

wenn S die Summe der Potenzreihe für den Wert x der Variabelen bezeichnet, und S_1 die Summe für den Wert x_1, die Grösse S nach S_1 konvergiert, wenn x in den Wert x_1 übergeht. Letzteres besagt, dass eine Potenzreihe, welche auch an den Grenzen ihres Konvergenzintervalles konvergiert, eine stetige Funktion der Variabelen ist nicht nur innerhalb des Intervalles (§ 111), sondern auch einschliesslich der Grenzen. Indem wir diese Erweiterung zunächst als bewiesen voraussetzen, können wir behaupten, dass die Gleichung 4) auch für die Grenzen -1 und $+1$ gelten wird, wenn die Reihe auf der rechten Seite für diese Werte konvergiert. In welchen Fällen dies stattfindet, ist leicht zu bestimmen. Ist $x = \pm 1$, so wird das Verhältnis des $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes der Reihe 4) zum n^{ten} gleich

$$\mp\left(1 - \frac{m+1}{n}\right).$$

Ist also $m + 1 < 0$, so wachsen die Beträge der Reihenglieder beständig und die Reihe ist divergent. Wir müssen also $m + 1$ positiv annehmen.

Ist u_n der Betrag des n^{ten} Gliedes der Reihe 4) unter der Voraussetzung, dass $x = \pm 1$ ist, und bezeichnen wir mit v_n das n^{te} Glied der Reihe

$$\frac{1}{1^{m+1}},\ \frac{1}{2^{m+1}},\ \frac{1}{3^{m+1}},\ \frac{1}{4^{m+1}}\ \ldots,$$

so ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{m+1}{n},\quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(m+1)}.$$

Die Binomialformel ist anwendbar auf die Funktion $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(m+1)}$; und beschränkt man die Entwickelung auf zwei Glieder, so hat man

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{(m+1)}{n} + \frac{(m+1)(m+2)}{2n^2}\left(1 + \frac{\theta}{n}\right)^{-m-3}.$$

Da nun $m + 1$ positiv ist, so ist

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ oder } \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n}.$$

Ist für einen bestimmten Wert von n

$$\frac{u_n}{v_n} = k \quad \text{oder} \quad u_n = k v_n,$$

so wird

$$u_{n+1} < k v_{n+1}, \; u_{n+2} < k v_{n+2}, \; u_{n+3} < k v_{n+3} \ldots$$

Nun ist aber die Reihe

$$5) \qquad k v_0, \; k v_1, \; k v_2 \ldots$$

konvergent, wenn $m > 0$ ist (§ 98); also konvergiert auch die Reihe

$$u_0, \; u_1, \; u_2 \ldots$$

Demnach gilt bei positivem m die Gleichung 4) auch für $x = \pm 1$ und man hat

$$6) \quad 2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \cdots$$

$$7) \quad 0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{2!} - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \cdots$$

Ist m negativ, so wird die linke Seite der Gleichung 4) unendlich für $x = -1$, und die Reihe auf der rechten Seite kann also nicht konvergieren. Dagegen konvergiert aber die Reihe für $x = +1$, wenn m zwischen 0 und -1 gelegen ist, und folglich gilt dann auch die Gleichung 6) für diese Werte von m. In der That, die Glieder der Reihe 6) sind abwechselnd positiv und negativ, und ihre Beträge nehmen durchaus ab und konvergieren nach 0, denn sie sind von einer bestimmten Stelle an kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe 5).

Den Beweis des zweiten der oben angeführten Sätze hat Abel (Oeuvres complètes. Édition par Sylow et Lie pag. 223) in seiner grundlegenden Untersuchung über die Binomialreihe in folgender Weise geführt.

Wenn die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_{n-1} x^{n-1} + \ldots$$

konvergent ist für einen bestimmten Wert $x = x_1$, und man bezeichnet ihren Wert als Funktion von x mit $f(x)$, so ist

$$f(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + \ldots a_{n-1} x_1^{n-1} + \varphi(x_1),$$

$$f(x_1 - \delta) = a_0 + a_1 (x_1 - \delta) + \ldots a_{n-1} (x_1 - \delta)^{n-1} + \varphi(x_1 - \delta).$$

Für den Rest $\varphi(x)$ bestehen die Gleichungen:

$$\varphi(x_1) = a_n x_1^n + a_{n+1} x_1^{n+1} + a_{n+2} x_1^{n+2} + \dots$$
$$\varphi(x_1 - \delta) = a_n (x_1 - \delta)^n + a_{n+1} (x_1 - \delta)^{n+1} + a_{n+2}(x_1 - \delta)^{n+2} + \dots,$$

oder:

$$\varphi(x_1 - \delta) = a_n x_1^n \left(\frac{x_1 - \delta}{x_1}\right)^n + a_{n+1} x_1^{n+1} \left(\frac{x_1 - \delta}{x_1}\right)^{n+1}$$
$$+ a_{n+2} x_1^{n+2} \left(\frac{x_1 - \delta}{x_1}\right)^{n+2} + \cdots$$

Es gilt nun der Satz: Der absolute Wert von $\varphi(x_1 - \delta)$ ist kleiner als das Produkt

$$\left(\frac{x_1 - \delta}{x_1}\right)^n \cdot p,$$

wenn man mit p den grössten Betrag bezeichnet, welcher unter den Summen:

$$8) \quad a_n x_1^n, \; a_n x_1^n + a_{n+1} x_1^{n+1}, \; a_n x_1^n + a_{n+1} x_1^{n+1} + a_{n+2} x_1^{n+2} \dots$$

vorkommt; diesen Hilfssatz vorausgesetzt kann man weiter schliessen: Da die Potenzreihe für $x = x_1$ konvergent ist, so lässt sich eine Stelle n fixieren, von der ab der Betrag sämtlicher Summen 8), und also auch der grössesten unter ihnen, welche mit p bezeichnet wurde, kleiner sind als eine beliebig kleine Zahl ε. Mithin wird nicht nur abs $[\varphi(x_1)] < \varepsilon$, sondern auch

$$\text{abs}\,[\varphi(x_1 - \delta)] < \left(\frac{x_1 - \delta}{x_1}\right)^n p$$

unabhängig von δ kleiner als ε. Wählt man also erst n so gross, dass abs $[\varphi(x_1)]$ und abs $[\varphi(x_1 - \delta)]$ kleiner als ε sind, und alsdann δ so klein, dass das Polynom

$$S_n(x_1 - \delta) = a_0 + a_1 (x_1 - \delta) + a_2 (x_1 - \delta)^2 + \cdots a_{n-1} (x_1 - \delta)^{n-1}$$

um weniger als ε von dem Polynome

$$S_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots a_{n-1} x_1^{n-1}$$

differiert, so folgt aus der Gleichung:

$$f(x_1) - f(x_1 - \delta) = S_n(x_1) - S_n(x_1 - \delta) + \varphi(x_1) - \varphi(x_1 - \delta),$$

dass

$$\text{abs}\,[f(x_1) - f(x_1 - \delta)] < 3\,\varepsilon,$$

d. h. dass die Funktion $f(x_1 - \delta)$ stetig in den Wert $f(x_1)$ übergeht, wenn δ null wird.

Beweis des Hilfssatzes. Der Hilfssatz selbst beweist sich folgendermassen: Es seien $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$ positive abnehmende Werte, und die Grössen

$$p_0, \; p_1, \; p_2 \cdots p_m, \cdots$$

mögen eine konvergente Reihe bilden. So ist

$$\varepsilon_0 p_0 + \varepsilon_1 p_1 + \cdots \varepsilon_m p_m = (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) t_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) t_1 + \cdots (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) t_{m-1} + \varepsilon_m t_m,$$

wenn man

$$p_0 = t_0, \; p_0 + p_1 = t_1, \; p_0 + p_1 + p_2 = t_2, \cdots p_0 + p_1 + \cdots p_m = t_m, \cdots$$

also

$$p_0 = t_0, \; p_1 = t_1 - t_0, \; p_2 = t_2 - t_1, \cdots p_m = t_m - t_{m-1} \cdots$$

setzt. Nun ist aber, da die Differenzen $\varepsilon_0 - \varepsilon_1, \; \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \ldots$ sämtlich positiv sind, der Betrag von

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) t_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) t_1 + \cdots (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) t_{m-1} + \varepsilon_m t_m$$

kleiner als der grösste Betrag unter den Werten $t_0, t_1 \cdots t_m$, multipliziert mit der Summe $(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \cdots (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + \varepsilon_m = \varepsilon_0$, d. h. es ist wie gross auch m werden mag

$$\varepsilon_0 p_0 + \varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2 + \cdots \varepsilon_m p_m < \varepsilon_0 p,$$

wenn p den grössten Betrag unter den Summen

$$p_0, \; p_0 + p_1, \; p_0 + p_1 + p_2, \cdots p_0 + p_1 + \cdots p_m, \cdots$$

bezeichnet.

Entwickelung der Funktion $f(x+h)$ in eine Reihe, geordnet nach Potenzen von h, für den Fall, dass die Taylorsche Reihe nicht gültig ist.

122. Wird die Funktion $f(x)$ oder eine ihrer Ableitungen unstetig, wenn die Variabele x den besonderen Wert x_0 annimmt, so kann die Funktion $f(x_0 + h)$ nicht nach der Taylorschen Gleichung in eine Reihe entwickelt werden, welche nach ganzen positiven Potenzen von h fortschreitet. Lässt man aber negative oder gebrochene Potenzen von h zu, so kann es vorkommen, dass $f(x_0 + h)$ in eine konvergente Reihe entwickelbar ist; in diesem Falle hat man die aufeinander folgenden Reihenglieder folgendermassen zu berechnen.

Wenn die Funktion $f(x)$ einen endlichen, von 0 verschiedenen Wert für $x = x_0$ besitzt, und stetig ist für alle Werte von $x = x_0$ bis $x_0 + h$, so hat man

$$1) \qquad f(x_0 + h) = A + \varepsilon$$

und ε wird mit h unendlich klein.

Ist aber die Funktion $f(x)$ stetig von $x = x_0$ bis $x_0 + h$ und verschwindet sie für den Wert $x = x_0$, so wollen wir annehmen, dass man eine ganze oder gebrochene Zahl n ausfindig machen kann, welche, wenn h als unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachtet wird, die Ordnung des Verschwindens der Funktion angiebt. Alsdann hat man

$$\lim \frac{f(x_0 + h)}{h^n} = A,$$

oder

$$2) \qquad f(x_0 + h) = h^n (A + \varepsilon),$$

wobei ε wiederum mit h unendlich klein wird.

Wird endlich die Funktion $f(x)$ für $x = x_0$ unendlich, und kann man eine positive Zahl m bestimmen, welche die Ordnung des Unendlichwerdens von $f(x_0 + h)$ im Vergleich zu $\frac{1}{h}$ ausdrückt, derart, dass

$$\lim h^m f(x_0 + h) = A$$

eine endliche von 0 verschiedene bestimmte Zahl wird, so hat man

$$3) \qquad f(x_0 + h) = \frac{1}{h^m} (A + \varepsilon).$$

Die Formel 2) schliesst die Formel 3) in sich, wenn man für n den negativen Wert $-m$ einsetzt; sie umfasst auch die Formel 1), wenn man für n den Wert 0 zulässt. So hat man also in den drei betrachteten Fällen, indem man x statt $x_0 + h$ schreibt:

$$4) \qquad f(x) = (x - x_0)^n f_1(x).$$

Hierbei ist n eine positive oder negative Zahl, die auch 0 sein kann, $f_1(x)$ eine Funktion, welche für $x = x_0$ einen endlichen, von 0 verschiedenen Wert A annimmt. Da die Funktion

$$f_1(x) - A$$

für $x = x_0$ verschwindet, so erhält man, wenn man eine positive Zahl $n_1 - n$ ausfindig machen kann, welche die Ordnung des Verschwindens im Vergleich zu $x - x_0$ angiebt, ebenso

$$f_1(x) - A = (x - x_0)^{n_1 - n} f_2(x);$$

$f_2(x)$ ist dann eine Funktion, welche für $x = x_0$ einen endlichen von 0 verschiedenen Wert A_1 annimmt. Also wird die Gleichung 4):

5) $$f(x) = A(x - x_0)^n + (x - x_0)^{n_1} f_2(x).$$

Die Funktion

$$f_2(x) - A_1$$

wird für $x = x_0$ gleich 0, und kann man eine endliche positive Zahl $n_2 - n_1$ ausfindig machen, welche die Ordnung des Verschwindens angiebt, so ist

$$f_2(x) - A_1 = (x - x_0)^{n_2 - n_1} f_3(x);$$

$f_3(x)$ erhält für $x = x_0$ einen endlichen von 0 verschiedenen Wert A_2. Die Gleichung 5) wird also:

6) $$f(x) = A(x - x_0)^n + A_1(x - x_0)^{n_1} + (x - x_0)^{n_2} f_3(x).$$

Fährt man so fort, so gewinnt man den folgenden Ausdruck:

7) $$f(x) = A(x - x_0)^n + A_1(x - x_0)^{n_1} + A_2(x - x_0)^{n_2} + \dots A_{i-1}(x - x_0)^{n_{i-1}} + R_i,$$

und es ist

8) $$R_i = (x - x_0)^{n_i} f_{i+1}(x) = (x - x_0)^{n_{i-1}} [f_i(x) - A_{i-1}].$$

Diese Gleichung setzt aber voraus, dass man die wachsenden Zahlen

$$n, n_1, n_2, \dots n_i$$

so bestimmen kann, dass für jeden Wert von k von 1 bis i der Quotient

$$\frac{f_k(x) - A_{k-1}}{(x - x_0)^{n_k - n_{k-1}}}$$

nach einer bestimmten, von 0 verschiedenen, endlichen Grenze A_k konvergiert, wenn x gleich x_0 wird.

Sind diese Bedingungen stets erfüllt, wie gross auch i wird, und konvergiert der Rest R_i bei beliebig wachsenden Werten von i nach 0, so folgt aus der Gleichung 7) die Entwickelung:

9) $$f(x) = A(x - x_0)^n + A_1(x - x_0)^{n_1} + A_2(x - x_0)^{n_2} + \cdots$$

oder wenn man $x - x_0 = h$ setzt:

10) $$f(x_0 + h) = Ah^n + A_1 h^{n_1} + A_2 h^{n_2} + \cdots$$

Dies ist die Entwickelung von $f(x_0 + h)$ in eine Reihe, welche nach wachsenden positiven oder negativen Potenzen von h geordnet ist.

123. Betrachten wir z. B. die Funktion

$$f(x) = \sqrt{\sin x - \sin x_0},$$

deren Ableitung $f'(x)$ für $x = x_0$ unendlich wird, die also die Entwickelung nach der Taylorschen Reihe nicht zulässt. Die Funktion $\sin x - \sin x_0$ ist entwickelbar nach der Taylorschen Reihe, und es ist:

$$f(x) = \sqrt{(x - x_0)\cos x_0 - \frac{(x-x_0)^2}{2!}\sin x_0 + \cdots}$$

Hieraus folgt, dass die Funktion

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x - x_0}}$$

für $x = x_0$ die Grenze $\sqrt{\cos x_0}$ hat. Demnach hat man in den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen zunächst

$$n = \frac{1}{2}, \quad A = \sqrt{\cos x_0}, \quad f_1(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x - x_0}},$$

ferner:

$$(x - x_0)^{n_1 - \frac{1}{2}} f_2(x) = \sqrt{\cos x_0 - \frac{x - x_0}{1.2}\sin x_0 - \ldots} - \sqrt{\cos x_0}$$

$$= \frac{-\frac{x - x_0}{1.2}\sin x_0 - \ldots}{\sqrt{\cos x_0 - \frac{x-x_0}{1.2}\sin x_0 - \ldots} + \sqrt{\cos x_0}}.$$

Dieser Ausdruck wird unendlich klein von der ersten Ordnung, und es ist

$$n_1 = \frac{3}{2}, \quad A_1 = -\frac{\sin x_0}{4\sqrt{\cos x_0}},$$

$$f_2(x) = -\frac{\frac{1}{2}\sin x_0 - \frac{x - x_0}{3!}\cos x_0 + \ldots}{\sqrt{\cos x_0 - \frac{x - x_0}{1.2}\sin x_0 - \ldots} + \sqrt{\cos x_0}}.$$

Will man die Entwickelung auf zwei Glieder beschränken, so erhält man

$$\sqrt{\sin x - \sin x_0} = \sqrt{\cos x_0}\,(x-x_0)^{\frac{1}{2}} - \frac{\sin x_0}{4\sqrt{\cos x_0}}\,(x-x_0)^{\frac{3}{2}} + R_2,$$

und der Rest R_2 hat den Wert:

$$R_2 = (x-x_0)^{\frac{3}{2}}\left[f_2(x) + \frac{\sin x_0}{4\sqrt{\cos x_0}}\right].$$

Er wird von höherer Ordnung als der $\frac{3}{2}$ten unendlich klein.

Bestimmung der Grenze, nach welcher der Quotient zweier Funktionen konvergiert, welche beide gleichzeitig null oder unendlich werden.

124. Wenn eine Funktion sich in der gebrochenen Form $\frac{f(x)}{F(x)}$ darstellt, so kann es eintreten, dass Zähler und Nenner, welche als stetige Funktionen vorausgesetzt sind, gleichzeitig verschwinden oder unendlich werden für einen speziellen Wert $x = x_0$. Es handelt sich dann darum, den eigentlichen Wert dieser Funktion an dieser Stelle zu ermitteln, d. h. den Wert, nach welchem der Quotient konvergiert, wenn die Variabele x sich dem Werte x_0 beliebig nähert. In vielen Fällen gelangt man dazu vermittelst des folgenden Satzes:

Lehrsatz I. *Wenn die stetigen Funktionen* $f(x)$ *und* $F(x)$ *beide nach dem Werte null konvergieren, falls* x *der Grenze* x_0 *beliebig sich nähert, und wenn die Ableitungen dieser Funktionen bestimmte endliche Werte haben, so konvergieren die Quotienten*

$$\frac{f(x)}{F(x)},\quad \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

nach der nämlichen bestimmten Grenze, oder sie wachsen beide über jede Grenze, falls man x *nach* x_0 *konvergieren lässt.*

1. Wir nehmen zuerst an, dass die Ableitung $F'(x)$ für $x = x_0$ nicht null ist. Alsdann lässt sich die Grösse h so klein

wählen, dass auch im Intervalle von x_0 bis x_0+h die Funktion $F'(x)$ nicht verschwindet, und es wird nach dem Mittelwertsatz § 17:

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)}.$$

Die Grösse h_1 liegt zwischen 0 und h, sie verschwindet also mit h, und folglich ist

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)} \text{ für } x = x_0.$$

2. Wird die Funktion $F'(x)$ für $x = x_0$ null, die Funktion $f'(x)$ aber endlich und von null verschieden, so beweist man die Gleichung:

$$\frac{F(x+h)}{f(x+h)} = \frac{F'(x+h_1)}{f'(x+h_1)}, \quad \text{also} \quad \frac{f(x+h)}{F(x+h)} = \frac{f'(x+h_1)}{F'(x+h_1)}.$$

Mithin ist auch hier

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

vorausgesetzt, dass die Funktion $F'(x)$, indem sie nach 0 konvergiert, nicht immer wieder ihr Zeichen wechselt, weil alsdann die rechte Seite unbestimmt unendlich wird. Die Beträge der Quotienten wachsen jetzt beide über jede Grenze.

Der Fall, dass beide Funktionen $f'(x)$ und $F'(x)$ null werden, wird im Satz II untersucht werden. Wird von den beiden Funktionen $f'(x)$ und $F'(x)$ die eine bestimmt unendlich, während die andere bestimmt ist, und auch, wenn sie null wird, ihr Zeichen nicht fortwährend wechselt, so ist auch jetzt noch $\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}$. Allgemein lässt sich also unter diesen Bedingungen behaupten: Sobald die rechte Seite eine bestimmte endliche oder unendliche Grenze hat, so ist dieser Wert auch Grenze für die linke Seite.

Das erhaltene Resultat bleibt bestehen, wie gross auch der Wert x_0 sein mag, und gilt demnach auch für $x_0 = \infty$. Da aber die Formel, von welcher wir ausgingen, voraussetzt,

dass x_0 einen endlichen Wert hat, so liegt es uns doch ob, den Fall $x_0 = \infty$ besonders zu prüfen. Setzt man $x = \frac{1}{z}$, so ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Wird nun x unendlich, so konvergiert z nach 0, und man hat die Gleichung

$$\frac{f\left(\frac{1}{h}\right)}{F\left(\frac{1}{h}\right)} = \frac{-\frac{1}{h_1^2} f'\left(\frac{1}{h_1}\right)}{-\frac{1}{h_1^2} F'\left(\frac{1}{h_1}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{h_1}\right)}{F'\left(\frac{1}{h_1}\right)},$$

sobald für die Funktionen $f'\left(\frac{1}{h_1}\right)$ und $F'\left(\frac{1}{h_1}\right)$ die vorigen Bedingungen erfüllt sind. Also ist auch hier

$$\lim \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)} \text{ für } z = 0,$$

oder

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)} \text{ für } x = \infty.$$

Lehrsatz II. *Wenn die beiden Funktionen* $f(x)$ *und* $F(x)$ *gleichzeitig null werden für* $x = x_0$, *und wenn ebenso ihre Ableitungen bis zu der Ableitung* $n-1^{\text{ter}}$ *Ordnung sich verhalten, während die Ableitung* n^{ter} *Ordnung zum mindesten für eine der Funktionen einen endlichen von null verschiedenen Wert besitzt, so hat man für* $x = x_0$

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f^n(x)}{F^n(x)} \text{ für } x = x_0.$$

Es ist nach dem Taylorschen Satze:

$$f(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!} f^n(x_0 + h_1) \qquad (0 < h_1 < h),$$

$$F(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!} F^n(x_0 + h_2) \qquad (0 < h_2 < h),$$

also:

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f^n(x_0 + h_1)}{F^n(x_0 + h_2)}.$$

Haben nun die Ableitungen $f^n(x)$ und $F^n(x)$ beide für $x = x_0$ bestimmte von 0 verschiedene Werte, so wird

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f^n(x)}{F^n(x)} \text{ für } x = x_0.$$

Ist $f^n(x_0)$ gleich 0, und $F^n(x_0)$ von 0 verschieden, so ist auch

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f^n(x)}{F^n(x)} = 0.$$

Ist $F^n(x_0)$ gleich 0, und $f^n(x_0)$ von 0 verschieden, so hat man

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F^n(x_0+h_2)}{f^n(x_0+h_1)}, \text{ also } \lim \frac{F(x)}{f(x)} = \lim \frac{F^n(x)}{f^n(x)} = 0,$$

während

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} \text{ und } \lim \frac{f^n(x)}{F^n(x)},$$

wiederum dem Zeichen nach verschieden sein können. Dieser Satz bleibt auch bestehen, wenn x_0 unendlich wird.

Der Untersuchung des Falles, dass in einem Quotienten Zähler und Nenner gleichzeitig unendlich werden, müssen wir, um eine brauchbare Regel zu gewinnen, folgenden Cauchyschen Satz vorausschicken: Wird eine Funktion $f(x)$ gleichzeitig mit x in bestimmter Weise unendlich gross, so ist für jeden endlichen Wert von h

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim \frac{f(x)}{x} \quad \text{für } x = \infty,$$

falls überhaupt ein bestimmter endlicher Grenzwert für den ersten Quotienten bei irgend einem endlichen Werte von h vorhanden ist.

Wir nehmen für den Beweis $h > 0$ an, und es möge $f(x)$ positiv oder negativ unendlich werden. Ist der Grenzwert der linken Seite K, so kann man x so gross wählen, dass

$$K - \varepsilon < \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < K + \varepsilon,$$

oder $Kh - \varepsilon h < f(x+h) - f(x) < Kh + \varepsilon h$ ist, wobei ε eine durch Wahl von x beliebig kleine Grösse bezeichnet. Setzt man für x die Werte x, $x+h$, $x+2h$, ... $x+(n-1)h$, und addiert die entstehenden Ungleichungen, so folgt:

$$nKh - n\varepsilon h < f(x+nh) - f(x) < nKh + n\varepsilon h,$$

oder

$$K - \varepsilon < \frac{f(x+nh)-f(x)}{nh} < K + \varepsilon.$$

Um das Argument der Funktion in allgemeinster Weise unendlich werden zu lassen, setze man

$$x = x_0 + ph,$$

wobei $0 < x_0 < h$, p eine ganze positive Zahl ist; so wird

$$K - \varepsilon < \frac{f[x_0 + (p+n)h] - f(x_0 + ph)}{nh} < K + \varepsilon.$$

Bezeichnet man $x_0 + (p+n)h = \xi$, $nh = \xi - x_0 - ph$, so hat man

$$K - \varepsilon < \frac{f(\xi) - f(x_0 + ph)}{\xi - x_0 - ph} < K + \varepsilon,$$

oder

$$K - \varepsilon < \frac{f(\xi) - f(x_0 + ph)}{\xi} \cdot \frac{\xi}{\xi - x_0 - ph} < K + \varepsilon.$$

Lässt man nun n beliebig wachsen, so wächst auch ξ unbegrenzt, und zwar kann, da sich x_0 beliebig fixieren lässt, das Argument ξ jeden beliebig grossen Wert annehmen. Da der Quotient $\frac{f(x_0 + ph)}{\xi}$ die Grenze 0, und $\frac{\xi}{\xi - x_0 - ph}$ die Grenze 1 hat, so ist auch

$$K - \varepsilon < \lim \frac{f(\xi)}{\xi} < K + \varepsilon$$

und weil ε von vornherein beliebig klein gewählt werden konnte, so ist

$$\lim_{\xi = \infty} \frac{f(\xi)}{\xi} = K.$$

Der Satz bleibt auch bestehen, wenn der Quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ für $x = \infty$ in bestimmter Weise unendlich wird. Denn kann man x so gross wählen, dass derselbe grösser bleibt als eine beliebige Zahl K, so folgt nach demselben Verfahren:

$$\frac{f(x + nh) - f(x)}{nh} > K,$$

oder

$$\frac{f(\xi) - f(x_0 + ph)}{\xi} \cdot \frac{\xi}{\xi - (x_0 + ph)} > K,$$

d. h.

$$\lim \frac{f(\xi)}{\xi} > K.$$

Den Quotienten $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ kann man aber durch den Wert der Ableitung $f'(x + \theta h)$ ersetzen, wenn die Funktion $f(x)$ eine

eindeutige Ableitung besitzt, und sonach folgt aus den Gleichungen

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h),$$

$$\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\frac{f(x)}{x}\quad\text{für } x=\infty$$

die Regel: *Wenn die Funktion* $f(x)$ *eine Ableitung* $f'(x)$ *besitzt, welche für* $x=\infty$ *eine bestimmte endliche oder unendliche Grenze hat, so hat auch der Quotient* $\frac{f(x)}{x}$ *eine bestimmte Grenze, und es ist*

$$\lim_{x=\infty} f'(x)=\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Auf Grund dieser Gleichung kann man nun weiter schliessen: Es ist für die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\varepsilon,$$

$$\frac{F(x)}{x}=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+\varepsilon',$$

wobei ε und ε' zwei Grössen bezeichnen, die durch Wahl eines hinreichend grossen x beliebig klein gemacht werden können, also:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x+h)-f(x)+h\varepsilon}{F(x+h)-F(x)+h\varepsilon'}=\frac{f'(x+\theta h)+\varepsilon}{F'(x+\theta' h)+\varepsilon'}$$

und hieraus ergiebt sich:

Lehrsatz III. *Werden die beiden Funktionen* $f(x)$ *und* $F(x)$ *bestimmt unendlich, wenn* x *unbegrenzt wächst, und haben die Ableitungen dieser Funktionen* $f'(x)$ *und* $F'(x)$ *für* $x=\infty$ *bestimmte endliche oder unendliche Werte, die nicht beide gleichzeitig null sind, so ist*

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)},\quad\textit{für}\ x=\infty\ ^{*)}.$$

Derselbe Satz kann auch bewiesen werden, wenn Zähler und Nenner eines Quotienten für einen endlichen Wert $x=x_0$ unendlich werden; denn dieser Fall lässt sich durch die Substitution $x=x_0+\frac{1}{z}$ auf den eben behandelten zurückführen, indem der Quotient

*) Über die Gültigkeit dieser Gleichung unter allgemeineren Voraussetzungen siehe Rouquet (N. Annal. de Mathém. 2. Sér. T. XVI) und Stolz (Math. Annal. Bd. 15).

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f\left(x_0 + \frac{1}{z}\right)}{F\left(x_0 + \frac{1}{z}\right)}$$

für $z = \infty$ zu untersuchen ist.

125. Beispiele. 1. In den beiden Quotienten

$$\frac{\sin x}{x} \text{ und } \frac{\tang x}{x}$$

werden Zähler und Nenner für $x = 0$ gleichzeitig null. In Anwendung der vorangehenden Regel erhält man

$$\lim \frac{\sin x}{x} = \lim \frac{\cos x}{1} = 1,$$

$$\lim \frac{\tang x}{x} = \lim \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$

2. In dem Quotienten

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

werden Zähler und Nenner, wie auch die ersten beiden Ableitungen für $x = 0$ ebenfalls null. Die Ableitungen dritter Ordnung sind bezüglich

$$e^x + e^{-x} \text{ und } \cos x$$

und reduzieren sich für $x = 0$ auf die Werte 2 und 1. Folglich ist auch der Quotient für diesen Wert von x gleich 2.

3. In dem Quotienten

$$\frac{x^x - x}{x - 1 - l(x)}$$

verschwinden Zähler und Nenner für $x = 1$; desgleichen die Ableitungen erster Ordnung:

$$x^x[1 + l(x)] - 1 \text{ und } 1 - \frac{1}{x}.$$

Die Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$x^x[1 + l(x)]^2 + x^{x-1} \text{ und } \frac{1}{x^2},$$

sie werden für $x = 1$ bezüglich gleich 2 und 1. Folglich konvergiert der gegebene Quotient nach der Grenze 2, wenn x gleich 1 wird.

4. In dem Quotienten $\frac{a^x}{x^n}$ bedeute a eine positive Konstante grösser als 1, und n eine ganze positive Zahl. Zähler und Nenner werden unendlich für $x = \infty$; es ist nach Lehrsatz 3:

$$\lim_{x=\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x=\infty} \frac{a^x l(a)}{n x^{n-1}}.$$

Auch in dem Quotienten der rechten Seite werden Zähler und Nenner gleichzeitig unendlich. Wendet man auf ihn dieselbe Regel an, so erhält man, indem man bis zur n^{ten} Ableitung vorgeht:

$$\lim_{x=\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x=\infty} \frac{a^x . [l(a)]^n}{n!} = \infty.$$

Der Quotient $a^x : x^n$ wird also für $x = \infty$ ebenfalls unendlich, wie gross auch n werden mag; d. h. die Exponentialfunktion a^x wird für $a > 1$ und $x = \infty$ von höherer Ordnung unendlich als jede algebraische Potenz. Ebenso ist, wenn $a > 1$, $\frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x^n}$ für $x = 0$ gleich $\frac{0}{0}$ oder gleich $\frac{z^n}{a^z}$ für $z = \infty$, wenn man $\frac{1}{x} = z$ setzt. Es ist aber:

$$\lim \frac{z^n}{a^z} = \lim \frac{n!}{a^z [l(a)]^n} = 0.$$

5. Die Funktion $\frac{l(x)}{x^\alpha}$ wird für $x = \infty$ von der Form $\frac{\infty}{\infty}$, wenn α irgend eine positive Zahl bedeutet; es ist

$$\lim \frac{l(x)}{x^\alpha} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \qquad \text{für } x = \infty,$$

d. h. der Logarithmus wird für $x = \infty$ von niederer Ordnung unendlich als jede algebraische Potenz.

Desgleichen ist $\frac{l(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$ für $x = 0$ von der Form $\frac{\infty}{\infty}$, indem $\alpha > 0$, und

$$\lim \frac{l(x)}{x^{-\alpha}} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}} = 0 \qquad \text{für } x = 0,$$

d. h. $l(x)$ wird für $x = 0$ unendlich von niederer Ordnung als jede algebraische Potenz.

6. Die Ordnung des Unendlichwerdens der Funktion $x^n l(x)$ für $x = \infty$, in welcher n eine bestimmte positive Zahl bedeutet, lässt sich durch keine rationale oder irrationale Zahl ausreichend bestimmen, und ist doch nicht gleich oder kleiner als n, und nicht grösser als irgend eine Zahl grösser als n. Denn dividiert man die Funktion durch x^r, so ist

$$\frac{x^n\, l(x)}{x^r}$$

gleich 0, solange $r > n$ ist, dagegen unendlich, wenn r gleich oder kleiner als n ist.

7. Die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$ wird für $x = x_0$ null, denn der Exponent wächst mit negativem Zeichen über jeden Betrag. Man erhält für die Ableitung

$$f'(x) = +\frac{2}{(x-x_0)^3}\, e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}},$$

und dieser Wert ist für $x = x_0$ nach Beispiel 4 gleich 0.

Aus der weiteren Differentiation der Gleichung

$$f'(x)\,(x-x_0)^3 = 2\, e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$$

folgt

$$f''(x)\,(x-x_0)^3 + 3\, f'(x)\,(x-x_0)^2 = \frac{2\,.\,2}{(x-x_0)^3}\, e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}},$$

und hieraus ebenso, dass auch $f''(x_0) = 0$ wird; weiter kann man beweisen, dass alle höheren Ableitungen für $x = x_0$ verschwinden.

126. Es giebt Funktionen, welche für besondere Werte der Variabelen unbestimmt werden. Solche Funktionen sind z. B. $\sin x$ und $\cos x$, welche unbestimmt werden für $x = \infty$, oder $\sin\frac{1}{x}$ und $\cos\frac{1}{x}$, die unbestimmt werden für $x = 0$. Auch kann es vorkommen, dass Funktionen, deren Wert für $x = x_0$ bestimmt ist, eine unbestimmte Ableitung für diesen Wert besitzen. So werden die Funktionen $x + \cos x$, $x + \sin x$ bestimmt unendlich mit x, aber ihre Ableitungen $1 - \sin x$, $1 + \cos x$ werden für $x = \infty$ unbestimmt; ebenso ist $x \sin\frac{1}{x}$ für $x = 0$ bestimmt, nämlich 0, aber

$$\lim_{h=0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h=0} \sin\frac{1}{h}$$

wird unbestimmt; und auch die abgeleitete Funktion

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$

hat für $x = 0$ keine bestimmte Grenze. Bildet man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x + \cos x}{x + \sin x} = \frac{1 + \frac{\cos x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}},$$

so erhält man

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)} = 1 \quad \text{für } x = \infty,$$

während die Grenze des Quotienten $\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$ unbestimmt ist. Dieses Resultat steht nicht im Widerspruche mit dem Satz 3 des § 124, denn dieser setzt voraus, dass die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ bestimmte Werte der Ableitungen besitzen.

127. Die Sätze des § 124 führen die Untersuchung des Wertes, den der Quotient $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x = x_0$ annimmt, auf die Bestimmung des Wertes zurück, welchen die neue Funktion $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ im gleichen Falle annimmt. Dabei kann es indessen eintreten, dass diese Reduktion keinen Gewinn bringt, und dass die zweite Funktion dieselben Schwierigkeiten wie die erste bietet.

Die Lösung der Frage, um die es sich handelt, ergiebt sich leicht, sobald die Funktionen $f(x_0 + h)$ und $F(x_0 + h)$ in Reihen entwickelbar sind, welche nach steigenden, positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Potenzen von h geordnet sind. In diesem Falle genügt es, das erste Glied Ah^n der einen Funktion, und ebenso das erste Glied Bh^m der anderen zu bestimmen, denn alsdann erhält man

$$f(x_0 + h) = h^n(A + \varepsilon), \quad F(x_0 + h) = h^m(B + \eta),$$

wobei ε und η mit h unendlich klein werden; also:

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = h^{n-m}\frac{A + \varepsilon}{B + \eta}.$$

Ist $n = m$, so hat man

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{B},$$

während der Quotient nach 0, oder unendlich konvergiert, je nachdem $n > m$, oder $n < m$ ist.

128. Beispiel I. In dem Quotienten

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0} + \sqrt{x - x_0}}{\sqrt{x^2 - x_0^2}}$$

werden Zähler und Nenner 0, wenn x abnehmend nach dem positiven Wert x_0 konvergiert und die Wurzeln mit positivem Zeichen berechnet werden; man erkennt leicht, dass alle Ableitungen für $x = x_0$ unendlich werden. Setzt man $x = x_0 + h$, und wird h als unendlich klein von der ersten Ordnung betrachtet, so wird $\sqrt{x + x_0} = \sqrt{h}$ von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich klein; dagegen ist $\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \sqrt{x_0}\left[\sqrt{1 + \frac{h}{x_0}} - 1\right]$ unendlich klein von erster Ordnung, wie man aus der Entwickelung des Binoms ersieht. Man hat also

$$f(x_0 + h) = \sqrt{h}\,(1 + \varepsilon).$$

Der Nenner $F(x)$ ist gleich

$$\sqrt{x - x_0}\;\sqrt{x + x_0} = \sqrt{h}\;\sqrt{2x_0 + h},$$

und man hat also:

$$F(x_0 + h) = \sqrt{h}\,(\sqrt{2x_0} + \eta).$$

Folglich ist

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{2x_0} + \eta}, \quad \lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x_0}}.$$

129. Beispiel II. Der Quotient

$$\frac{x - \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\operatorname{tang} x}{x^5}$$

sei zu berechnen für $x = 0$. Multipliziert man Zähler und Nenner mit $3\cos x$, so folgt:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{3x\cos x - \sin x - \sin 2x}{3x^5 \cos x}.$$

Entwickelt man $\cos x$, $\sin x$ und $\sin 2x$ in ihre Potenzreihen, so erhält man

$$f(x) = 3x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right) - \left(2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} \cdots\right),$$

$$F(x) = 3x^5\left(1 - \frac{x^2}{2!} \cdots\right),$$

oder

$$f(x) = x^5\left(-\frac{3}{20} + \varepsilon\right), \quad F(x) = x^5(3 + \eta).$$

Hieraus schliesst man:

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)}{F(x)} = -\frac{1}{20}.$$

130. Unsere Untersuchung umfasst auch den Fall einer Funktion, welche gleich dem Produkte aus zwei Faktoren $f(x) . F(x)$ ist, von denen der eine für $x = x_0$ verschwindet, der andere unendlich wird. Denn setzt man

$$f(x) . F(x) = \frac{f(x)}{[F(x)]^{-1}}, \quad \text{oder} \quad f(x) . F(x) = \frac{F(x)}{[f(x)]^{-1}},$$

so hat man die Form eines Quotienten, dessen Glieder für $x = x_0$ entweder beide 0, oder beide unendlich werden.

Endlich kann man auch leicht auf diesen Fall die Untersuchung einer Funktion von der Form

$$y = u^v$$

zurückführen, wenn u und v für $x = x_0$ entweder auf

$$u = 0 \quad \text{und} \quad v = 0,$$

oder

$$u = \infty \quad \text{und} \quad v = 0,$$

oder

$$u = 1 \quad \text{und} \quad v = \infty$$

sich reduzieren. Denn nimmt man von beiden Seiten der obigen Gleichung die Logarithmen, so wird

$$l(y) = v\,l(u).$$

Die Funktion $l(y)$ ist demnach das Produkt zweier Faktoren, von denen der eine für $x = x_0$ verschwindet, der andere unendlich wird.

131. Beispiel. Ist der Wert von x^x zu bestimmen für $x = 0$, so setze man

$$l(x^x) = x l(x) = \frac{l(x)}{x^{-1}}.$$

Mithin ist

$$\lim_{x=0} l(x^x) = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x=0} x = 0.$$

Der Logarithmus von x^x konvergiert also nach 0, folglich die Funktion x^x nach 1.

Darstellung der Funktionen e^x und $l(x)$ als Grenzen algebraischer Funktionen.

132. Ist x eine bestimmte Grösse und m eine variable, so kann man nach den vorigen Regeln die Grenze bestimmen, nach welcher der Ausdruck

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

für $m = \infty$ konvergiert. Man erhält

$$l\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = m l\left(1 + \frac{x}{m}\right) = \frac{l\left(1 + \frac{x}{m}\right)}{\frac{1}{m}}.$$

Die Grenze dieses Quotienten, in welchem Zähler und Nenner für $m = \infty$ verschwinden, berechnet sich aus der Gleichung

$$\lim_{m=\infty} l\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \lim \frac{-\frac{x}{m^2}}{\left(1 + \frac{x}{m}\right)\left(-\frac{1}{m^2}\right)} = \lim_{m=\infty} \frac{x}{1 + \frac{x}{m}} = x,$$

also ist

$$\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

Die transscendente Funktion e^x ist also die Grenze eines Ausdruckes, der eine algebraische, ja sogar eine ganze Funktion ist, wenn man m unbegrenzt derart wachsen lässt, dass es nur ganzzahlige Werte annimmt. Man kann auch schreiben

1) $$e^x = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m + \varepsilon,$$

wobei ε eine Grösse bezeichnet, welche mit $\frac{1}{m}$ unendlich klein wird. Hieraus folgt

$$x = m\,(\sqrt[m]{e^x - \varepsilon} - 1).$$

Es ist aber

$$\sqrt[m]{e^x - \varepsilon} = \sqrt[m]{e^x}\left(1 - \frac{\varepsilon}{e^x}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{e^x}\left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\,e^{-x} + \cdots\right),$$

oder:

$$m\sqrt[m]{e^x - \varepsilon} = m\sqrt[m]{e^x} + \eta,$$

wobei η unendlich klein wird; mithin ist

$$x = m\,(\sqrt[m]{e^x} - 1) + \eta,$$

und schreibt man x an Stelle von e^x, und $l(x)$ an Stelle von x, so folgt:

2) $$l(x) = m\,(\sqrt[m]{x} - 1) + \eta,$$

oder:

$$l(x) = \lim_{m=\infty} m\,(\sqrt[m]{x} - 1).$$

Sonach ist auch die transscendente Funktion $l(x)$ die Grenze einer algebraischen Funktion von x.

Erweiterung der Taylorschen und Mac-Laurinschen Formeln für Funktionen von mehreren Variabelen.

133. Ist

$$u = F(x, y, z \ldots)$$

eine Funktion von m Variabelen, so besteht die Aufgabe, die Funktion

$$u + \Delta u = F(x + h,\quad y + k,\quad z + l \ldots)$$

in eine Reihe zu entwickeln, welche nach Potenzen der Grössen $h, k, l \ldots$ fortschreitet. Die Grösse $u + \Delta u$ ist der Wert, den die Funktion

$$U = F(x + ht,\ \ y + kt,\ \ z + lt \ldots)$$

für $t = 1$ annimmt. Um die gestellte Aufgabe zu lösen, wird es ausreichen, U nach der Mac-Laurinschen Formel in eine Reihe, geordnet nach Potenzen von t, zu entwickeln und schliesslich $t = 1$ zu setzen. Substituiert man

$$x + ht = \xi, \quad y + kt = \eta, \quad z + lt = \zeta,$$

so hat man

$$U = F(\xi, \eta, \zeta \ldots),$$

oder

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} d\zeta + \cdots$$

(§§ 32 und 33), und ferner, da $\xi, \eta, \zeta \ldots$ lineare Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t sind, *symbolisch* für jedes n (§ 65):

$$d^n U = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} d\zeta + \cdots\right)^n.$$

Dabei setzen wir voraus, dass alle partiellen Ableitungen stetige Funktionen der Variabelen $\xi, \eta, \zeta \ldots$ sind; dann sind sie auch stetige Funktionen von t. Man hat

$$d\xi = h\,dt, \quad d\eta = k\,dt, \quad d\zeta = l\,dt \ldots,$$

also

$$\frac{d^n U}{dt^n} = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} h + \frac{\partial U}{\partial \eta} k + \frac{\partial U}{\partial \zeta} l \cdots\right)^n,$$

und auf Grund der Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \text{ u. s. w.}$$

kann man schreiben:

$$\frac{d^n U}{dt^n} = \left(h \frac{\partial U}{\partial x} + k \frac{\partial U}{\partial y} + l \frac{\partial U}{\partial z} \cdots\right)^n.$$

Für $t = 0$ erhält man $U = u$, und die Formel reduziert sich auf:

$$\left[\frac{d^n U}{dt^n}\right]_{t=0} = \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} + \cdots\right)^n.$$

Demnach ergiebt die Mac-Laurinsche Formel für die Funktion U:

$$U = u + \frac{t}{1}\left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} \cdots\right) + \frac{t^2}{2!}\left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} \cdots\right)^2$$
$$+ \cdots \frac{t^{n-1}}{n-1!}\left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} \cdots\right)^{n-1} + R_n.$$

Der Rest ist gleich dem Produkte von $\frac{t^n}{n!}$ mit einem Werte, den $\frac{d^n U}{dt^n}$ annimmt, wenn man t durch θt ersetzt, wo-

bei θ eine zwischen 0 und 1 gelegene Grösse bezeichnet. Man hat also

$$R_n = \frac{t^n}{n!}\left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z}\cdots\right)^n_{x+h\theta t,\ y+k\theta t,\ z+l\theta t\ldots}$$

Die Indices $x + h\theta t\ldots$ sollen anzeigen, dass man in den partiellen Ableitungen der Funktion u $x, y, z\ldots$ durch $x + h\theta t$, $y + k\theta t\ldots$ zu ersetzen hat. Setzt man nun schliesslich $t = 1$, so hat man

$$1)\left\{\begin{aligned} u+\Delta u = u &+ \left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}\cdots\right)^2 \\ &+\cdot\cdot\frac{1}{n-1!}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}\cdots\right)^{n-1}+R_n,\end{aligned}\right.$$

$$2)\quad R_n = \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} + \cdot\cdot\right)^n_{x+\theta h,\ y+\theta k,\ z+\theta l\ldots}$$

So erhält man z. B. in dem Falle einer Funktion $F(x, y)$ von zwei Variabelen:

$$\begin{aligned} F(x+h, y+k) = F(x,y) &+ \left(h\frac{\partial F}{\partial x}+k\frac{\partial F}{\partial y}\right)+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \\ &+\cdots\frac{1}{n-1!}\left(h^{n-1}\frac{\partial^{n-1}F}{\partial x^{n-1}}+(n-1)h^{n-2}k\frac{\partial^{n-1}F}{\partial x^{n-2}\partial y}+\cdots k^{n-1}\frac{\partial^{n-1}F}{\partial y^{n-1}}\right)+R_n,\end{aligned}$$

und der Restausdruck wird:

$$\begin{aligned} R_n = \frac{1}{n!}\Big(h^n\frac{\partial^n F}{\partial x^n} &+ nh^{n-1}k\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\partial y}+\frac{n(n-1)}{1.2}h^{n-2}k^2\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-2}\partial y^2} \\ &+\cdots k^n\frac{\partial^n F}{\partial y^n}\Big)_{x+\theta h,\ y+\theta k.}\end{aligned}$$

Wenn nun der Rest R_n nach 0 konvergiert, während n unbegrenzt wächst, so ergiebt die Gleichung 1) die Taylorsche Reihe für eine Funktion von mehreren Variabelen, nämlich:

$$3)\quad \Delta u = \left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}\cdots\right)^2+\cdots$$

Sind $x, y, z\ldots$ unabhängige Variabele, so sind die Differentiale der Funktion u

$$du = \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} \ldots\right)$$

und *symbolisch:*

$$d^n u = \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} \ldots\right)^n,$$

also wird die Formel 3):

$$\Delta u = \frac{du}{1} + \frac{d^2 u}{2!} + \frac{d^3 u}{3!} + \ldots$$

und hat die nämliche Form (§ 108), wie bei einer Funktion einer Variabelen.

134. Geht man auf die Bedingungen zurück, denen die Mac-Laurinsche Formel in dem Falle einer Variabelen unterworfen war, und die bei der Bestimmung der totalen Differentiale einer Funktion von mehreren Veränderlichen eingeführt wurden, so erkennt man, dass die Herleitung der Gleichung 1) voraussetzt, dass die Funktion u und alle ihre partiellen Ableitungen, einschliesslich derer von der Ordnung n, stetige Funktionen der Variabelen $x, y, z \ldots$ sind (§ 32) innerhalb des Wertgebietes von x bis $x + h$, von y bis $y + k$, von z bis $z + l \ldots$

Werden die Zuwüchse $h, k, l \ldots$ unendlich klein, wobei ihre Verhältnisse unbestimmt bleiben können, so wird das Verhältnis des Restes zu dem Gliede, bei welchem man die Entwickelung abbricht, unendlich klein; falls dieses letzte Glied nicht identisch null ist. Denn es wird

$$R_{n-1} = \frac{d'^{n-1} u}{n-1!},$$

wenn man mit $d'^{n-1}u$ den Wert bezeichnet, welchen das Differential $d^{n-1}u$ annimmt, wenn man $x, y, z \ldots$ durch $x + \theta h$, $y + \theta k$, $z + \theta l$ ersetzt. Andererseits ist auch

$$R_{n-1} = \frac{d^{n-1} u}{n-1!} + R_n,$$

also wird

$$\frac{R_n}{\left(\frac{d^{n-1} u}{n-1!}\right)} = \frac{d'^{n-1} u - d^{n-1} u}{d^{n-1} u}$$

und die rechte Seite dieser Gleichung wird mit $h, k, l \ldots$ unendlich klein, falls $d^{n-1}u$ nicht identisch null ist, d. h. falls

die $n-1^{\text{ten}}$ partiellen Ableitungen von u nicht sämtlich für die betrachteten Werte von x, y, z ... verschwinden, auch wenn die Verhältnisse der verschwindenden Grössen h, k ... unbestimmt bleiben.

Hieraus folgt, dass man die Beträge der Grössen h, k, l ... derart hinreichend klein bestimmen kann, dass der Betrag des Restes R_n kleiner wird als der Betrag des vorangehenden Gliedes $\frac{d^{n-1}u}{n-1!}$.

135. Um schliesslich die Mac-Laurinsche Formel für eine Funktion von mehreren Variabelen zu bilden, setzen wir in den Gleichungen 1) und 2) für x, y, z ... den Wert 0, und schreiben an Stelle von h, k, l ... die Grössen x, y, z ... Drücken wir endlich durch den Index 0 aus, dass die Grössen x, y, z ... in einer Funktion den Wert 0 erhalten sollen, und durch den Index $\theta x, \theta y, \theta z$ ..., dass sie diese Werte annehmen, so erhalten wir *symbolisch:*

$$
5)\left\{\begin{aligned}
u = u_0 &+ \left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \cdots\right] \\
&+ \frac{1}{2!}\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \cdots\right]^2 \\
&+ \cdots \frac{1}{n-1!}\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + \cdots\right]^{n-1} + R_n
\end{aligned}\right.
$$

und

$$
6) \qquad R_n = \frac{1}{n!}\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \cdots\right]^n_{\theta x,\, \theta y,\, \theta z}.
$$

Der Eulersche Satz für homogene Funktionen.

136. Dieser Satz wurde schon im § 84 bewiesen; da er jedoch von grosser Bedeutung ist, so wird es nicht überflüssig sein, hier noch einen andern Beweis zu geben. Es sei

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m)$$

eine homogene Funktion vom Grade n der m Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_m$. Multipliziert man alle Variabelen mit dem Faktor

$(1 + \alpha)$, so erhält dadurch die Funktion den Faktor $(1 + \alpha)^n$; man hat also (§ 84)

$$f(x_1 + \alpha x_1, x_2 + \alpha x_2, \ldots x_m + \alpha x_m) = (1 + \alpha)^n f(x_1, x_2, \ldots x_m).$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung in eine nach Potenzen von α geordnete Reihe, so ergiebt die linke Seite:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \alpha\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots x_m \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{2!}\left(x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots x_m^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} + 2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots\right) + \cdots,$$

die rechte Seite:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m)\left[1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2 + \cdots\right].$$

Diese Reihe, welche auch eine unendliche sein kann, wenn n nicht eine ganze positive Zahl ist, ist konvergent, wenn $\alpha < 1$ genommen wird. Die beiden nach Potenzen von α fortschreitenden Reihen müssen identisch sein (§ 111); vergleicht man also die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von α, so ist

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots x_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = n f(x_1, x_2, \ldots x_m)$$

$$\left(x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots x_m^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} + 2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots\right) = n(n-1) f(x_1, x_2 \ldots x_m)$$

. . . .

Die erste dieser Gleichungen drückt die wesentliche Eigenschaft homogener Funktionen aus, welche wir ableiten wollten; sie umfasst alle folgenden Gleichungen, wie man leicht einsehen kann; denn auch die partiellen Ableitungen sind homogene Funktionen. Allgemein hat man *symbolisch:*

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots x_m \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) f(x_1, x_2 \ldots x_m),$$

und ist n eine ganze positive Zahl und $k > n$, so wird

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots x_m \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^k = 0.$$

Sechstes Kapitel.

Theorie der Maxima und Minima.

Maxima und Minima von Funktionen einer einzigen Variabelen.

137. Es sei $f(x)$ eine Funktion der Variabelen x, und x_0 irgend ein besonderer Wert von x. Wenn man eine positive, übrigens beliebig kleine Grösse ε bestimmen kann, so dass

$$f(x_0 + h) < f(x_0)$$

wird bei allen Werten von h zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$, so sagt man, dass die Funktion $f(x)$ durch ein *Maximum* hindurchgeht, wenn x den Wert x_0 erhält, und dass $f(x_0)$ ein *Maximalwert* von $f(x)$ ist.

Desgleichen geht, falls

$$f(x_0 + h) > f(x_0)$$

ist bei allen Werten von h zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$, die Funktion $f(x)$ durch ein *Minimum* hindurch, wenn x den Wert x_0 erhält, und $f(x_0)$ ist ein *Minimalwert* der Funktion.

Lässt man x wachsen, so wächst die Funktion $f(x)$ oder nimmt ab, je nachdem die Ableitung $f'(x)$ positiv oder negativ ist. Hieraus folgt, dass bei Funktionen mit bestimmter Ableitung eine Änderung vom Wachsen zur Abnahme, oder von der Abnahme zum Wachsen dadurch angezeigt ist, dass $f'(x)$ sein Zeichen wechselt. Diese Änderung erfordert, wenn die Ableitung nicht unstetig ist, dass sie null wird. Also sind die Werte von x, welche zu einem Maximum oder Minimum der Funktion $f(x)$ gehören, unter denjenigen enthalten, für welche die Ableitung $f'(x)$ null wird, oder auch unter denjenigen, für welche sie unstetig wird. Auch sieht man ein,

dass eine Funktion mehrere Maxima und mehrere Minima haben kann, welche dann abwechselnd auf einander folgen, wenigstens solange $f(x)$ endlich und stetig bleibt.

138. Beispiele. 1. Betrachten wir zuerst die Funktion

$$f(x) = x(a-x);$$

man hat hier

$$f'(x) = a - 2x,$$

die Ableitung wird also null für $x = \frac{a}{2}$, und sie geht von einem positiven zu einem negativen Wert über, wenn x von $\frac{a}{2} - \varepsilon$ bis zu $\frac{a}{2} + \varepsilon$ wächst. Mithin ändert sich die Funktion zuerst wachsend und sodann abnehmend. Folglich geht sie durch ein Maximum, wenn $x = \frac{a}{2}$ wird; und ihr Maximalwert ist $\frac{a^2}{4}$.

2. Betrachten wir zweitens die Funktion

$$f(x) = (x-a)^{\frac{2}{3}} + b;$$

hier ist

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-a)^{-\frac{1}{3}},$$

die Ableitung $f'(x)$ wird nur null für $x = \infty$. Aber sie wird unstetig, nämlich unendlich für $x = a$; dabei verwandelt sich das Vorzeichen vom negativen in das positive, wenn x wächst. Zu dem Werte a gehört also ein Minimum der Funktion $f(x)$ und dieser Minimalwert ist b.

139. Die Taylorsche Formel führt zu dem vorstehenden Ergebnisse und lässt dasselbe noch vervollständigen. Wir werden hierbei voraussetzen, dass die Ableitungen, welche wir betrachten werden, stetig sind in der Umgebung der Stellen, die den Maxima und Minima entsprechen, d. h. innerhalb gewisser angebbarer Grenzen, welche den betrachteten Wert, übrigens beliebig nahe, einschliessen. Der Fall der Unstetigkeit der Ableitungen muss bei jedem einzelnen Probleme besonders untersucht werden.

Wir bezeichnen mit R_n, wie in dem vorigen Kapitel, den Rest der Taylorschen Reihe, welcher mit dem Gliede von

der Ordnung n korrespondiert, und wiederholen hier, dass man stets den Zuwachs h der Variabelen x seinem Betrage nach so klein voraussetzen kann, dass der Betrag des Restes kleiner wird als der des letzten Gliedes, falls dieses sich nicht auf 0 reduziert (§ 109).

Dies festgesetzt, hat man, wenn $f(x)$ die gegebene Funktion bezeichnet:

$$1)\qquad f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)+R_2.$$

Wenn also $f'(x_0)$ nicht null ist, so ändert die Differenz

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

ihr Vorzeichen je nach dem Vorzeichen von h, und der Wert $f(x_0)$ ist weder ein Maximum noch ein Minimum. Nehmen wir also

$$f'(x_0)=0$$

an; alsdann hat man nach der Taylorschen Formel

$$2)\qquad f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+R_3$$

und die linke Seite hat dasselbe Vorzeichen wie $f''(x_0)$ für alle Werte von h zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$, wenn ε hinreichend klein gewählt wird. Also ist $f(x_0)$ ein Maximal- oder ein Minimalwert, je nachdem

$$f''(x_0)<0, \quad \text{oder} \quad f''(x_0)>0.$$

Ist aber $f''(x_0)=0$, so sagt die Formel 2) noch nichts bestimmtes aus. Nehmen wir allgemein an, dass

$$f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)=0, \quad \ldots \quad f^{n-1}(x_0)=0$$

ist und dass die n^{te} Ableitung für $x=x_0$ nicht verschwindet; alsdann ergiebt die Taylorsche Gleichung:

$$3)\qquad f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{n!}f^n(x_0)+R_{n+1}.$$

Diese Formel lehrt, dass, wenn n ungerade ist, die Differenz $f(x_0+h)-f(x_0)$ ihr Zeichen mit h wechselt, und folglich weder ein Maximum noch ein Minimum für $x=x_0$ besitzt. Wenn dagegen n gerade ist, so behält diese Differenz das

Vorzeichen von $f^n(x_0)$, auch wenn h vom negativen zum positiven Wert übergeht; und in diesem Falle ist also $f(x_0)$ ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem

$$f^n(x_0) < 0, \quad \text{oder} \quad f^n(x_0) > 0$$

ist. Man kann also den folgenden Satz aussprechen:

Dafür, dass die Funktion $\mathrm{f(x)}$ *für den Wert* $\mathrm{x = x_0}$ *ein Maximum oder ein Minimum besitzt, ist es eine hinreichende Bedingung, dass die erste unter den Ableitungen von* $\mathrm{f(x)}$, *welche für* $\mathrm{x = x_0}$ *nicht verschwindet, von gerader Ordnung ist. Alsdann ist ein Maximum oder ein Minimum vorhanden, je nachdem der Wert dieser Ableitung für* $\mathrm{x = x_0}$ *negativ oder positiv ist.*

Anwendung auf einige Beispiele.

140. Beispiel I. *Das Minimum der Funktion* $\mathrm{x^x}$ *zu bestimmen.*

Diese Funktion ist ausreichend definiert nur für positive Werte von x; für $x = 0$ hat sie den Wert 1 (§ 131), für $x = \infty$ den Wert $+\infty$. Setzt man

$$y = x^x, \quad \text{oder} \quad l(y) = x\,l(x),$$

so folgt durch Differentiation:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = l(x) + 1,$$

und indem man nochmals differentiiert:

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x}.$$

Die gemeinsame Bedingung für ein Maximum oder Minimum ist $\frac{dy}{dx} = 0$, oder

$$l(x) + 1 = 0, \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{e},$$

und für diesen Wert von x ist

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = e.$$

Da also $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, so entspricht dem Werte $\frac{1}{e}$ ein Minimum. Ein Maximum ist hier innerhalb der Grenzen $x=0$ und $x=+\infty$ nicht vorhanden. Der Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ zeigt, dass diese Ableitung, indem sie für $x=\frac{1}{e}$ null wird, von einem negativen zu einem positiven Wert übergeht. Es wäre daher nicht nötig gewesen, den Ausdruck für $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu bilden, um die Existenz eines Minimums zu erschliessen.

141. Beispiele II. *Die Maxima und Minima der Funktion* $x^m(a-x)^n$ *zu bestimmen, wobei* a *eine positive gegebene Konstante und* m *und* n *ganze positive Zahlen bedeuten.*

Es ist

$$y=x^m(a-x)^n \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx}=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m+n)x].$$

Wächst x, so wird die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ gleich 0 für $x=\frac{ma}{m+n}$, und geht dabei von einem positiven zu einem negativen Wert über. Die Funktion y erhält ein Maximum für

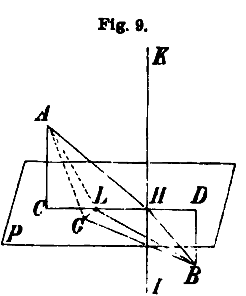
$$x=\frac{ma}{m+n},\ a-x=\frac{na}{m+n}, \quad \text{oder} \quad \frac{x}{m}=\frac{a-x}{n}.$$

Die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ wird auch 0 für $x=0$, wenn $m>1$, und für $x=a$, wenn $n>1$. Aber sie ändert, indem sie null wird, nur dann ihr Zeichen, wenn der Exponent m oder n gerade ist. Alsdann geht sie von einem negativen zu einem positiven Werte über. Die Funktion y besitzt also ein Minimum für $x=0$, wenn m gerade ist, und für $x=a$, wenn n gerade ist.

142. Beispiele III. (Aufgabe von Fermat.) *Zwei Räume sind durch eine Ebene* P *getrennt. Es soll der Weg bestimmt werden, den ein beweglicher Punkt zurücklegen muss, um in der kürzesten Zeit von einem bestimmten Punkte* A *des ersten Raumes in einen bestimmten Punkt* B *des zweiten zu gelangen, wenn sich der Punkt im ersten Raume mit der konstanten Geschwindigkeit* u, *im zweiten mit der konstanten Geschwindigkeit* v *bewegt.*

Der gesuchte Weg setzt sich aus zwei Geraden zusammen, weil in jedem der beiden Räume der von dem Punkte zurückgelegte Weg proportional der verbrauchten Zeit ist; wenn also die Zeiten die kürzesten sein sollen, so müssen auch die Wege die kürzesten sein. Ferner befindet sich der Weg in der Ebene $ACDB$, welche senkrecht zur Ebene P durch die Punkte A und B gelegt ist und diese Ebene längs der Geraden CD schneidet. Denn betrachten wir die gebrochene Linie AGB, welche ausserhalb der Ebene $ACDB$ liegt, und fällen wir vom Punkte G, in welchem sie die Ebene P schneidet, GL senkrecht auf CD, so werden die Geraden AL und LB bezüglich kleiner als AG und GB; folglich wird auch die Zeit, welche der Punkt auf dem Wege ALB verbraucht, kleiner als die Zeit, welche für den Weg AGB erforderlich ist.

Fig. 9.



Dies festgestellt, bezeichnen wir mit a und b die Senkrechten AC und BD, welche von den Punkten A und B auf die Ebene P gefällt sind, mit c die Entfernung CD, und mit x die Entfernung eines beliebigen Punktes H auf CD vom Punkte C. Es ist

$$AH = \sqrt{x^2 + a^2}, \quad BH = \sqrt{(c - x)^2 + b^2}.$$

Demnach wird die Zeit t, welche der bewegliche Punkt verbraucht, um von A nach B zu gelangen:

$$1) \qquad t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}{v}.$$

Dies ist die Funktion von x, deren Minimum gesucht wird. Ein Maximum lässt die Aufgabe nicht zu. Die Vorzeichen der Wurzel sind positiv. x kann alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen. In den beiden extremen Fällen ist t positiv unendlich gross. Setzt man die Ableitung der Funktion t gleich 0, so folgt:

$$2) \qquad \frac{x}{u\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{c - x}{v\sqrt{(c - x)^2 + b^2}} = 0,$$

und beseitigt man die Wurzelzeichen, so wird

$$x^2 v^2 (c - x)^2 + x^2 v^2 b^2 - (c - x)^2 u^2 x^2 - (c - x)^2 u^2 a^2 = 0.$$

Die unbekannte x hängt also von einer Gleichung 4[ten] Grades ab. Indessen kann man, ohne diese Gleichung zu lösen, welche auch durch Quadrierung der Wurzeln eingeführte, der ursprünglichen Aufgabe fremde Lösungen mit sich führt, die geometrische Eigenschaft feststellen, welche die gesuchte gebrochene Linie charakterisiert. Konstruieren wir KI senkrecht zur Ebene P im Punkte H, und bezeichnen wir mit i den Winkel AHK, mit r den Winkel IHB, so wird:

$$\sin r = \frac{DH}{BH} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

$$\sin i = \frac{CH}{AH} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

und folglich ergiebt die Gleichung 2), welche die Bedingung des Minimums ausdrückt,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u}{v}.$$

Der Sinus des *Einfallswinkels* steht also zum Sinus des *Refraktionswinkels* in dem Verhältnis der Geschwindigkeiten, mit denen sich der Punkt im ersten und zweiten Raume bewegen kann.

143. Beispiel IV. *Die grössten und die kleinsten Entfernungen eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Kurve zu bestimmen.*

Es seien a und b die Koordinaten des gegebenen Punktes in Bezug auf zwei rechtwinklige Axen; x und y die Koordinaten der Punkte auf der gegebenen Kurve. Die Ordinate y ist eine bestimmte gegebene Funktion von x, und das Quadrat der Entfernung des Punktes (a, b) von einem Punkte (x, y) ist

$$1) \qquad v = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Es handelt sich darum, die Maximal- und Minimalwerte dieser Funktion von x zu bestimmen.

Man hat

$$2) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{dv}{dx} = (x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx}, \\ \frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2}. \end{cases}$$

Die Bedingung $\frac{dv}{dx} = 0$ des Maximum oder Minimum ist hier

$$(x - a) + (y - b)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{3}$$

oder

$$\frac{y - b}{x - a} \cdot \frac{dy}{dx} = -1.$$

$\frac{y - b}{x - a}$ ist der Richtungskoeffizient der Verbindungsgeraden des gegebenen Punktes M_0 mit dem gesuchten Kurvenpunkte M, $\frac{dy}{dx}$ der Richtungskoeffizient der Tangente im Punkte M. Die Gleichung drückt also aus, dass die Verbindungsgerade eine *Normale* der gegebenen Kurve sein muss.

Ist ein Punkt M durch die Gleichung 3) bestimmt, so gehört er zu einem Maximum oder einem Minimum der Entfernung, je nachdem $\frac{d^2v}{dx^2}$ positiv oder negativ wird. Wenn aber $\frac{d^2v}{dx^2}$ null wird, so muss man zu den höheren Ableitungen übergehen, um zu entscheiden, ob ein Maximum oder ein Minimum oder keins von beiden stattfindet. Dieser letzte Fall tritt insbesondere dann ein, wenn $\frac{d^2v}{dx^2}$ null wird und $\frac{d^3v}{dx^3}$ von 0 verschieden ist.

Denken wir uns die Gerade M_0M konstruiert, und lassen wir nun den Punkt M_0 alle möglichen Lagen auf derselben einnehmen, so wird es eine Lage M' geben, für welche $\frac{d^2v}{dx^2}$ null wird. Nennt man $x'y'$ die Koordinaten dieses Punktes M', so hat man

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - y')\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

und die zweite der Gleichungen 2) kann also in der Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{b - y'}{y - y'}.$$

Hieraus folgt, dass der Wert M_0M ein Minimum oder ein Maximum sein wird, je nachdem $b - y'$ und $y - y'$ gleiche oder verschiedene Zeichen haben. Mit anderen Worten:

es findet ein Minimum statt, wenn der Punkt M_0 zwischen M und M' sich befindet, im anderen Falle ein Maximum. Der Punkt M' ist, wie wir später sehen werden, nichts anderes als der *Krümmungsmittelpunkt*, welcher zum Punkte M der gegebenen Kurve gehört.

144. Nehmen wir an, dass die gegebene Kurve ein Kreis ist mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

indem man diese Gleichung differentiiert, wird

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0, \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Die Gleichung 3) des vorigen Paragraphen wird also

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0;$$

sie stellt die Gerade dar, welche den gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkt des Kreises verbindet, und diese schneidet die Peripherie in zwei Punkten, von denen der eine zu einem Minimum, der andere zu einem Maximum gehört. Denn der mit M' bezeichnete Punkt ist hier der Mittelpunkt des Kreises, weil seine Koordinaten $x'\, y'$ den Gleichungen zu genügen haben:

$$(x'-a)+(y'-b)\frac{x}{y}=0 \text{ und } 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}=0, \text{also} -y'\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

also ist $x' = 0$ und $y' = 0$; und man erhält

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{R^2}{y^2}\frac{b}{y}.$$

Daraus folgt, dass $\frac{d^2v}{dx^2}$ positiv oder negativ wird, je nachdem b und y von gleichem oder verschiedenem Zeichen sind.

145. Ist die gegebene Kurve eine doppelt gekrümmte, oder liegt, falls sie eben ist, der gegebene Punkt nicht in ihrer Ebene, so hat man die drei rechtwinkligen Koordinaten im Raume anzuwenden. Das Quadrat der Entfernung des Punktes M_0 von einem Kurvenpunkte wird

$$v = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

und y und z sind gegebene Funktionen von x; ferner hat man

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} = (x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} + (z-c)\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2} + (z-c)\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Die Punkte mit den Koordinaten x, y, z, welche zu einem Maximum oder Minimum gehören können, sind durch die Gleichung $\frac{dv}{dx} = 0$ gegeben, oder

$$(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} + (z-c)\frac{dz}{dx} = 0,$$

mit der man die beiden Gleichungen der gegebenen Kurve zu verbinden hat. Betrachtet man a, b, c als variabele Koordinaten, x, y, z als feste Grössen, so ist dieses die Gleichung einer Ebene, welche wie später gezeigt wird, *normal* zur gegebenen Kurve ist, d. h. senkrecht steht zur Tangente des Kurvenpunktes M in diesem Punkte. Um nun das Maximum und Minimum zu unterscheiden, bezeichnen wir mit x', y', z' die Koordinaten eines variabelen Punktes und bestimmen dieselben so, dass sie die Gleichung

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + (y-y')\frac{d^2y}{dx^2} + (z-z')\frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

befriedigen. Dies ist die Gleichung einer Ebene. Es sei nun M' der Punkt, wo diese Ebene die Gerade M_0M schneidet, so müssen die Koordinaten x', y', z' dieses Punktes erstens die Gleichungen erfüllen:

$$\frac{x-a}{x-x'} = \frac{y-b}{y-y'} = \frac{z-c}{z-z'},$$

und diese Ausdrücke sind auch gleich:

$$\frac{(y-b)\frac{d^2y}{dx^2} + (z-c)\frac{d^2z}{dx^2}}{(y-y')\frac{d^2y}{dx^2} + (z-z')\frac{d^2z}{dx^2}},$$

und sodann die Gleichung:

$$(y-y')\frac{d^2y}{dx^2} + (z-z')\frac{d^2z}{dx^2} = -\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right],$$

oder:

$$(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+(z-c)\frac{d^2z}{dx^2}=-\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]\frac{x-a}{x-x'},$$

also wird der Wert

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2}=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]\frac{a-x'}{x-x'},$$

folglich wird

$$\frac{d^2v}{dx^2}>0, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2v}{dx^2}<0,$$

je nachdem $a-x'$ und $x-x'$ von gleichem oder ungleichem Zeichen sind; hieraus folgt, dass ein Minimum stattfindet, wenn die Punkte M_0 und M auf derselben Seite der von den Punkten M' in der Normalebene gebildeten Geraden liegen, dagegen im andern Falle ein Maximum. Die von den Punkten M' gebildete Gerade, welche auch als Schnitt zweier benachbarten Normalebenen definiert werden kann, heisst die zum Kurvenpunkte M gehörige *Krümmungsaxe.*

Liegt der Punkt M_0 auf der Krümmungsaxe, ist also

$$(x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}+(z-c)\frac{dz}{dx}=0$$

und

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2}=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+(z-c)\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

so muss man die dritte Ableitung bilden. Dieselbe wird

$$\frac{1}{2}\frac{d^3v}{dx^3}=3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}+3\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{d^3y}{dx^3}+(z-c)\frac{d^3z}{dx^3}.$$

Nur wenn für die Koordinaten b und c auch dieser Ausdruck 0 wird, kann die Entfernung M_0M ein Maximum oder ein Minimum sein. Dieser besondere Punkt auf der Krümmungsaxe ist der Mittelpunkt der oskulierenden Kugel des Punktes M. Für jeden andern Punkt auf der Axe findet weder ein Minimum noch ein Maximum statt.

Bemerkung über relative Maxima und Minima.

146. Bisweilen handelt es sich um die Bestimmung des grössten und des kleinsten Wertes, welchen eine Funktion $f(x)$ der Variabelen x annimmt, während x nur zwischen gegebenen



Grenzen a und b variiert. Solch ein Maximum oder Minimum heisst ein *relatives.* Um die Frage zu lösen, hat man die Änderungen der Funktion $f(x)$ mit Zuhilfenahme ihrer Ableitung zu untersuchen. Bleibt, während x von a bis b variiert, die Ableitung endlich und stets von gleichem Vorzeichen, so sind die relativen Maxima und Minima die extremen Werte $f(a)$ und $f(b)$. Hat die Funktion mehrere Maxima und Minima innerhalb der betrachteten Grenzen, so wird der grösste unter den Maximalwerten das *Maximum Maximorum* und der kleinste unter den Minimalwerten das *Minimum Minimorum* genannt. In diesem Falle genügt das Maximum Maximorum den früheren Bedingungen, wenn es die extremen Werte $f(a)$ und $f(b)$ übertrifft, desgleichen das Minimum Minimorum, wenn es kleiner ist als diese extremen Werte.

Handelt es sich bei einer Aufgabe um die Bestimmung eines Maximums oder Minimums, und trifft man dabei solch eine Wahl der Variabelen, dass die unabhängige innerhalb bestimmter Grenzen bleibt, so kann es eintreten, dass für die Funktion, deren Maximum oder Minimum gesucht wird, nur ein relatives Maximum oder ein relatives Minimum vorhanden ist.

Nehmen wir z. B. die Aufgabe des § 144, bei der es sich um die kürzeste oder längste Entfernung eines Punktes von einem Kreise handelt. Wenn wir die Abscissenaxe durch den gegebenen Punkt legen, so ist das Maximum oder Minimum des Ausdruckes

$$V = (x - a)^2 + y^2$$

zu bestimmen. Gemäss der Gleichung des Kreises ist aber $y^2 = R^2 - x^2$, und man hat also

$$V = (x - a)^2 + R^2 - x^2,$$

oder

$$V = R^2 + a^2 - 2ax.$$

Es ist ersichtlich, dass diese Funktion V, welche in x linear ist, weder ein Maximum noch ein Minimum hat, wenn x unbeschränkt ist. Für unsere Aufgabe erfordert indessen die Gleichung des Kreises $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, dass die unabhängige

Veränderliche x zwischen $-R$ und $+R$ bleibt. Nehmen wir a positiv an, so wird das relative Minimum und das relative Maximum von V

$$(a-R)^2 \text{ und } (a+R)^2,$$

die extremen Werte $x=-R$ und $x=+R$ geben also die Lösung der Aufgabe.

Der Fall der impliciten Funktionen einer unabhängigen Variabelen.

147. Ist eine Funktion y mit der Variabelen x durch eine Gleichung

$$1)\qquad f(x,y)=0$$

verbunden, so folgt durch Differentiation

$$2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

Die Bedingung des Maximums oder Minimums verlangt, dass $\frac{dy}{dx}$ null wird; man hat also:

$$3)\qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0.$$

Bestimmt man die gemeinsamen Lösungen $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\ldots$ der Gleichungen 1) und 3), so sind die Werte von x, welche zu Maximal- und Minimalwerten von y gehören, in der Reihe $x_0, x_1\ldots$ enthalten. Wir sehen hierbei von den Maxima und Minima ab, welche zu Werten von x gehören können, für die $\frac{dy}{dx}$ nicht mehr stetig bleibt.

Es kann auch eintreten, dass die beiden Gleichungen

$$4)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

gemeinsame Lösungen besitzen, welche zugleich auch der Gleichung 1) genügen. Für solche Werte von x, denen ein Wert y entspricht, der zugleich die Gleichungen 1) und 4) erfüllt, kann der Wert von $\frac{dy}{dx}$ nicht mehr aus der Gleichung 2)

berechnet werden. Wir beschränken uns hier auf diese Bemerkung, die späterhin gelegentlich der Untersuchung singulärer Punkte einer Kurve weiter ausgeführt werden wird.

Um nun zu entscheiden, ob eine Lösung der Gleichungen 1) und 3) wirklich zu einem Maximum oder Minimum gehört, muss man zu den höheren Ableitungen von y übergehen. Die Differentiation der Gleichung 2) ergiebt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

und da $\frac{dy}{dx}$ null ist, so hat man, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ endlich bleiben:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Das Vorzeichen dieses Ausdruckes, in welchem man das gefundene Wertsystem (x_0, y_0), $(x_1, y_1)\ldots$ zu substituieren hat, entscheidet über das Maximum oder Minimum. Wird aber $\frac{d^2 y}{dx^2}$ gleich null, so hat man die Untersuchung nach der Theorie des § 139 weiter zu führen.

148. Beispiel. *Das Maximum der Funktion* y *zu bestimmen, welche durch die Gleichung*

$$\mathrm{f(x, y) = y^3 - 3axy + x^3 = 0}$$

definiert ist, wo a *eine positive Konstante bedeutet.*

Es ist

$$\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x} = -ay + x^2, \quad \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 - ax$$

und die Elimination von y zwischen den Gleichungen

$$f(x, y) = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

giebt:

$$x^6 - 2a^3x^3 = 0,$$

oder

$$x = 0 \text{ und } x = a\sqrt[3]{2}.$$

Die entsprechenden Werte von y sind:

$$y = 0 \quad \text{und} \quad y = a\sqrt[3]{4}.$$

Das erste System $x = 0$, $y = 0$ macht auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ zu null und gehört zu einem singulären Punkte; das zweite System $(x = a\sqrt[3]{2},\ y = a\sqrt[3]{4})$ liefert ein Maximum; denn es ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-2x}{y^2 - ax} = \frac{-2}{a(\sqrt[3]{4} - 1)}.$$

149. Wir wollen noch den allgemeinen Fall betrachten, bei welchem $m + 1$ Variabele $x, x_1, x_2, \ldots x_m$ durch m Gleichungen mit einander verbunden sind:

$$1)\qquad \begin{cases} f_1(x, x_1, x_2, \ldots x_m) = 0, \\ f_2(x, x_1, x_2, \ldots x_m) = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_m(x, x_1, x_2, \ldots x_m) = 0, \end{cases}$$

und nehmen an, dass die Maximal- und Minimalwerte von einer dieser Variabelen, z. B. x_1, zu bestimmen sind. Eine unter den Variabelen, z. B. x, lässt sich zur unabhängigen wählen. Dabei lassen wir die Werte von x, für welche die Ableitung $\frac{dx_1}{dx}$ etwa unstetig wird, bei Seite. Die Bedingung des Maximums und Minimums wird nun

$$\frac{dx_1}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad dx_1 = 0.$$

Die Differentiation der Gleichungen 1) ergiebt:

$$2)\qquad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_m}dx_m = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_m}dx_m = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x}dx + \frac{\partial f_m}{\partial x_1}dx_1 + \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m}dx_m = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit X_1 die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}, \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}, \end{vmatrix}$$

und durch X die Determinante, welche aus dieser hervorgeht, wenn man die Elemente der ersten Kolonne bezüglich durch

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \ldots \frac{\partial f_m}{\partial x}$$

ersetzt, so ist das Resultat der Elimination der Differentiale $dx_2 \ldots dx_m$ aus den Gleichungen 2)

$$3) \qquad X dx + X_1 dx_1 = 0.$$

Man hat also für ein Maximum und Minimum

$$4) \qquad \frac{X}{X_1} = 0.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den m Gleichungen 1), so erhält man ein System $m+1$ simultanen Gleichungen, deren gemeinsame Lösungen zu bestimmen sind.

Dabei kann es eintreten, dass die Gleichungen 1) für gewisse Werte der Variabelen zusammen mit den Gleichungen

$$X = 0, \quad X_1 = 0$$

erfüllt sind; dieser Fall ist jedesmal besonders zu untersuchen.

Um nun die Scheidung zwischen den Maxima und Minima zu treffen, hat man den Ausdruck für $\frac{d^2 x_1}{dx^2}$ zu bilden, und zu diesem Zwecke wird man die Gleichungen 3) differentiieren. Man erhält aus

$$\frac{dx_1}{dx} = -\frac{X}{X_1},$$

$$\frac{d^2 x_1}{dx^2} = -\frac{X_1 \frac{dX}{dx} - X \frac{dX_1}{dx}}{X_1^2},$$

wobei nur auch die Differentiale $\frac{dx_1}{dx}, \ldots \frac{dx_m}{dx}$ zu beachten und aus den Gleichungen 2) zu substituieren sind. Man kann auch die Gleichungen 2) total nach x differentiieren und durch Elimination der Differentiale $d^2x_2, \ldots d^2x_m$ die Gleichung für d^2x_1 bilden. In welcher Weise man weiter zu gehen hat, falls die Ableitungen höherer Ordnung zu betrachten sind, ist leicht zu sehen.

150. Die vorstehende Untersuchung ist allgemein und umfasst auch den Fall, in welchem die Maxima und Minima einer expliciten Funktion

$$F(x, x_1, \ldots x_{m-1})$$

von m Variabelen zu bestimmen sind, welche durch $m - 1$ Gleichungen

$$f_1(x, x_1, \ldots x_{m-1}) = 0,$$
$$f_2(x, x_1, \ldots x_{m-1}) = 0 \ldots f_{m-1}(x, x_1, \ldots x_{m-1}) = 0$$

mit einander verbunden sind. Denn fügt man diesen Gleichungen noch die folgende hinzu:

$$u - F(x, x_1, \ldots x_{m-1}) = 0,$$

so hat man ein System von m Gleichungen, mit $m + 1$ Veränderlichen, und es handelt sich um die Bestimmung der Maxima und Minima von einer dieser Variabelen, nämlich u, was die im vorigen Paragraphen gelöste Aufgabe ist.

Über Maxima und Minima von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variabelen.

151. Ist $f(x, y, z, \ldots)$ eine Funktion von mehreren unabhängigen Variabelen $x, y, z, \ldots$, so sagt man, diese Funktion hat ein Maximum für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, ..., wenn die Differenz

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l, \ldots) - f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$$

für alle Werte der Inkremente $h, k, l, \ldots$, welche zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ gelegen sind, negativ ist, wobei die positive Grösse ε einen endlichen übrigens beliebig kleinen Wert hat. Ist dagegen dieselbe Differenz durchaus positiv bei denselben Werten von

$h, k, l, \ldots$, so erhält die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ ein Minimum für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Nehmen wir an, dass die besonderen Werte $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0 \ldots$ zu einem Maximum oder Minimum von $f(x, y, z \ldots)$ gehören, und erteilen wir den Variabelen $y, z \ldots$ die Werte $y_0, z_0 \ldots$; die Funktion

$$f(x, y_0, z_0 \ldots)$$

hängt alsdann nur von der Variabelen x ab, und da sie ein Maximum oder Minimum wird für $x = x_0$, so wird die Ableitung

$$\frac{\partial f(x, y_0, z_0 \ldots)}{\partial x}$$

null oder unstetig für $x = x_0$. Also muss bei unserer Annahme die partielle Ableitung der gegebenen Funktion nach x, nämlich

$$\frac{\partial f(x, y, z \ldots)}{\partial x}$$

null sein oder unstetig werden für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Dieselbe Überlegung bezieht sich auch auf die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x, y, z \ldots)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x, y, z \ldots)}{\partial z} \ldots$$

und folglich gehören die Werte von $x, y, z \ldots$, denen ein Maximum oder ein Minimum der Funktion f entspricht, zu denjenigen, für welche das totale Differential df dieser Funktion null wird, oder eine Unstetigkeit erleidet.

152. Die Anwendung der Taylorschen Formel ergiebt dasselbe Resultat. Erteilt man den Variabelen $x, y, z \ldots$ irgendwelche bestimmte Werte und legt ihnen sodann die Zuwüchse $h, k, l \ldots$ bei, welche nichts anderes sind als die Differentiale $dx, dy, dz \ldots$, so erhält man nach der Taylorschen Gleichung, wenn man von solchen Werten absieht, für welche die partiellen Ableitungen der Funktion f unstetig werden:

$$1) \qquad \Delta f = df + R_2.$$

R_2 ist dann der Rest der Reihe. Ist nun df nicht null, so ist das Verhältnis von R_2 zu df unendlich klein bei unendlich

kleinen Werten von $h, k, l \ldots$ (§ 134), wobei die Verhältnisse dieser Grössen zu einer unter ihnen unbestimmt bleiben können. Man kann also denselben so kleine Beträge beilegen, dass Δf das Vorzeichen von df hat, und folglich ändert dann Δf sein Zeichen, wenn man die Vorzeichen von $h, k, l \ldots$ ändert. Die angenommenen Werte von $x, y, z \ldots$ können mithin nur dann einem Maximum oder Minimum entsprechen, wenn

$$df = 0$$

ist, und dies erfordert, dass einzeln

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

wird, weil $dx, dy, dz \ldots$ willkürlich sind.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so hat die Änderung Δf von f den Wert:

$$2) \qquad \Delta f = \frac{d^2 f}{2} + R_3.$$

Nehmen wir an, dass für alle reellen Werte von $h, k, l \ldots$, welche zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ liegen, das Differential $d^2 f$ niemals negativ wird, und dass es auch nicht null wird, ausser für $h = 0,\ k = 0,\ l = 0 \ldots$, so wird, weil man ε so klein wählen kann, dass das Verhältnis von R_3 zu $\frac{1}{2}\, d^2 f$ dem Betrage nach beliebig klein wird, die Änderung Δf das Vorzeichen von $d^2 f$ erhalten, und also

$$\Delta f > 0$$

sein. Den betrachteten Werten von $x, y, z \ldots$ entspricht dann also ein Minimum der Funktion f. Wird dagegen $d^2 f$ nicht positiv, bei allen Werten von $h, k, l \ldots$ zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$, und nicht null, ausser für $h = 0,\ k = 0,\ l = 0 \ldots$, so ist

$$\Delta f < 0,$$

und den betrachteten Werten der Variabelen entspricht ein Maximum. Dagegen hat man weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn für die Werte $h, k, l \ldots$ zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ das Differential $d^2 f$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt.

Es kann nun aber auch eintreten, dass das Differential d^2f identisch null ist bei den Werten, welche man den Variabelen $x, y, z \ldots$ beigelegt hat, oder auch, dass dieses Differential null wird bei gewissen Werten von $h, k, l \ldots$ zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$, während es bei allen anderen Wertsystemen $h, k, l \ldots$ unverändert dasselbe Zeichen hat. Tritt der letztgenannte Fall ein, so muss, damit ein Minimum oder Maximum stattfindet, die Ungleichung:

$$\Delta f > 0 \quad \text{oder} \quad \Delta f < 0$$

auch für die Werte von $h, k, l \ldots$ fortbestehen, welche $\Delta^2 f$ annulieren. Für diese Werte ergiebt aber die Taylorsche Gleichung:

$$3) \qquad \Delta f = \frac{d^3 f}{3!} + R_4$$

Hieraus schliesst man, weil das Differential d^3f die Grössen $h, k, l \ldots$ in der dritten Potenz enthält, und also sein Zeichen ändert, wenn man die Vorzeichen von $h, k, l \ldots$ ändert, wobei diese Grössen immer noch der Bedingung $d^2f = 0$ genügen können, dass für die Werte, welche $d^2f = 0$ machen, auch $d^3f = 0$ sein muss, damit ein Maximum oder Minimum vorhanden ist. Dann ist nach der Taylorschen Gleichung:

$$4) \qquad \Delta f = \frac{d^4 f}{4!} + R_5$$

und es findet ein Maximum oder Minimum statt, wenn für die Werte von $h, k, l \ldots$, welche d^2f und d^3f annullieren, d^4f beständig das Zeichen Minus, oder beständig das Zeichen Plus hat.

Wenn für die Werte, welche den Variabelen $x, y, z \ldots$ erteilt wurden, das Differential d^2f identisch null ist, d. h. alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung verschwinden, so muss, damit überhaupt ein Maximum oder Minimum eintreten kann, auch d^3f identisch null sein, und ist dieses der Fall, so findet das eine oder andere statt, je nachdem d^4f beständig negativ oder beständig positiv ist.

Ist d^4f identisch null, oder verschwindet es, ohne sein Zeichen zu ändern, für gewisse Werte von $h, k, l \ldots$, so muss man zu den Differentialen höherer Ordnung übergehen. Doch

ist es unnötig, diese Diskussion zu erweitern, da das Gesagte für die Anwendungen genügt.

153. In dem gewöhnlichsten Falle eines Minimums oder Maximums muss beständig

$$d^2f > 0 \quad \text{oder} \quad d^2f < 0$$

für alle Werte von $h, k, l \ldots$ zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ sein. Wir wollen nun die Bedingungen dafür untersuchen, dass die eine oder die andere dieser Ungleichungen erfüllt ist, und betrachten nur die erste

$$d^2f > 0,$$

welche einem Minimum entspricht; der Fall des Maximums ist hierauf zurückführbar, wenn man f in $-f$ verwandelt.

Es ist

$$1)\quad d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}hk + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}hl + \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}kl \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}l^2 + \cdots$$

Setzt man

$$h = \frac{\varepsilon}{E}\xi, \quad k = \frac{\varepsilon}{E}\eta, \quad l = \frac{\varepsilon}{E}\zeta \ldots,$$

wobei E einen positiven beliebig grossen Wert bezeichnet, so ist

$$2)\quad \frac{E^2}{\varepsilon^2}d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\xi\eta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\xi\zeta \cdots$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\eta\zeta + \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\zeta^2 + \cdots$$

Wenn nun die Grössen $h, k, l \ldots$ zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ variieren, so variieren $\xi, \eta, \zeta \ldots$ zwischen $-E$ und $+E$; andererseits ist E beliebig gross. Also verlangt die Ungleichung $d^2f > 0$, dass die rechte Seite der Gleichung 2) für alle Werte der Variabelen $\xi, \eta, \zeta \ldots$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ positiv bleibt.

Mithin erfordert die gestellte Aufgabe die Ermittelung der Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit eine ganze homogene Funktion zweiter Ordnung von m Variabelen $\xi, \eta, \zeta \ldots$ durchaus positiv bleibt. Die rechte Seite der Gleichung 2) bezeichnen wir mit V und setzen:

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\eta + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\,\zeta + \cdots = P, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\eta^2 + 2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\,\eta\zeta + \cdots \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,\zeta^2 + \cdots = Q, \end{cases}$$

so ist

$$4)\qquad V = A\xi^2 + 2P\xi + Q.$$

Da die Funktion V sich auf $A\xi^2$ reduziert, wenn $\eta, \zeta \ldots$ gleich null gesetzt werden, so muss man zunächst haben

$$A > 0.$$

Indem man sodann

$$5)\qquad V_1 = AQ - P^2$$

setzt, folgt:

$$6)\qquad AV = (A\xi + P)^2 + V_1.$$

Der erste Teil dieses Wertes von AV verschwindet für $\xi = -\dfrac{P}{A}$, welche Werte auch $\eta, \zeta \ldots$ haben mögen. Also muss die Grösse V_1 beständig positiv sein.

Also sind die gesuchten Bedingungen dafür, dass V beständig positiv ist: *erstlich*, dass $A > 0$ ist, *zweitens*, dass V_1 beständig positiv ist. V_1 ist aber, ebenso wie V eine ganze und homogene Funktion vom zweiten Grade, enthält jedoch nur noch $m - 1$ Variabele. Mithin kann man für V_1 dieselben Betrachtungen wie bei V anstellen, und findet als Bedingung dafür, dass V_1 beständig positiv ist: *erstens*, dass eine bestimmte Grösse $A_1 > 0$ ist, *zweitens*, dass eine gewisse homogene Funktion zweiter Ordnung von $m - 2$ Variabelen beständig positiv bleibt. Nun ist leicht zu sehen, dass man, indem man so fortfährt, m Bedingungen erhält:

$$A > 0, \quad A_1 > 0, \quad A_2 > 0 \ldots, \quad A_{m-1} > 0,$$

welche notwendig und hinreichend sind, damit V beständig positiv bleibt.

Insbesonders erhält man für den Fall, dass f nur von zwei Variabelen x und y abhängt:

$$V = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\xi\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2,$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad P = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\eta, \quad Q = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\eta^2,$$

also

$$V_1 = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\eta^2.$$

Die Bedingungen dafür, dass V beständig positiv bleibt, sind also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0.$$

Es ist ersichtlich, dass dieselben auch die Bedingung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$$

enthalten.

Um zum Fall des Maximums zu gelangen, genügt es den Sinn der ersten der beiden Ungleichungen, welche die Bedingung für das Minimum enthalten, zu ändern.

Anwendung auf einige Beispiele.

154. Beispiel I. *Das Maximum der Funktion*

$$f = x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots u^\lambda (a - x - y - z \cdots - u)^\mu$$

zu bestimmen, wobei a *eine positive Konstante, und die Exponenten* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ *positive und ganze Zahlen sind.*

Es ist:

$$\frac{df}{f} = \alpha\frac{dx}{x} + \beta\frac{dy}{y} + \gamma\frac{dz}{z} + \cdots \lambda\frac{du}{u} - \mu\frac{dx + dy + dz \cdots + du}{a - x - y - z \cdots - u},$$

$$\frac{d^2 f}{f} - \left(\frac{df}{f}\right)^2 = -\alpha\left(\frac{dx}{x}\right)^2 + \cdots - \lambda\left(\frac{du}{u}\right)^2 - \mu\frac{(dx + dy + dz \cdots + du)^2}{(a - x - y - z \cdots - u)^2}.$$

Die Gleichung $df = 0$ kann durch die Werte null der Variabelen $x, y, z \ldots u$ erfüllt werden, und es ist leicht zu erkennen, in welchen Fällen diesen Werten ein Maximum oder Minimum entspricht. Wir sehen davon hier ab. Dann ergiebt die Bedingung $df = 0$:

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{z} \cdots = \frac{\lambda}{u} = \frac{\mu}{a - x - y - z \cdots - u},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \cdots = \frac{u}{\lambda} = \frac{a - x - y - z \cdots - u}{\mu} = \frac{a}{\alpha + \beta + \gamma + \cdots \lambda + \mu}$$

und

$$f = \left(\frac{a}{\alpha + \beta + \gamma + \cdots \mu}\right)^{\alpha + \beta + \cdots \lambda + \mu} \cdot \alpha^{\alpha} \beta^{\beta} \ldots \lambda^{\lambda} \mu^{\mu}.$$

Endlich findet man aus der Gleichung für $d^2 f$, weil $df = 0$ ist:

$$d^2 f = f\left[-\alpha\left(\frac{dx}{x}\right)^2 - \cdots - \lambda\left(\frac{du}{u}\right)^2 - \mu\,\frac{(dx + dy + \cdots du)^2}{(a - x - y - \cdots - u)^2}\right],$$

und dieser Wert ist durchaus negativ; also ist der obige Wert von f ein Maximum.

155. Beispiel II. *Die Maxima und Minima der Entfernung zwischen zwei Punkten zu bestimmen, welche auf zwei gegebenen Kurven bezüglich liegen.*

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes M auf der ersten Kurve seien x, y, z, die Koordinaten eines Punktes M' auf der zweiten Kurve seien x', y', z', so ist das Quadrat der Entfernung MM':

$$1)\qquad V = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Hier sind zwei Variabele unabhängig; als solche kann man x und x' wählen, y und z werden gegebene Funktionen von x, y' und z' gegebene Funktionen von x'. Es ist nun

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V}{\partial x} = (x - x') + (y - y')\dfrac{dy}{dx} + (z - z')\dfrac{dz}{dx}, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V}{\partial x'} = -(x - x') - (y - y')\dfrac{dy'}{dx'} - (z - z')\dfrac{dz'}{dx'}; \end{cases}$$

ferner:

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V^2}{\partial x^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2 + (y - y')\dfrac{d^2 y}{dx^2} + (z - z')\dfrac{d^2 z}{dx^2}, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial x'} = -\left(1 + \dfrac{dy'}{dx'}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dz'}{dx'}\dfrac{dz}{dx}\right), \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x'^2} = 1 + \left(\dfrac{dy'}{dx'}\right)^2 + \left(\dfrac{dz'}{dx'}\right)^2 - (y - y')\dfrac{d^2 y'}{dx'^2} - (z - z')\dfrac{d^2 z'}{dx'^2}. \end{cases}$$

Die gemeinsamen Bedingungen für ein Maximum oder Minimum sind also:

$$4)\quad \begin{cases} (x-x')+(y-y')\dfrac{dy}{dx}+(z-z')\dfrac{dz}{dx}=0, \\ (x-x')+(y-y')\dfrac{dy'}{dx'}+(z-z')\dfrac{dz'}{dx'}=0. \end{cases}$$

Die Ableitungen $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{dy'}{dx'}, \frac{dz'}{dx'}$ sind durch die Gleichungen der beiden Kurven gegeben, und verbindet man mit diesen Gleichungen die beiden vorstehenden, so erhält man ein System von sechs Gleichungen, welche die Koordinaten x, y, z, x', y', z' bestimmen. Damit aber wirklich ein Maximum oder Minimum vorhanden sei, muss

$$5)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial x'}\right)^2>0$$

sein. Ist dem so, so hat man ein Minimum, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}>0$, ein Maximum, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}<0$ ist.

Die Gleichung 4) besagt, wie später gezeigt wird, dass die durch die Punkte x, y, z und x', y', z' gelegte Gerade normal zu den gegebenen Kurven ist. Dies folgt auch schon aus dem im § 145 Gesagten.

156. Sind die beiden Kurven gerade Linien mit den Gleichungen:

$$x=az+\alpha,\quad y=bz+\beta,$$

und

$$x'=a'z'+\alpha',\quad y'=b'z'+\beta',$$

so ist

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{1}{a},\quad \frac{dy'}{dx'}=\frac{b'}{a'},\quad \frac{dz'}{dx'}=\frac{1}{a'},$$

und die zweiten Ableitungen $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2y'}{dx'^2}, \frac{d^2z'}{dx'^2}$ werden 0. Hieraus folgert man unmittelbar, dass die Bedingungen für ein Minimum erfüllt sind. Die Gleichungen 4) des § 155 sind hier:

$$a(x - x') + b(y - y') + (z - z') = 0,$$
$$a'(x - x') + b'(y - y') + (z - z') = 0,$$

und man kann sie durch zwei der folgenden drei ersetzen:

$$(a' - a)(x - x') + (b' - b)(y - y') = 0,$$
$$(ba' - b'a)(x - x') - (b' - b)(z - z') = 0,$$
$$(ba' - b'a)(y - y') + (a' - a)(z - z') = 0.$$

Aus den Gleichungen der Geraden aber folgt:

$$(b' - b)(x - x') - (a' - a)(y - y') + (ba' - ab')(z - z')$$
$$= (a' - a)(\beta' - \beta) - (b' - b)(\alpha' - \alpha).$$

Erhebt man diese vier Gleichungen ins Quadrat und summiert sie, so wird:

$$[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2][(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (ab' - a'b)^2]$$
$$= [(a' - a)(\beta' - \beta) - (b' - b)(\alpha' - \alpha)]^2.$$

Hieraus folgt der bekannte Ausdruck für den kürzesten Abstand zweier Geraden, nämlich:

$$\sqrt{V} = \frac{(a' - a)(\beta' - \beta) - (b' - b)(\alpha' - a)}{\pm\sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (ab' - a'b)^2}}.$$

157. Beispiel III. *Die Maxima und Minima der Entfernung eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Fläche zu bestimmen.*

Es seien a, b, c die rechtwinkligen Koordinaten des gegebenen Punktes M_0 und x, y, z die Koordinaten eines Punktes der Fläche. Das Quadrat der Entfernung dieser beiden Punkte ist

$$V = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2.$$

z ist eine gegebene Funktion der beiden unabhängigen Variabelen x, y, und wir wollen setzen:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy.$$

Darnach erhält man:

$$1)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} = (x-a) + p(z-c), \\ \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial y} = (y-b) + q(z-c), \end{cases}$$

ferner:

$$2)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 1 + p^2 + r(z-c), \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = pq + s(z-c), \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 1 + q^2 + t(z-c); \end{cases}$$

endlich, wenn man der Abkürzung halber setzt,

$$3)\quad \begin{cases} A = rt - s^2, \\ B = (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t, \\ C = 1 + p^2 + q^2, \end{cases}$$

so wird, nach den Gleichungen 3):

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)^2\right] = A(z-c)^2 + B(z-c) + C.$$

Die Bedingung des Maximums oder Minimums ergiebt:

$$4)\quad \begin{aligned} (x-a) + p(z-c) = 0, \\ (y-b) + q(z-c) = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen, verbunden mit der der Fläche, lassen die Koordinaten x, y, z bestimmen. Man wird später sehen, dass dies genau die Gleichungen der Flächennormale im Punkte x, y, z sind, wenn man a, b, c als variabele Koordinaten, x, y, z als feste betrachtet.

Damit aber ein Punkt $M(x, y, z)$ auf diese Weise bestimmt wirklich zu einem Maximum oder Minimum gehört, muss

$$5)\quad A(z-c)^2 + B(z-c) + C > 0$$

sein. Wir bestimmen eine Grösse Z derart, dass

$$6)\quad A(z-Z)^2 + B(z-Z) + C = 0$$

wird. Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind immer reell, denn es ist die Discriminante dieser Gleichung positiv, nämlich

$$B^2 - 4AC = [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 - 4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)$$

$$= (1+p^2)(1+q^2)p^2q^2\left[\frac{2s}{pq} - \frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2}\right]^2 + (1+p^2+q^2)(1+p^2)(1+q^2)\left(\frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2}\right)^2.$$

Sind z' und z'' die Wurzeln Z der Gleichung 6), so wird die linke Seite dieser Gleichung identisch gleich

$$A(z'-z)(z''-z),$$

und folglich wird, wenn man für A seinen Wert einsetzt, unsere Bedingung 5):

$$7) \qquad (rt-s^2)(z'-c)(z''-c) > 0.$$

Bezeichnen wir mit K' und K'' diejenigen beiden Punkte der Normalen $M_0 M$, für welche die Koordinate z die Werte z' und z'' hat; die Bedingung 7) drückt dann aus, dass, wenn

$$rt - s^2 > 0$$

ist, für ein Maximum oder Minimum der Punkt M_0 nicht zwischen den Punkten K' und K'' gelegen sein darf. Dagegen muss, wenn

$$rt - s^2 < 0$$

ist, für ein Maximum oder Minimum der Punkt M_0 zwischen K' und K'' sich befinden.

Es ist noch die Unterscheidung des Maximums und des Minimums zu machen. Ist die Bedingung 5) erfüllt, so kann die Grösse

$$q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + p^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

nicht null werden, welche reelle Werte auch p und q haben mögen, und hat folglich dasselbe Vorzeichen wie die Ableitungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Also hat auch noch die Summe dieser drei Grössen dasselbe Zeichen, und der Ausdruck

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 V}{\partial^2} - 2pq \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

ist demnach negativ im Falle des Maximums, positiv im Falle des Minimums. Man erkennt also, auf Grund der Gleichungen 2) und 3), dass

8) $$B(z-c)+2C<0$$

ist für das Maximum und

9) $$B(z-c)+2C>0$$

ist für das Minimum. Die Gleichung 6) aber, welche die Wurzeln z' und z'' hat, giebt

$$\frac{B}{C}=-\frac{1}{z-z'}-\frac{1}{z-z''},$$

also ist die Grösse

$$\frac{c-z'}{z-z'}+\frac{c-z''}{z-z''}$$

negativ im Falle des Maximums, positiv im Falle des Minimums.

Nehmen wir zunächst $rt-s^2>0$ an; dann sind die beiden Werte $z-z'$ und $z-z''$ von $z-Z$, welche aus der Gleichung 6) gewonnen werden, von gleichem Zeichen. Folglich sind die beiden Punkte K' und K'' der Geraden $M_0 M$ auf der nämlichen Seite des Punktes M gelegen. Die Differenzen $c-z'$ und $c-z''$ sind auch von gleichem Zeichen, wie vorhin gezeigt wurde, d. h. die Punkte K' und K'' liegen auch auf der nämlichen Seite des Punktes M_0. Daraus erkennt man, dass die Entfernung $M_0 M$ ein Minimum oder Maximum wird, je nachdem die Punkte M_0 und M auf der nämlichen Seite oder auf verschiedenen Seiten sowohl von K' als auch von K'' liegen; liegt M_0 zwischen K' und K'', so ist weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden.

Fig. 10.

u M Mo K' K'' v

Nehmen wir zweitens $rt-s^2<0$ an; gemäss der Gleichung 6) sind die Differenzen $z-z'$ und $z-z''$ von entgegengesetztem Zeichen, und der Punkt M liegt also auf der Geraden $M_0 M$ zwischen K' und K''. Die Bedingung 7) aber erfordert, dass $c-z'$ und $c-z''$ immer von ungleichem Zeichen sind, d. h. dass M_0 ebenso wie M zwischen K' und K'' sich befindet. In diesem Falle ist die Entfernung $M_0 M$ stets ein Minimum; in jedem anderen Falle weder ein Maximum noch ein Minimum.

Fig. 11.

u K' Mo M K'' v

Wir haben noch den Fall $rt - s^2 = 0$ zu untersuchen. Die Bedingung 5) reduziert sich hier auf

$$B(z - c) + C > 0,$$

und wenn sie erfüllt ist, so besteht auch die Ungleichung 9). Daraus folgt, dass dann nur ein Minimum vorhanden ist. Es giebt hier nur einen (endlichen) Punkt K' der Geraden $M_0 M$, dessen Koordinate z' der Gleichung

$$B(z - z') + C = 0$$

genügt. Führt man die Grösse z' statt B ein, so wird die obige Ungleichung

$$\frac{c - z'}{z - z'} > 0.$$

Damit also das Minimum wirklich stattfindet, muss der Punkt M_0 auf der nämlichen Seite des Punktes K' wie M liegen; in jedem anderen Falle ist weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden.

Fig. 12.

u M M_0 K' v

Ist endlich für die Koordinaten des Punktes M

$$A = 0, \quad B = 0,$$

so wird die Bedingung 5)

$$C > 0$$

und ist immer erfüllt. Bei dieser Annahme aber hat man:

$$rt - s^2 = 0, \; (1 + q^2)\, r - 2\, pqs + (1 + p^2)\, t = 0,$$

oder wenn man $t = \dfrac{s^2}{r}$ setzt:

$$r^2 + s^2 + (rq - sp)^2 = 0,$$

folglich

$$r = 0, \; s = 0, \; t = 0.$$

Die Gleichungen 2) zeigen, dass nun ein Minimum stattfindet.

Die Punkte K' und K'' haben in der Flächentheorie eine wichtige Bedeutung, wie später gezeigt werden wird.

Ob ein Minimum oder ein Maximum stattfinden kann, wenn der Punkt M_0 mit einem der Punkte K' oder K'' zusammenfällt, ist mittelst der höheren Ableitungen zu entscheiden, und von Herrn Mayer (Berichte der K. Sächs. Gesellsch. der Wissensch. 1881) näher untersucht worden.

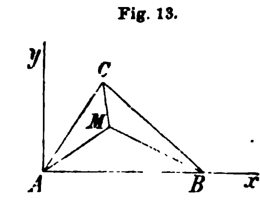
Untersuchung eines Falles, in dem die partiellen Ableitungen einer Funktion von mehreren Variabelen nicht mehr bestimmt sind, wenn man den Variabelen die Werte beilegt, welche dem Maximum oder Minimum entsprechen.

158. Wir sagten, dass die Werte der Variabelen, welche dem Maximum oder Minimum einer Funktion entsprechen, die partiellen Ableitungen derselben annullieren müssen, falls diese nicht unstetig werden. Wir müssen noch hinzufügen, nach einer wichtigen von Herrn Bertrand gemachten Bemerkung, dass die partiellen Ableitungen einer Funktion auch ganz unbestimmt werden können für gewisse Werte der Variabelen, und dass gerade diese Werte dem Maximum oder Minimum der Funktion angehören können. Wir wollen dafür das Beispiel geben, welches auch Herr Bertrand zum Beleg seiner Behauptung gewählt hat.

Aufgabe. *Es soll in der Ebene eines gegebenen Dreiecks der Punkt bestimmt werden, für welchen die Summe der Entfernungen von den Eckpunkten des Dreieckes ein Minimum wird.*

Die Seite AB des Dreieckes ABC wählen wir zur x-Axe, und die dazu Senkrechte Ay zur y-Axe. Die Länge der Seite AB bezeichnen wir mit c, die Koordinaten des Punktes C mit x_0, y_0, und endlich die Koordinaten des gesuchten Punktes M mit x, y. Die Funktion, deren Minimum gesucht wird, ist also

Fig. 13.



$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

und es ist von vornherein evident, dass jedenfalls ein Minimum existieren muss. Setzt man die partiellen Ableitungen dieser Summe gleich null, so hat man die zwei Gleichungen:

$$1)\quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} + \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0,$$

$$2)\quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} + \frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0,$$

welche zwei Kurven darstellen, deren Schnittpunkt den gesuchten Punkt M liefern. An Stelle dieser Kurven kann man aber zwei andere einfachere setzen. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit α, β, γ die Winkel, welche die Richtungen AM, BM, CM mit der Richtung Ax der Abscissenaxe bilden. Jeder dieser Winkel ist zu betrachten als erzeugt durch eine Gerade, die zunächst parallel zu Ax in dem Punkte A oder B oder C gelegt ist, und welche sich stets in dem nämlichen Sinne nach der positiven Ordinatenaxe hin dreht. Darnach hat man:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}, \qquad \sin\gamma = \frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}.$$

Die Vorzeichen der Wurzeln sind dabei, ebenso wie in den Gleichungen 1) und 2) positiv. Wenn also ein reeller Punkt x, y existiert, welcher die Gleichungen 1) und 2) befriedigt, so bestehen für denselben die Gleichungen:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0,$$
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0,$$

oder

$$\cos\alpha + \cos\beta = -\cos\gamma, \quad \sin\alpha + \sin\beta = -\sin\gamma.$$

Quadriert man diese Gleichungen und addiert sie, so folgt:

$$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 1,$$

oder

$$1 + 2\cos(\beta - \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \cos(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2}.$$

Der Winkel $\beta - \alpha$, welcher nichts anderes ist als AMB, hat also zum Cosinus den Wert $-\frac{1}{2}$, und folglich ist dieser

Winkel $AMB = 120^0$. Da dasselbe für jede Dreiecksseite gelten muss, so schliesst man hieraus, dass der Punkt M der Durchschnitt von drei Kreissegmenten ist, von denen jedes über einer Dreiecksseite, einen Winkel von 120^0 fassend, beschrieben ist. Die Kreise, welche zu zweien dieser Segmente gehören, können also an Stelle der durch die Gleichungen 1) und 2) dargestellten Kurven treten.

Damit aber diese drei Kreise sich wirklich in einem Punkte schneiden, ist notwendig und hinreichend, dass alle Winkel des Dreieckes kleiner als 120^0 sind. Ist in dem Dreiecke ein Winkel grösser als 120^0, so liefern die Gleichungen 1) und 2), auf welche die Theorie führt, keine Bestimmung des Minimums, wiewohl ein solches sicherlich vorhanden ist. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind aber nicht mehr bestimmt, wenn man x und y durch die Koordinaten einer Dreiecksecke ersetzt, folglich kann der gesuchte Punkt nur einer dieser Eckpunkte sein. Dies lässt sich nun auch leicht direkt beweisen.

159. Wir bezeichnen mit α immer den Winkel MAB, nennen ferner ϱ die Entfernung AM, b die Seite AC und A den Winkel CAB. Die Summe S der Entfernungen AM, BM, CM wird

$$S = \varrho + \sqrt{c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho\cos\alpha} + \sqrt{b^2 + \varrho^2 - 2b\varrho\cos(A-\alpha)}.$$

Nach der Binomialformel aber hat man, wenn ϱ hinreichend klein ist:

$$\sqrt{c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho\cos\alpha} = c\left[1 - 2\left(\frac{\varrho}{c}\cos\alpha - \frac{\varrho^2}{2c^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= c\left[1 - \left(\frac{\varrho}{c}\cos\alpha - \frac{\varrho^2}{2c^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{c}\cos\alpha - \frac{\varrho^2}{2c^2}\right)^2 - \cdots\right],$$

oder geordnet nach ϱ, wenn ε eine Grösse bezeichnet, die mit ϱ verschwindet:

$$\sqrt{c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho\cos\alpha} = c - \varrho\cos\alpha + \varrho^2\frac{\sin^2\alpha}{2c} + \varepsilon\varrho^2.$$

Ersetzt man in dieser Formel c und α durch b und $A - \alpha$, ferner ε durch η, so folgt:

$$\sqrt{b^2 + \varrho^2 - 2b\varrho\cos(A-\alpha)} = b - \varrho\cos(A-\alpha) + \varrho^2\frac{\sin^2(A-\alpha)}{2b} + \eta\varrho^2.$$

Der Ausdruck für S wird also:

$$S = (b + c) + \varrho\,[1 - \cos\alpha - \cos(A - \alpha)] + \frac{\varrho^2}{2}\left[\frac{\sin^2\alpha}{c} + \frac{\sin^2(A-\alpha)}{b}\right] + (\varepsilon + \eta)\,\varrho^2.$$

Derselbe reduziert sich auf

$$S_0 = b + c$$

für $\varrho = 0$. Lässt man ϱ unendlich klein werden, so hat die Differenz $S - S_0$ dasselbe Zeichen wie

$$1 - \cos\alpha - \cos(A - \alpha) = 1 - 2\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{1}{2}A - \alpha\right).$$

Ist nun $A < 120^0$, so ist $2\cos\frac{A}{2}$ grösser als 1, und der Winkel α kann so bestimmt werden, dass

$$\cos\left(\frac{1}{2}A - \alpha\right) < \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}, \quad \text{oder auch dass} \quad \cos\left(\frac{1}{2}A - \alpha\right) > \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}$$

wird. Die Differenz $S - S_0$ ändert also ihr Zeichen. Daraus folgt, dass $S_0 = b + c$ weder ein Maximal- noch ein Minimalwert von S ist. Wenn aber $A \geqq 120^0$ ist, so kann die Differenz $S - S_0$ nicht negativ werden; ist $\alpha = 120^0$, so wird sie zwar null für $\alpha = \frac{1}{2}A$; da aber der Koeffizient von ϱ^2 positiv ist, so hat man stets

$$S > S_0$$

und folglich ist S_0 ein Minimum.

Hat also das Dreieck ABC einen Winkel, der gleich oder grösser ist als 120^0, so ist der Scheitel desselben der gesuchte Punkt.

Fall der impliciten Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

160. Im allgemeinen Falle, wo man n Gleichungen zwischen $m + n$ Variabelen hat:

$$1)\quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2 \dots x_m, \quad z_1, z_2 \dots z_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2 \dots x_m, \quad z_1, z_2 \dots z_n) = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2 \dots x_m, \quad z_1, z_2 \dots z_n) = 0, \end{cases}$$

kann man m Variabele, z. B. $x_1, x_2 \dots x_m$ als unabhängige, die anderen $z_1, z_2 \dots z_n$ als Funktionen derselben betrachten. Es ist die Aufgabe, die Maxima und Minima von einer dieser Funktionen z zu bestimmen. Die Differentiation der Gleichungen 1) ergiebt:

$$2)\quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n} dz_n = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial z_n} dz_n = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_n}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial z_m} dz_m = 0. \end{cases}$$

Ist z_1 diejenige unter den Variabelen, deren Maxima und Minima zu bestimmen sind, so hat man zwischen den n Gleichungen die $n-1$ Differentiale $dz_2 \dots dz_n$ zu eliminieren; man gewinnt eine Gleichung von der Form:

$$3)\qquad X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \dots X_m\, dx_m + Z_1\, dz_1 = 0.$$

Die Bedingung des Maximums oder Minimums verlangt, dass $dz_1 = 0$ ist, und da die Differentiale in der Gleichung 3) willkürlich sind, so erhält man m Gleichungen:

$$4)\qquad \frac{X_1}{Z_1} = 0, \quad \frac{X_2}{Z_1} = 0 \cdots \frac{X_m}{Z_1} = 0.$$

Die Systeme 1) und 4) enthalten $m+n$ Gleichungen, welche zur Bestimmung der $m+n$ Variabelen ausreichen. Um aber zu entscheiden, ob ein auf diese Weise bestimmter Wert von z_1 wirklich ein Maximum oder Minimum ist, muss man $d^2 z_1$ berechnen und untersuchen, ob dieses Differential ein unveränderliches Vorzeichen besitzt.

Bemerkung über den Fall einer expliciten Funktion von mehreren Variabelen, welche durch gegebene Gleichungen verbunden sind.

161. Der vorige Fall umfasst auch die Aufgabe, die Maxima und Minima einer expliciten Funktion von $m+n$ Veränderlichen

$$F(x_1, x_2 \dots x_m, x_{m+1} \dots x_{m+n})$$

zu bestimmen, welche durch n Gleichungen

$$1)\qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots x_{m+n}) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots x_{m+n}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots x_{m+n}) = 0 \end{cases}$$

mit einander verbunden sind. Denn bezeichnet man mit u den Wert der Funktion $F(x_1 \dots x_{m+n})$, und fügt den n Gleichungen 1) noch die folgende hinzu:

$$u - F(x_1 \dots x_{m+n}) = 0,$$

so hat man $n+1$ Gleichungen zwischen $m+n+1$ Variabelen. Nach der Untersuchung des § 160 hat man diese Gleichung, sowie die Gleichungen 1) zu differentiieren, und weil du für den Fall des Maximums oder Minimums null wird, so hat man

$$2)\qquad \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \frac{\partial F}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0,$$

ferner

$$3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0. \end{cases}$$

Darnach müssen wir aus den Gleichungen 2) und 3) n der Differentiale $dx_1 \dots dx_{m+n}$ eliminieren, und die Koeffizienten der nachbleibenden Differentiale gleich null setzen. Um diese Elimination zu vollziehen, addieren wir die Gleichungen 3)

zu der Gleichung 2), nachdem wir sie zuerst mit den noch unbestimmten Faktoren

$$\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$$

multipliziert haben. Diese Faktoren können nun aber so bestimmt werden, dass die Koeffizienten von n Differentialen verschwinden; und da alsdann in der nachbleibenden Gleichung die Koeffizienten der noch übrigen Differentiale einzeln gleich null gesetzt werden müssen, so erkennt man, dass überhaupt die Koeffizienten der Differentiale $dx_1, dx_2 \dots dx_{m+n}$ in der Summenformel null sein müssen. Man erhält also die $m+n$ Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots \lambda_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots \lambda_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_{m+n}} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{m+n}} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{m+n}} + \cdots \lambda_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{m+n}} = 0. \end{cases}$$

Hieraus sind die n Unbekannten $\lambda_1 \dots \lambda_n$ zu eliminieren, und man erhält m Gleichungen, die mit den gegebenen n zusammen zur Bestimmung der $m+n$ Unbekannten $x_1 \dots x_{m+n}$ dienen.

162. Die Anwendung der Faktoren λ hat uns bisher nur dazu gedient, eine Elimination durch eine andere zu ersetzen, was kein besonderes Interesse bietet; doch lässt uns die Betrachtung dieser Faktoren einen wichtigen Satz aussprechen. Würden die Variabelen $x_1 \dots x_{m+n}$ alle unabhängig sein, so würde die Bedingung des Maximums oder Minimums der Funktion F die Gleichungen ergeben:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \cdots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_{m+n}} = 0.$$

In unserem Falle handelt es sich aber um ein relatives Maximum oder Minimum, indem die Variabelen $x_1 \dots x_{m+n}$ durch die Gleichungen 1) verbunden sind. Die Gleichungen 4) lehren nun, dass das relative Maximum oder Minimum erhalten wird, wenn man die Regel für das absolute Maximum oder Minimum auf die Funktion

$$F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots \lambda_n f_n$$

anwendet, wobei die Faktoren $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ zunächst unbestimmt sind. Nachdem man die Werte $x_1 \ldots x_{m+n}$ berechnet hat, die alsdann von diesen Faktoren abhängig sein werden, sind diese letzteren so zu bestimmen, dass die gefundenen Werte der Variabelen die n gegebenen Gleichungen befriedigen.

Wir fügen noch zum Schlusse hinzu, dass es in vielen Fällen auch zweckmässiger ist, die Funktion $F(x_1, x_2 \ldots x_{m+n})$ von vornherein als eine explicite Funktion von m Variabelen zu behandeln, was gestattet ist, indem man sich die n übrigen als Funktionen dieser m auf Grund der gegebenen n Gleichungen dargestellt denkt. So sind wir bei einigen der oben behandelten Beispiele vorgegangen.

Siebentes Kapitel.

Theorie der ebenen Kurven.

Die Tangente und die Normale an ebenen Kurven. Die Grenzlage der Tangenten.

163. Es seien x und y die geradlinigen Koordinaten der Punkte einer gegebenen Kurve. Welche Variabele man nun auch als unabhängig betrachten mag, der Richtungskoeffizient der *Tangente* im Punkte (x, y) wird, wie wir gesehen haben, die Grenze des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, oder der Quotient $\frac{dy}{dx}$ der Differentiale dy und dx. Nur wenn diese Grenze einen bestimmten Wert hat, ist eine Tangente vorhanden. Wenn wir ferner mit ξ und η die Koordinaten der Punkte auf der Tangente bezeichnen, so wird ihre Gleichung

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x).$$

Die *Normale* der Kurve oder die zur Tangente senkrechte Gerade im Berührungspunkte bekommt im Falle rechtwinkliger Koordinaten die Gleichung

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x),$$

im allgemeinen Falle, wo die Axen einen Winkel θ bilden, wird die Gleichung dieser Normalen

$$\eta - y = -\frac{dx + dy\cos\theta}{dy + dx\cos\theta}(\xi - x).$$

Sind die Koordinaten x und y der Kurve als Funktionen einer Variabelen t gegeben, derart dass

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

ist, so schliesst man unmittelbar, dass

$$dx = \varphi'(t)\,dt, \quad dy = \psi'(t)\,dt,$$

ferner

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

wird. Wenn die Gleichung der Kurve in der impliciten Form

$$f(x, y) = 0$$

vorliegt, so ist, wie gezeigt wurde, der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ durch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

gegeben, und wenn man $\frac{dy}{dx}$ durch $\frac{\eta - y}{\xi - x}$ ersetzt, so erhält man die Gleichung der Tangente, nämlich

$$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

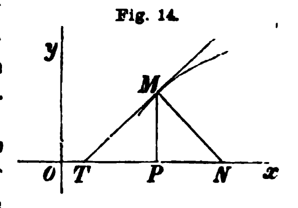
Geht die gegebene Kurve durch den Anfangspunkt der Koordinaten, so ist der Richtungskoeffizient der Tangente die Grenze von $\frac{y}{x}$ für $x = 0$; übrigens hat man nach § 124

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{\frac{dy}{dx}}{1} \quad \text{für } x = 0,$$

sobald $\lim \frac{dy}{dx}$ überhaupt eine bestimmte Grenze besitzt.

164. Wir hatten schon Gelegenheit (§ 28) die Strecken zu definieren, welche man die *Länge der Tangente* oder die *Länge der Normalen* nennt, und wir haben auch die Definitionen der *Subtangente* und der *Subnormalen* erwähnt. Sind die Axen rechtwinklig, ist ferner M der Berührungspunkt, MP seine Ordinate, T und N die Punkte, in denen die Tangente MT und die Normale MN die Abscissenaxe schneidet, so wollen wir kurz mit T und N die Längen MT und MN auf der Tangente und auf der Normalen bezeichnen, mit T' und N' die Subtangente TP und die Subnormale PN. Alsdann ergeben die rechtwinkligen Dreiecke

Fig. 14.



PMT und PMN, in denen die Winkel MTP und PMN zur trigonometrischen Tangente den Wert $\frac{dy}{dx}$ haben:

$$T' = y\,\frac{dx}{dy}, \quad N' = y\,\frac{dy}{dx},$$

und dieselben Dreiecke ergeben auch:

$$T = \sqrt{y^2 + T'^2}, \quad N = \sqrt{y^2 + N'^2},$$

folglich:

$$T = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}, \quad N = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}.$$

Es muss bemerkt werden, dass die Ausdrücke für T' und N' positiv oder negativ sind, je nachdem die Richtungen TP und PN mit der positiven Richtung der Abscissenaxe oder mit der entgegengesetzten zusammenfallen.

165. Asymptoten. Grenzlage der Tangenten. Eine Gerade heisst eine *Asymptote* eines Kurvenzweiges, welcher sich ins unendliche erstreckt, wenn die Entfernung eines Kurvenpunktes M von der Geraden nach dem Grenzwerte null konvergiert, während der Punkt, indem er stets auf der Kurve bleibt, unbegrenzt hinausrückt. Es ist leicht zu sehen, dass die Asymptote im allgemeinen die Grenzlage wird, welcher sich die Tangente im Punkte M immer mehr nähert, wenn M ins unendliche rückt, nämlich stets dann, wenn solch eine Grenzlage überhaupt vorhanden ist.

Denn nehmen wir an, dass die Kurve einen Zweig hat, der sich ins unendliche erstreckt, und dabei eine Asymptote besitzt, welche nicht parallel zur y-Axe ist, vielmehr die Gleichung

$$1) \qquad \eta = g\xi + h$$

hat. Die Entfernung des Punktes x, y der Kurve von dieser Asymptote ist

$$\frac{y - gx - h}{\sqrt{1 + 2g\cos\theta + g^2}}\sin\theta,$$

wenn θ der Koordinatenwinkel ist. Dieser Ausdruck soll mit $\frac{1}{x}$ nach null konvergieren. Bezeichnet man also mit ε eine Grösse, welche mit $\frac{1}{x}$ null wird, so hat man

$$y - gx - h = \varepsilon \quad \text{oder} \quad y = gx + h + \varepsilon.$$

Hieraus folgert man:

$$\frac{y}{x} = g + \frac{h + \varepsilon}{x},$$

und für $x = \infty$

2) $$\lim \frac{y}{x} = g.$$

Ferner hat man $h = (y - gx) - \varepsilon$, und folglich

3) $$h = \lim (y - gx).$$

Die Gleichungen 2) und 3) lassen also die Konstanten h und g der Asymptote bestimmen, indem man aus der Kurvengleichung $y = f(x)$ die Grenzen

$$\lim \frac{f(x)}{x} = g \quad \text{und} \quad \lim [f(x) - gx] = h$$

für $x = \infty$ zu ermitteln hat.

Betrachten wir nun die Gleichung der Tangente an die Kurve, nämlich

4) $$\eta = \frac{dy}{dx}\xi + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right).$$

$\frac{y}{x}$ ist ein Quotient, dessen Zähler und Nenner im allgemeinen beide gleichzeitig unendlich werden. Nach § 124 ist aber dann stets

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{\frac{dy}{dx}}{1} \quad \text{für } x = \infty,$$

sobald $\lim \frac{dy}{dx} = \lim f'(x)$ überhaupt einen bestimmten Grenzwert hat, folglich ist

$$\lim \frac{dy}{dx} = g.$$

Bleibt insbesondere für $x = \infty$ die Ordinate y endlich, so ist $\lim \frac{y}{x} = g = 0$. Dann ist aber auch $\lim f'(x) = 0$, wenn es überhaupt einen bestimmten Grenzwert hat. Denn es ist $f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$, und lässt man x ins unendliche wachsen, so wird die linke Seite die Grenze 0 annehmen, folglich muss auch $\lim f'(x + \theta h)$ die Grenze 0 haben, und also auch $\lim f'(x)$, falls es überhaupt eine bestimmte Grenze besitzt.

Ferner hat man

$$\lim (y - gx) = \lim \frac{g - \frac{y}{x}}{-\frac{1}{x}}.$$

Zähler und Nenner dieses Quotienten verschwinden für $x = \infty$. Indem man also die Regel des § 124 anwendet, wird

$$\lim (y - gx) = \lim \frac{\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{x^2}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim \left(y - x\frac{dy}{dx}\right),$$

also ist

$$\lim \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = h.$$

Also hat die Tangente, welche durch die Gleichung 4) gegeben ist, als Grenze die Asymptote 1), wenn der Punkt x, y ins unendliche rückt, und dabei stets auf dem betrachteten Kurvenzweige bleibt. Jedoch ist hier immer vorausgesetzt, dass $\frac{dy}{dx}$ und $y - x\frac{dy}{dx}$ bestimmte Grenzen besitzen. Ist dieses nicht der Fall, so ist, auch wenn es eine Asymptote giebt, dieselbe nicht mehr als Grenze der Tangente zu betrachten.

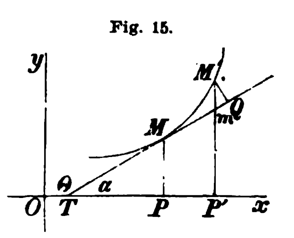
Ein Beispiel für diesen letzteren Fall liefert die Gleichung $y = \frac{\sin x}{x}$. Die x-Axe ist hier eine Asymptote der Kurve; $\frac{dy}{dx}$ konvergiert nach 0, wenn x unendlich wird, aber $y - x\frac{dy}{dx}$ ist unbestimmt für $x = \infty$.

Die Ordnung der Berührung zwischen Kurve und Tangente. Die Wendepunkte. Die Lage der konkaven und konvexen Seite.

166. Es sei TQ die Tangente im Punkte M der Kurve MM'. Wir wählen auf der Kurve den Punkt M' beliebig nahe an M und füllen das Lot $M'Q$ auf die Tangente. Der Quotient $\frac{M'Q}{MQ}$ ist gleich der trigonometrischen Tangente des

Winkels $M'MQ$, welcher unendlich klein wird, wenn M' an M heranrückt. Betrachtet man also MQ als unendlich kleine Grösse erster Ordnung, so wird $M'Q = MQ \operatorname{tang}(M'MQ)$ unendlich klein von einer gewissen Ordnung $\mu + 1$, welche grösser ist als 1. Wir sagen nun, dass die Zahl μ die Ordnung der Berührung zwischen der Kurve und ihrer Tangente im Punkte M ausdrückt.

Fig. 15.



Ist die Kurve auf zwei geradlinige Koordinaten Ox und Oy bezogen, welche den Winkel θ mit einander bilden, und werden die Ordinaten MP, $M'P'$ konstruiert, werden ferner mit T und m die Schnittpunkte der Tangente TQ auf der x-Axe und der Ordinate $M'P'$, mit α der Winkel MTx bezeichnet, so folgt aus dem Dreiecke $M'mQ$

$$M'm = \frac{M'Q}{\sin(\theta - \alpha)}, \quad Mm = MQ - M'Q \operatorname{cotang}(\theta - \alpha),$$

und aus dem Dreiecke mTP':

$$PP' = Mm\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}, \text{ oder } PP' = MQ\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} - M'Q\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta}.$$

Man sieht also, dass wenn die y-Axe nicht parallel zur Tangente TQ ist, die Verhältnisse der unendlich kleinen Grössen

$$M'm \quad \text{und} \quad PP'$$

zu den unendlich kleinen Grössen

$$M'Q \quad \text{und} \quad MQ$$

nach endlichen Grenzen konvergieren. Wählt man also PP' zur unendlich kleinen Grösse erster Ordnung, so ist $M'm$ ebenso wie $M'Q$ unendlich klein von $\mu + 1^{\text{ter}}$ Ordnung.

Bezeichnen wir mit x, y die Koordinaten des Punktes M, mit $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die des Punktes M', und mit Y die Ordinate des Punktes m auf der Tangente. Die Ordnung der Berührung im Punkte M ist nach der vorangegangenen Definition um eine Einheit kleiner als die Ordnung der unendlich kleinen Differenz

1) $$(y + \Delta y) - Y \quad \text{oder} \quad \Delta y - (Y - y),$$

wenn Δx die unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist. Nach der Tangentengleichung ist aber

$$Y - y = \frac{dy}{dx} \Delta x,$$

also reduziert sich der Ausdruck 1) auf

2) $$\Delta y - \frac{dy}{dx} \Delta x.$$

Die Taylorsche Gleichung, entwickelt bis zum dritten Gliede, ergiebt aber

3) $$\Delta y - \frac{dy}{dx} \Delta x = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{2} + R_3,$$

indem man die erforderlichen Bedingungen der Stetigkeit als erfüllt annimmt, und man sieht also, dass, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ nicht null ist, die Differenz 2) von zweiter Ordnung unendlich klein wird und ihr Zeichen nicht ändert, wenn das Zeichen von Δx geändert wird. Die Berührung einer Kurve und ihrer Tangente ist also im allgemeinen von erster Ordnung, und die Kurve liegt in der beiderseitigen Umgebung des Berührungspunktes ganz auf der einen Seite der Tangente.

Ist aber für den Punkt M

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

so ergiebt die Taylorsche Gleichung, entwickelt bis zum vierten Gliede:

4) $$\Delta y - \frac{dy}{dx} \Delta x = \frac{d^3y}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + R_4,$$

und ist nun $\frac{d^3y}{dx^3}$ nicht null, so wird diese Differenz von dritter Ordnung unendlich klein und ändert mit Δx ihr Vorzeichen; in diesem Falle wird die Berührung im Punkte M von der zweiten Ordnung, und da die Differenz $(y + \Delta y) - Y$ ihr Vorzeichen zugleich mit Δx ändert, so durchsetzt die Kurve die Tangente im Punkte M. Man sagt dann, dass sie eine *Wendung* (Inflexion) im Punkte M macht, oder dass M ein *Wendepunkt* (Inflexionspunkt) ist.

Dieses erfordert, dass $\frac{d^3y}{dx^3}$ nicht null ist. Nehmen wir allgemein an, dass für den Punkt M

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0$$

wird, dass aber die folgende Ableitung $\frac{d^ny}{dx^n}$ nicht verschwindet, so ist nach der Taylorschen Gleichung:

$$5) \qquad \Delta y - \frac{dy}{dx}\Delta x = \frac{d^ny}{dx^n}\frac{\Delta x^n}{n!} + R_{n+1}.$$

Diese Differenz wird unendlich klein von der Ordnung n und die Kurve hat folglich im Punkte M eine Berührung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung mit ihrer Tangente. Ist n eine gerade Zahl, so ändert die Differenz ihr Zeichen nicht, wenn das Zeichen von Δx geändert wird, und es liegt demnach in der beiderseitigen Umgebung des Berührungspunktes die Kurve ganz auf der nämlichen Seite der Tangente. Ist aber n ungerade, so ändert diese Differenz mit Δx ihr Zeichen, die Kurve durchschneidet also die Tangente und macht im Punkte M eine eigentliche Wendung.

Man sieht also, dass die eigentlichen Wendepunkte einer Kurve diejenigen sind, wo die Kurve eine Berührung gerader Ordnung mit ihrer Tangente hat. Es ist wohl kaum nötig hinzuzufügen, dass die vorangegangene Untersuchung die Fälle bei Seite lässt, in denen die Ableitungen der Kurvenordinate in der Umgebung des betrachteten Punktes nicht mehr stetig bleiben.

Wir fügen hier noch eine wichtige Bemerkung hinzu. Legen wir durch den Punkt M eine beliebige Gerade, und ist Y_1 die Ordinate eines Punktes derselben, welcher zur Abscisse $x + \Delta x$ gehört, so ist $Y_1 - y = a\Delta x$, wenn a der Richtungskoeffizient der Geraden ist. Folglich ist

$$Y - Y_1 = \left(\frac{dy}{dx} - a\right)\Delta x,$$

$$(y + \Delta y) - Y_1 = \left(\frac{dy}{dx} - a\right)\Delta x + \cdots$$

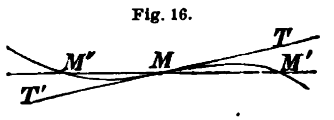
und weil Δx unendlich klein wird, so sieht man, dass die Differenzen

$$Y - Y_1, \quad y + \Delta y - Y_1$$

von gleichem Zeichen sind. Hieraus schliesst man: es ist nicht möglich, durch einen Punkt der Kurve eine Gerade zu legen, welche in der Umgebung des Berührungspunktes zwischen der Kurve und ihrer Tangente verläuft.

167. Bemerkung über die Wendepunkte. Es sei TT' die Tangente in einem Wendepunkte M. Wählen wir auf der Kurve auf verschiedenen Seiten des Punktes zwei Punkte M' und M'', so ist die Tangente TT' die Grenze, nach welcher die Sekanten MM' und MM'' konvergieren, wenn die Punkte M' und M'' unbegrenzt dem Punkte M sich nähern. Und wenn der Winkel $M''MT'$ grösser ist als $M'MT$, so kann man ihn diesem Winkel gleich machen, indem man M'' dem Punkte M hinreichend nähert. Die Gerade MM'' fällt dann in die Verlängerung der Geraden $M'M$. Hieraus folgt, dass eine Sekante, welche man durch einen Wendepunkt legt, die Kurve noch in mehreren anderen Punkten schneidet, unter denen mindestens zwei sind, welche in der Grenzlage mit dem Wendepunkte zusammenfallen.

Fig. 16.



168. Konkave und konvexe Seite. Man sagt, dass eine Kurve in einem ihrer Punkte M in Bezug auf eine gegebene Gerade *konkav* ist, oder dass sie ihre *konkave Seite* der Geraden zuwendet, wenn sie in der Umgebung von M ganz innerhalb des spitzen Winkels gelegen ist, welchen die Tangente in M mit der gegebenen Geraden bildet. Dagegen ist sie *konvex* im Punkte M, oder sie kehrt ihre *konvexe Seite* nach der Geraden, wenn sie in der Umgebung dieses Punktes ganz innerhalb des stumpfen Winkels zwischen der Tangente in M und der Geraden sich befindet.

Die im § 166 erhaltenen Resultate geben uns ein Mittel, um zu entscheiden, ob eine Kurve in einem gegebenen Punkte ihre konvexe oder konkave Seite der x-Axe zuwendet. Nehmen wir zunächst an, dass die Axen rechtwinklig sind. Man ersieht aus der Figur des § 166, dass die Konkavität oder Kon-

vexität vorliegt, je nachdem die Ordinate $M'P' = y + \Delta y$ kleiner oder grösser ist als die Ordinate $mP' = Y$ der Tangente. Der Unterschied zwischen beiden ist gleich $\Delta y - \frac{dy}{dx}\Delta x$, ein Ausdruck, der nach der Gleichung 3) des § 166 das Vorzeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ hat. Also ist die Kurve im Punkte M konkav oder konvex nach der x-Axe gerichtet, je nachdem $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ oder positiv ist. Dabei ist jedoch immer vorausgesetzt, dass y positiv ist, und es ist leicht einzusehen, dass bei negativem y genau das Gegenteil stattfindet.

Hiernach erkennt man, dass eine Kurve konvex nach der x-Axe gerichtet ist, wenn y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleiche Zeichen haben, dagegen konkav, wenn y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ von ungleichem Zeichen sind. Wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ null wird, so besteht die Konkavität und Konvexität in dem Falle fort, dass die Berührung zwischen Kurve und Tangente von ungerader Ordnung ist; ist dagegen die Berührung von gerader Ordnung, so verwandelt sich im Punkte M die Konkavität in Konvexität, oder umgekehrt.

169. Diese Schlussweise gilt nicht immer, falls die Koordinatenaxen einen spitzen oder stumpfen Winkel θ bilden. Sei dann α der Winkel, welchen die Tangente mit der x-Axe bildet, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

Ist $\alpha < \theta$ und $\alpha < 90^0$, oder ist $\alpha > \theta$ und $\alpha > 90^0$, so ist die Bedingung für Konkavität und Konvexität die nämliche, wie bei rechtwinkligen Axen. Unter entgegengesetzten Bedingungen werden dagegen die Bedingungen für Konkavität und Konvexität dieselben wie für Konvexität und Konkavität bei rechtwinkligen Axen. Man kann die Richtigkeit dieser Behauptung leicht an einer Figur bestätigen; man gelangt zu derselben aber auch durch eine sehr einfache Rechnung. Bezeichnen wir nämlich mit x_1, y_1 die Koordinaten eines Punktes

in Bezug auf die ursprüngliche x-Axe und eine dazu senkrechte Gerade, so ist

$$y_1 = y \sin\theta, \quad x_1 = x + y\cos\theta.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}\sin\theta \cdot \left(\frac{dx_1}{dx}\right)^{-1},$$

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^{\,2}} = \left[\frac{d^2y}{dx^2}\sin\theta\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^{-1} - \frac{dy}{dx}\sin\theta\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^{-2}\frac{d^2x_1}{dx^2}\right]\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^{-1}.$$

Da nun

$$\frac{dx_1}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}\cos\theta, \quad \frac{d^2x_1}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\cos\theta,$$

so wird

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^{\,2}} = \frac{d^2y}{dx^2}\sin\theta\left(1 + \frac{dy}{dx}\cos\theta\right)^{-3},$$

also:

$$\frac{1}{y_1}\cdot\frac{dy_1^{\,2}}{dx_1^{\,2}} = \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}\left(1 + \frac{dy}{dx}\cos\theta\right)^{-3},$$

und es ist

$$1 + \frac{dy}{dx}\cos\theta = \frac{\sin\theta\cos\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

Das Zeichen von $\frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{dx_1^{\,2}}$ entscheidet, ob die konkave oder konvexe Seite der Abscissenaxe zugekehrt ist, und dieser Ausdruck hat dasselbe Zeichen wie $\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}$, wenn $\cos\alpha$ und $\sin(\theta-\alpha)$ von gleichem Zeichen sind; es ist dagegen dem Zeichen von $\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}$ entgegengesetzt, wenn $\cos\alpha$ und $\sin(\theta-\alpha)$ von ungleichem Zeichen sind.

170. **Beispiel I.** Für die Kurve, deren Gleichung in Bezug auf rechtwinklige Koordinaten

$$y = \sin x$$

ist, wird

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = -1.$$

Die Kurve ist also beständig konkav nach der x-Axe gerichtet, und die Punkte, in denen sie diese Axe schneidet, sind Wendepunkte.

II. Für die Kurven, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten

$$y = \operatorname{tang} x$$

ist, wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d^2y}{d^2x} = \frac{2 \operatorname{tang} x}{\cos^2 x}, \quad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\cos^2 x}.$$

Die Kurve kehrt also beständig ihre konvexe Seite der Abscissenaxe zu, und ihre Schnittpunkte mit dieser Axe sind Wendepunkte.

III. Die Kurve, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten

$$y = \frac{x^3 - x}{3x^2 + 1}$$

ist, hat die Ableitungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^4 + 6x^2 - 1}{(3x^2 + 1)^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{24(x - x^3)}{(3x^2 + 1)^3},$$

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{24}{(3x^2 + 1)^2}.$$

Die Kurve kehrt beständig ihre konkave Seite nach der x-Axe. Sie hat drei Wendepunkte, welche auf der x-Axe gelegen sind, mit den Abscissenwerten $x = -1, 0, +1$; die zugehörigen Werte von $\frac{dy}{dx}$ sind $\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}$.

Anwendung homogener Koordinaten.

171. Die beiden geradlinigen Koordinaten eines Punktes können durch die Verhältnisse zweier Variabelen x, y zu einer unbestimmten Grösse z dargestellt werden. (Der Gedanke geht von Möbius und Plücker aus; ersterer hat zugleich die geometrische Bedeutung dieser drei Variabelen als Dreieckskoordinaten begründet. Die algebraische Theorie der auf diese Weise gebildeten Formen hat Hesse entwickelt.) Es wird

jede Kurvengleichung durch diese Darstellung der Punktkoordinaten zu einer homogenen, was häufig von grossem Werte ist. Sind die Koordinaten mit $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ bezeichnet, so erhält die Gleichung irgend einer Kurve die Form

$$1) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

wobei nun f eine homogene Funktion der drei Variabelen x, y, z bezeichnet, die man, wenn die ursprüngliche Gleichung eine ganze rationale algebraische Funktion in x und y war, durch Multiplikation mit einer Potenz von z auch in eine ganze rationale homogene Funktion von x, y, z verwandeln kann. Geht man von einem Punkte der Kurve zu einem andern Punkte, so kann man willkürlich z als konstant, oder auch als veränderlich annehmen; denn es sind immer nur die Verhältnisse $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ vermittelst der Gleichung für jeden Punkt bestimmt.

Wird die Gleichung 1) differentiiert, ohne dass eine Annahme über z gemacht wird, so erhält man

$$2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

Die Identitäten

$$x = \frac{x}{z} z, \quad y = \frac{y}{z} z,$$

in welchen z von null verschieden angenommen ist, ergeben:

$$dx = z\, d\frac{x}{z} + \frac{x}{z} dz, \quad dy = z\, d\frac{y}{z} + \frac{y}{z} dz,$$

und folglich wird die Gleichung 2):

$$z\left[\frac{\partial f}{\partial x} d\frac{x}{z} + \frac{\partial f}{\partial y} d\frac{y}{z}\right] + \frac{dz}{z}\left[x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right] = 0.$$

Es ist aber, wenn n den Grad der homogenen Funktion angiebt (§§ 84 und 136):

$$3) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = n f(x, y, z) = 0.$$

Hieraus folgt:

$$4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} d\frac{x}{z} + \frac{\partial f}{\partial y} d\frac{y}{z} = 0.$$

Nach den Bezeichnungen, welche wir hier eingeführt haben, wird die Gleichung der Tangente:

$$\frac{\eta}{\zeta} - \frac{y}{z} = \frac{d\frac{y}{z}}{d\frac{x}{z}}\left(\frac{\xi}{\zeta} - \frac{x}{z}\right),$$

oder gemäss der Gleichung 4):

$$\left(\frac{\xi}{\zeta} - \frac{x}{z}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\eta}{\zeta} - \frac{y}{z}\right)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = -z\frac{\partial f}{\partial z}$ nach Gleichung 3), so wird die Gleichung der Tangente einfach:

$$5) \qquad \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

172. Beispiel. Betrachten wir den Fall der Kurven zweiten Grades. Hier ist

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0,$$

ferner:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{31}z,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z} = a_{31}x + a_{23}y + a_{33}z.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte x, y, z wird also:

$$\xi(a_{11}x + a_{12}y + a_{31}z) + \eta(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z) + \zeta(a_{31}x + a_{23}y + a_{33}z) = 0.$$

Will man zur gewöhnlichen Bezeichnung der Koordinaten zurückkehren, so kann man $z = 1$, $\zeta = 1$ setzen.

173. Das im § 171 gewonnene Resultat führt ohne weiteres zu dem folgenden Satze:

Lehrsatz I. *Konstruiert man an eine ebene algebraische Kurve von der Ordnung* n *aus einem beliebigen Punkt der Ebene die Tangenten, so liegen die Berührungspunkte derselben auf einer zweiten algebraischen Kurve von der Ordnung* n − 1.

Denn ist die gegebene Kurve durch die Gleichung 1) des § 171 bestimmt, so genügen die Berührungspunkte (x, y, z) aller Tangenten, welche man von einem bestimmten Punkte ξ, η, ζ konstruieren kann, der Gleichung 5), und es ist ersichtlich, dass diese Gleichung eine algebraische Kurve von der Ordnung $n-1$ ist.

Nimmt man an, dass der gegebene Punkt nach einander alle Lagen auf einer gegebenen Geraden annimmt, so gilt der vorstehende Satz für jede dieser Lagen, selbst wenn der gegebene Punkt ins unendliche rückt. Ist die Gleichung derselben

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0,$$

so werden die Grenzwerte der Koordinaten $\zeta = 0$, $\frac{\xi}{\eta} = -\frac{\beta}{\alpha}$, und die Gleichung 5) erhält die Form

$$\beta \frac{\partial f}{\partial x} - \alpha \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Man hat also den anderen Satz:

Lehrsatz II. *Konstruiert man an eine algebraische Kurve alle Tangenten, welche einer gegebenen Richtung parallel sind, so sind die Berührungspunkte derselben auf einer Kurve von der Ordnung* n − 1 *gelegen.*

Bemerkung. Dieser zweite Satz lässt sich auch sehr einfach beweisen, ohne dass man zu homogenen Koordinaten übergeht. Bei dem Beweise des ersten Satzes muss man dagegen eine Transformation ausführen, wenn man die gewöhnlichen Koordinaten anwendet.

Untersuchung über die Wendepunkte der Kurven.

174. Wir bezeichnen mit $\frac{x}{z} = x'$ und $\frac{y}{z} = y'$ die geradlinigen Koordinaten, mit u eine homogene Funktion von x, y, z, und betrachten die Kurve, welche durch die Gleichung

$$u = 0 \tag{1}$$

definiert ist. Zur Abkürzung setzen wir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = u_3,$$

ferner:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = u_{11}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = u_{12} = u_{21},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = u_{22}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial y} = u_{23} = u_{32},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_2} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = u_{33}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial z} = u_{31} = u_{13}.$$

Differentiiert man die Gleichung 1), so erhält man, wenn x und y endlich, und z von 0 verschieden angenommen wird, wie bereits gefunden wurde:

$$2) \qquad u_1\, dx' + u_2\, dy' = 0.$$

Ist n der Grad der Homogenität der Funktion u, so sind u_1 und u_2 homogen vom Grade $n-1$, und man erhält:

$$du_1 = z(u_{11}\, dx' + u_{12}\, dy') + (n-1)\, u_1 \frac{dz}{z},$$

$$du_2 = z(u_{12}\, dx' + u_{22}\, dy') + (n-1)\, u_2 \frac{dz}{z}.$$

Differentiiert man also die Gleichung 2), indem man das Differential von x' als konstant ansieht, und reduziert man das Resultat vermittelst derselben Gleichung 2), so folgt:

$$du_1\, dx' + du_2\, dy' + u_2\, d^2y' = 0,$$

oder:

$$3) \quad z[u_{11}(dx')^2 + 2u_{12}(dx')(dy') + u_{22}(dy')^2] + u_2\, d^2y' = 0.$$

Die Bedingung für die Wendepunkte ist jetzt

$$4) \qquad d^2y' = 0,$$

und wenn die Funktion u_2 endlich bleibt, reduziert sich die Gleichung 3) auf

$$5) \qquad u_{11}(dx')^2 + 2u_{12}(dx')(dy') + u_{22}(dy')^2 = 0.$$

Dabei ist indessen zu bemerken, dass die Gleichung 5) nicht die Gleichung 4) zur Folge hat, wenn $u_2 = 0$ und d^2y' endlich ist. Die Bedingung $u_2 = 0$ sagt zunächst aus, dass die Tangente in diesen Kurvenpunkten der Ordinatenaxe parallel ist, und wir können ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit

annehmen, dass für solche Punkte nicht auch die Gleichung 5) erfüllt ist. Anders aber ist es, wenn $u_2 = 0$ und gleichzeitig $u_1 = 0$ ist, wie wir später sehen werden.

Eliminieren wir zunächst zwischen den Gleichungen 2) und 5) die Differentiale dx' und dy', so folgt:

$$6)\qquad u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2 = 0,$$

und diese Gleichung kann noch vereinfacht werden. Denn wenn man zwischen den vier identischen Gleichungen

$$7)\qquad nu = u_1x + u_2y + u_3z$$

und

$$8)\qquad \begin{cases} (n-1)u_1 = u_{11}x + u_{12}y + u_{13}z, \\ (n-1)u_2 = u_{21}x + u_{22}y + u_{23}z, \\ (n-1)u_3 = u_{31}x + u_{32}y + u_{33}z \end{cases}$$

x, y und u_3 eliminiert, so findet man:

$$9)\ (n-1)^2[u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2] = n(n-1)u(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) - z^2H(u),$$

wobei

$$10)\begin{cases} H(u) = u_{11}(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) + u_{12}(u_{23}u_{31} - u_{12}u_{33}) + u_{13}(u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}) \\ \qquad = u_{11}u_{22}u_{33} + 2u_{12}u_{23}u_{31} - u_{11}u_{23}^2 - u_{12}^2u_{33} - u_{22}u_{13}^2. \end{cases}$$

Was auch immer die Form der homogenen Funktion u sein mag, der Fall $n = 1$ kann stets vermieden werden, indem man u mit einer Potenz von z multipliziert. Also reduziert sich, vermittelst der Identität 9) und der Gleichung $u = 0$ die Gleichung 6) auf

$$11)\qquad H(u) = 0.$$

Die Kurve $H(u) = 0$ schneidet auf der Kurve $u = 0$ die Wendepunkte aus. Die Funktion $H(u)$ ist die Determinante der neun partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, nämlich:

$$H(u) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}$$

Hesse hat sie die *Determinante* der Funktion u genannt; nach ihm heisst sie jetzt allgemein die Hesse'sche Determinante. Sie ist der gemeinsame Nenner in den Ausdrücken, welche man erhält, wenn man die Gleichungen 8) nach x, y, z auflöst. Daraus folgt, dass die Gleichung 11) auch immer erfüllt ist durch diejenigen Werte von $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, für welche die Gleichungen

$$12) \qquad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0$$

gleichzeitig bestehen.

Dies ist der Fall, den wir noch zu besprechen haben. Wenn es auf der Kurve $u = 0$ Punkte giebt, für welche $u_2 = 0$ und gleichzeitig $u_1 = 0$ ist, so ist für solch einen Punkt vermöge der Gleichung

$$u_1 x + u_2 y + u_3 z = nu$$

auch $u_3 = 0$. Diese besonderen Punkte, für welche d^2y' im allgemeinen nicht null zu sein braucht, werden ebenfalls von der Kurve $H(u) = 0$ ausgeschnitten.

175. Nehmen wir an, dass die gegebene Kurve algebraisch und u eine ganze homogene abgebraische Funktion von ganzzahliger und positiver Ordnung n ist; die Gleichung 6) wird vom Grade $3n - 4$, während die Gleichung 11) nur vom Grade $3(n-2) = 3n - 6$ ist. Wenn man die imaginären Lösungen, welche zwei Gleichungen besitzen können, als Darstellung für einen imaginären Schnittpunkt der beiden durch diese Gleichungen gegebenen Kurven betrachtet, so kann man folgenden, zuerst von Hesse gegebenen Satz aussprechen:

Lehrsatz I. *Die Wendepunkte einer algebraischen Kurve von der Ordnung* n *werden durch eine zweite algebraische Kurve von der Ordnung* $3(n-2)$ *ausgeschnitten.*

Wenn nun die Koeffizienten in der Gleichung der Kurve $u = 0$ ganz allgemein bleiben, derart, dass zwischen ihnen keinerlei Relationen existieren, so können auch die Gleichungen 12) des vorigen Paragraphen keine gemeinsame Lösung besitzen. Folglich werden sämtliche Schnittpunkte der Kurven 1) und 11) Wendepunkte der Kurve u. Andererseits weiss man,

dass nach dem Bezoutschen Satze die Elimination einer der Variabelen zwischen den Gleichungen 1) und 11) auf eine Endgleichung führt, deren Ordnung gleich dem Produkte aus den Ordnungen der beiden Gleichungen ist; man hat also den

Lehrsatz II. *Eine algebraische Kurve von der Ordnung* n *mit allgemeinen Koeffizienten hat* 3 n (n — 2) *Wendepunkte.*

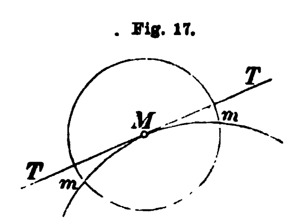
Insbesonders erkennt man, dass die Kurven zweiter Ordnung keine Wendepunkte haben, was bekannt ist, und dass eine Kurve dritten Grades im allgemeinen neun reelle oder imaginäre Wendepunkte besitzt.

Die Identität 9), in welcher $u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2$ vom Grade $3n-4$ und $H(u)$ vom Grade $3n-6$ ist, lehrt, dass die Kurve $u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2 = 0$ auf $u = 0$ nicht nur die $3n-6$ Wendepunkte ausschneidet, sondern auch diejenigen $2n$ Punkte, in denen $z^2 = 0$ die Kurve schneidet. Dies sind die n unendlich fernen Punkte der Kurve, ein jeder doppelt gezählt.

Die singulären Punkte ebener Kurven.

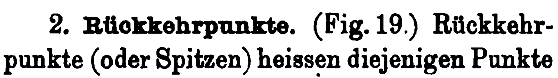
176. (Fig. 17.) In einem Punkte M einer ebenen Kurve konstruieren wir die Tangente TT' und umgeben den Punkt mit einer geschlossenen, nach dem Punkte hin konkaven Linie, welche unendlich klein wird. Als solch eine Linie können wir insbesonders die Peripherie eines Kreises mit dem Punkte M als Centrum wählen, dessen Radius unendlich klein wird. Im allgemeinen wird dieser Kreis die Kurve nur in zwei Punkten m und m' schneiden, und die Radien Mm, Mm' werden mit den Richtungen MT und MT' bezüglich Winkel bilden, die unendlich klein werden; der Winkel zwischen diesen Radien wird folglich unendlich wenig von zwei rechten sich unterscheiden. Wenn diese beiden Umstände nicht zugleich vorliegen, so heisst der Punkt M ein *singulärer* Punkt. Wir wollen die verschiedenen Arten von singulären Punkten aufzählen, welche auftreten können.

Fig. 17.



1. **Vielfache Punkte.** (Fig. 18.) Man nennt einen Punkt einen *vielfachen*, wenn mehrere Zweige der Kurve durch ihn hindurchgehen, mögen sich dieselben unter einander berühren oder nicht. Der Kreis, welcher aus einem vielfachen Punkte als Mittelpunkt beschrieben ist, mit einem Radius, der unendlich klein wird, schneidet die Kurve in mehr als zwei Punkten.

Fig. 18.



2. **Rückkehrpunkte.** (Fig. 19.) Rückkehrpunkte (oder Spitzen) heissen diejenigen Punkte einer Kurve, in welchen zwei Zweige der Kurven endigen und dabei eine gemeinsame Tangente haben. Der Kreis, welcher aus einem Rückkehrpunkt als Centrum mit einem unendlich kleinen Radius beschrieben wird, schneidet die Kurve nur in zwei Punkten; aber die Radien, welche zu diesen beiden Punkten führen, bilden mit einander einen Winkel, der unendlich klein wird.

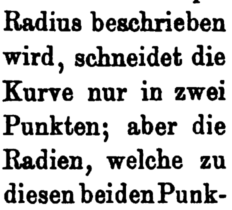
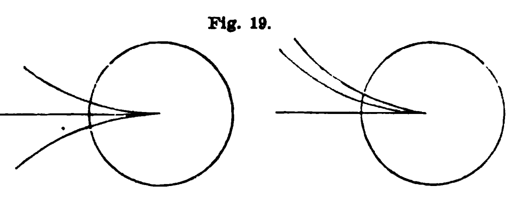


Fig. 19.



Man unterscheidet Rückkehrpunkte von zweierlei Art. Der Rückkehrpunkt heisst von der *ersten Art*, wenn die beiden Kurvenzweige auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente sich befinden, dagegen von der *zweiten Art*, wenn sie auf der nämlichen Seite der Tangente liegen.

3. **Isolierte Punkte.** Isolierte Punkte heissen diejenigen, in deren Umgebung kein anderer Punkt der Kurve liegt. Der aus einem isolierten Punkt als Centrum beschriebene Kreis mit unendlich kleinem Radius schneidet die Kurve in keinem Punkte.

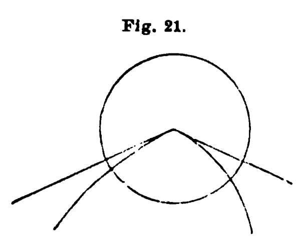
Fig. 20.

4. **Endpunkt.** (Fig. 20.) Ein Endpunkt ist ein Punkt, in welchem ein einziger Zweig der Kurve plötzlich abbricht. Der Kreis, welcher mit einem unendlich kleinen Radius aus solch einem Endpunkte als Centrum beschrieben ist, schneidet die Kurve nur in einem Punkt.



V. Eckpunkt. (Fig. 21.) In einem Eckpunkte endigen zwei Zweige der Kurve, welche in diesem Punkte verschiedene Tangenten haben. Der Kreis, beschrieben aus solch einem Eckpunkte als Centrum, mit unendlich kleinem Radius schneidet die Kurve in zwei Punkten; aber die Radien, welche durch diese Punkte gehen, bilden einen Winkel, der sich von zwei rechten oder von null um eine endliche Grösse unterscheidet.

Fig. 21.



Wir geben hier ein Beispiel für jede dieser fünf Arten von singulären Punkten. Übrigens ist zu beachten, dass diese Betrachtung sich nur auf die geometrisch direkt darstellbaren Singularitäten bezieht, also analytisch gesprochen, auf reelle Besonderheiten der gegebenen Gleichungen, nicht auf imaginäre, und dass auch in einem Punkte mehrere Singularitäten der betrachteten Art vereinigt sein können.

177. Beispiel eines Doppelpunktes oder eines isolierten Punktes. Die Kurvengleichung sei

$$y = \varphi(x) + (x - a)\left(\frac{x - b}{c}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

$\varphi(x)$ bezeichne eine reelle *reguläre analytische* Funktion. Reguläre analytische Funktion nennen wir eine solche, welche innerhalb eines gegebenen Intervalles endlich und stetig bleibt, und deren Ableitungen ebenfalls, wie viele man auch bilden mag, endlich und stetig sind. a, b, c seien positive gegebene Längen; endlich $\frac{p}{q}$ ein irreduzibeler Bruch, dessen Nenner eine gerade Zahl ist.

Da der Faktor $\left(\frac{x - b}{c}\right)^{\frac{p}{q}}$ zwei gleiche Werte mit entgegengesetztem Vorzeichen hat, so besteht die betrachtete Kurve aus zwei Zweigen, mit den Gleichungen:

$$y = \varphi(x) + (x - a)\left(\frac{x - b}{c}\right)^{\frac{p}{q}},$$

$$y = \varphi(x) - (x - a)\left(\frac{x - b}{c}\right)^{\frac{p}{q}},$$

wobei man den Ausdruck $\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}}$ positiv zu nehmen hat. Die Werte von $\frac{dy}{dx}$ für diese beiden Zweige sind gegeben durch die Formel:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \pm \left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}} \pm \frac{p}{q}\,\frac{x-a}{c}\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}-1},$$

und für $x = a$ hat man

$$y = \varphi(a), \quad \frac{dy}{dx} = \varphi'(a) \pm \left(\frac{a-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Nehmen wir nun $a > b$ an. In diesem Falle vereinigen sich die beiden Zweige der Kurve in einem Punkte mit der Abscisse a, aber sie brechen in diesem Punkte nicht plötzlich ab, weil jeder von ihnen reell bleibt, wenn man $x = a \pm h$ setzt.

Ferner haben diese Zweige im Punkte $x = a$, $y = \varphi(a)$ verschiedene Tangenten. Man sieht also, dass dieser Punkt ein Doppelpunkt ist.

Ist aber $a < b$, so ist der obige Wert für $\frac{dy}{dx}$ imaginär; es giebt also keine Tangente in dem Punkte mit der Abscisse a. Der Wert von y wird auf jedem Zweig der Kurve imaginär, für $x = a \pm h$, und folglich ist der Punkt mit den Koordinaten $x = a$, $y = \varphi(a)$ ein isolierter Punkt.

178. **Beispiel eines Rückkehrpunktes erster oder zweiter Art.** Wir betrachten die Kurve, deren Gleichung

$$y = \varphi(x) \pm \psi(x)(x-a)^{\frac{p}{q}}$$

ist; $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ seien reelle reguläre Funktionen, a eine gegebene Konstante, $\frac{p}{q}$ ein irreduzibeler positiver Bruch, grösser als 1, mit geradem Nenner. Wie im vorigen Beispiel ist die Kurve als aus zwei Zweigen bestehend zu betrachten, welche bezüglich den Zeichen $+$ und $-$ entsprechen.

Die beiden Werte von y sind reell und ungleich für $x > a$, sie werden gleich für $x = a$, und beide imaginär für $x < a$. Demnach endigen die beiden Zweige der Kurve im Punkte mit der Abscisse a.

Der Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ ist:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \pm (x-a)^{\frac{p}{q}} \psi'(x) \pm \frac{p}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1} \psi(x);$$

er reduziert sich, da $\frac{p}{q} > 1$, für $x = a$ auf den einen Wert $\varphi'(a)$. Die beiden Zweige der Kurve haben also in dem gemeinsamen Punkte dieselbe Tangente; dieser ist also ein Rückkehrpunkt.

Es ist nach § 168 einleuchtend, dass der Rückkehrpunkt von der ersten oder zweiten Art sein wird, je nachdem die Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$, welche den beiden Zweigen der Kurve entsprechen, für $x = a + h$ von ungleichem oder gleichem Zeichen werden, wenn h unendlich klein wird. Der Ausdruck von $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist aber:

$$\frac{d^2y}{dx_2} = \varphi''(x) \pm (x-a)^{\frac{p}{q}} \psi''(x) \pm 2\frac{p}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1} \psi'(x) \pm \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)(x-a)^{\frac{p}{q}-2} \psi(x).$$

Ist $\frac{p}{q} > 2$, so unterscheiden sich die beiden Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich wenig von $\varphi''(a)$, für $x = a + h$. Wenn also $\varphi''(a)$ nicht null ist, so ist der Rückkehrpunkt von der zweiten Art. Dieser Schluss gilt aber auch noch, falls $\varphi''(a) = 0$ wird, wenn nur die Ordnung des Unendlichkleinwerdens von $\varphi''(a+h)$ geringer ist als $\frac{p}{q} - 2$.

Ist $\frac{p}{q} < 2$, so werden die beiden Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = a$ unendlich und es ist leicht zu sehen, dass sie für $x = a + h$ von entgegengesetztem Zeichen sind. Also ist der Rückkehrpunkt von der ersten Art.

Die durch die Gleichungen

$$y = x + \sqrt{x^3}, \quad y = x^2 + \sqrt{x^5}$$

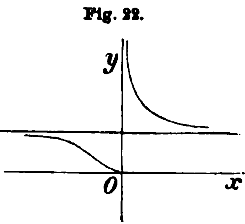
dargestellten Kurven gehören zu der betrachteten Gruppe. Der Anfangspunkt der Koordinaten ist ein Rückkehrpunkt erster Art für die erste Kurve, dagegen ein Rückkehrpunkt zweiter Art für die andere.

179. Beispiel eines Endpunktes. (Fig. 22.) Die Kurve

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

bietet das Beispiel eines Endpunktes im Punkte $x = 0$. Lässt man x von 0 bis $+\infty$ wachsen, so nimmt die Ordinate y von $+\infty$ bis $+1$ ab, und man hat einen Zweig der Kurve innerhalb des positiven Quadranten der Koordinatenaxen. Dieser Zweig hat die y-Axe zur Asymptote, desgleichen eine Parallele zur x-Axe mit der Ordinate $y = 1$. Lässt man x von 0 bis $-\infty$ abnehmen, so wächst der Wert von y von 0 bis $+1$, und man erhält demnach einen zweiten Zweig der Kurve, welcher im Koordinatenanfangspunkt plötzlich endet.

Fig. 22.

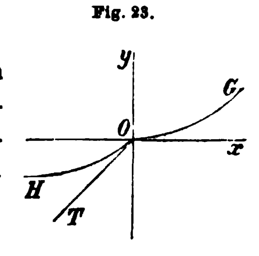


Auch ist zu bemerken, dass die Funktion y unstetig wird, wenn x von $-h$ bis $+h$ variiert und h unendlich klein wird. Sie geht plötzlich von einem unendlich kleinen Werte zu einem unendlich grossen Werte über und hat für $x = 0$ die beiden Grenzwerte 0 und ∞.

180. Beispiel eines Eckpunktes. (Fig. 23.) Die Kurve

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

Fig. 23.



bietet ein Beispiel für einen Eckpunkt im Koordinatenanfangspunkte. Um die Tangente im Anfangspunkte zu erhalten, genügt es (§ 163), die Grenze des Verhältnisses

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

für $x = 0$ zu bestimmen. Wenn aber x nach 0 konvergiert, so konvergiert $e^{\frac{1}{x}}$ nach ∞ oder nach 0, je nachdem x positiv oder negativ ist. Man hat also im Anfangspunkte zwei Tangenten, deren Richtungskoeffizienten bezüglich 0 und 1 sind. Die Kurve setzt sich demnach aus zwei Zweigen zusammen; der eine, OG, liegt innerhalb des positiven Quadranten,

und berührt im Anfangspunkte die Abscissenaxe, der andere OH liegt im Quadranten mit negativen Koordinaten und hat im Anfangspunkte die winkelhalbierende OT zur Tangente. Dieser Punkt ist also ein Eckpunkt der Kurve.

Die analytischen Charaktere der singulären Punkte.

181. Wir wollen nun einen allgemeinen Satz aufstellen, der eine ausgedehnte Klasse von Kurven, zumal die algebraischen, umfasst und eine Bedingung erkennen lässt, die allen singulären Punkten dieser Kurven gemeinsam ist.

Lehrsatz. *Es sei* $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *eine Funktion der Variabelen* x, y, *welche nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung bestimmte, sich stetig ändernde Werte erhält (§ 32), wenn man den Variabelen* x *und* y *bestimmte Werte beilegt. Bezeichnen alsdann* x_0, y_0 *die geradlinigen Koordinaten eines singulären Punktes der Kurve, welche durch die Gleichung*

$$1) \qquad \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$$

dargestellt ist, so haben die Gleichungen:

$$2) \qquad \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} = 0$$

immer die Lösung $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$, $\mathrm{y} = \mathrm{y}_0$.

Bezeichnen wir mit x_0, y_0 die Koordinaten eines beliebigen Punktes M der Kurve, und mit θ den Koordinatenwinkel, beschreiben wir ferner um den Punkt M als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius ϱ, der unendlich klein wird, und nennen wir $x_0 + h$, $y_0 + k$ die Koordinaten eines Punktes m auf diesem Kreise. Es ist

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

und die Bedingung, dass der Punkt m der Kurve angehört, wird

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = 0 \text{ oder } f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 y_0) = 0.$$

Nach der Taylorschen Formel wird diese Gleichung

$$3) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\vartheta h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_\vartheta k = 0.$$

Der Index ϑ soll ausdrücken, dass die Werte von x und y in den partiellen Ableitungen bezüglich durch Werte $x+\vartheta h$, $y+\vartheta k$ zu ersetzen sind, die zwischen x und $x+h$, y und $y+k$ liegen.

Ist w der Winkel, den der Radius $Mm=\varrho$ mit der x-Axe bildet, so ist

$$4)\qquad h=\varrho\,\frac{\sin(\theta-w)}{\sin\theta},\quad k=\varrho\,\frac{\sin w}{\sin\theta},$$

und die Gleichung 3) ergiebt durch ϱ dividiert:

$$5)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\vartheta\frac{\sin(\theta-w)}{\sin\theta}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_\vartheta\frac{\sin w}{\sin\theta}=0.$$

Wenn nun $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ nicht zugleich null sind, so kann man eine positive Grösse M und einen Winkel α bestimmen, so dass

$$6)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=-\mathsf{M}\sin\alpha,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=+\mathsf{M}\sin(\theta-\alpha)$$

wird; denn es sind M und α nichts anderes als die Polarkoordinaten eines Punktes, der die geradlinigen Koordinaten $\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ und $-\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ hat. Vermittelst dieser Formeln 6) wird nun, da $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetige Funktionen sind, wenn man

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\vartheta=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\varepsilon,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial}\right)_\vartheta=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0+\eta$$

setzt:

$$-\mathsf{M}\,\frac{\sin(\theta-w)}{\sin\theta}\sin\alpha+\varepsilon\,\frac{\sin(\theta-w)}{\sin\theta}+\mathsf{M}\,\frac{\sin w\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}+\eta\,\frac{\sin w}{\sin\theta}=0,$$

oder

$$7)\qquad \mathsf{M}\sin(w-\alpha)+\varepsilon\,\frac{\sin(\theta-w)}{\sin\theta}+\eta\,\frac{\sin w}{\sin\theta}=0.$$

Die Werte von w, welche dieser Gleichung genügen, gehören zu den Schnittpunkten der Kurve und des Kreises. Da die Vermehrung von w um Vielfache von 2π für die geometrische Bestimmung dieser Schnittpunkte nicht in Betracht kommt, so erkennt man, dass diese Gleichung, in welcher M einen festen endlichen, ε und η beliebig kleine Werte haben, nur durch solch einen reellen Wert w erfüllt werden kann,

der entweder beliebig nahe an α, oder beliebig nahe an $\pi + \alpha$ liegt. Um also die Zahl der Wurzeln w zu bestimmen, welche die Gleichung 7) befriedigen, genügt es zu untersuchen, wie die linke Seite derselben:

$$8) \qquad \mathsf{M} \sin(w - \alpha) + \varepsilon \frac{\sin(\theta - w)}{\sin \theta} + \eta \frac{\sin w}{\sin \theta}$$

sich ändert, wenn w von $\alpha - \delta$ bis $\alpha + \delta$, oder von $\pi + \alpha - \delta$ bis $\pi + \alpha + \delta$ variiert, wobei δ beliebig klein gewählt werden kann.

Die Gleichung

$$\varrho \left[\varepsilon \frac{\sin \theta - w}{\sin \theta} + \eta \frac{\sin w}{\sin \theta} \right] = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)] - \left[h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + k \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \right]$$

lehrt, dass nicht nur die Funktion

$$\varepsilon \frac{\sin(\theta - w)}{\sin \theta} + \eta \frac{\sin w}{\sin \theta} = \frac{1}{\varrho} \left\{ [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)] - \left[h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + k \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \right] \right\}$$

null wird, wenn ϱ nach 0 konvergiert, welchen Wert auch w haben mag, sondern dass auch

$$\frac{d}{dw} \left[\varepsilon \frac{\sin(\theta - w)}{\sin \theta} + \eta \frac{\sin w}{\sin \theta} \right]$$

$$= \frac{1}{\varrho} \left\{ \left[\frac{\partial f(x_0 + h, y_0 + k)}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \right] \frac{dh}{dw} + \left[\frac{\partial f(x_0 + h, y_0 + k)}{\partial y_0} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \right] \frac{dk}{dw} \right\}$$

null wird bei allen Werten von w, wenn ϱ verschwindet. Denn es wird die rechte Seite auch gleich:

$$- \frac{\cos(\theta - w)}{\sin \theta} \left\{ \frac{\partial f(x_0 + h, y_0 + k)}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \right\} + \frac{\cos w}{\sin \theta} \left\{ \frac{\partial f(x_0 + h, y_0 + k)}{\partial y_0} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \right\}.$$

Die in den Klammern enthaltenen Differenzen können lediglich durch Wahl von ϱ kleiner als eine beliebig kleine Grösse gemacht werden, welchen Wert auch w annehmen mag. Dies festgesetzt, wird die Ableitung des Ausdruckes 8) nach w gleich

$$\mathsf{M} \cos(w - \alpha) + \frac{d}{dw} \left[\varepsilon \frac{\sin(\theta - w)}{\sin \theta} + \eta \frac{\sin w}{\sin \theta} \right],$$

und dieselbe differiert beliebig wenig von $+ \mathsf{M}$ oder von $- \mathsf{M}$, wenn die Differenz $w - \alpha$ hinreichend wenig von 0 oder von $+ \pi$ abweicht. Also ist die Funktion 8) eine wachsende, wenn w von $\alpha - \varepsilon$ bis $\alpha + \varepsilon$ wächst, und eine abnehmende, wenn w

von $\pi + \alpha - \varepsilon$ bis $\pi + \alpha + \varepsilon$ wächst. Andererseits ändert die Funktion in beiden Fällen ihr Zeichen, folglich wird sie zwischen diesen Grenzen jedesmal einmal null.

Damit ist bewiesen: wenn die Gleichungen 2) nicht die gemeinsamen Lösungen $x = x_0$, $y = y_0$ besitzen, so hat die Gleichung 7) zwei Wurzeln w, von denen die eine unendlich wenig von α, die andere unendlich wenig von $\pi + \alpha$ differiert, und andere Wurzeln sind nicht vorhanden. Folglich schneidet der Kreis, beschrieben aus dem Punkte $M(x_0, y_0)$ als Mittelpunkt mit dem Radius ϱ, die Kurve nur in zwei Punkten m und m', und die Radien Mm und Mm' bilden unendlich kleine Winkel, der eine mit der einen Richtung der Tangente in M, der andere mit der entgegengesetzten. Hieraus folgt, dass der Punkt M kein singulärer Punkt sein kann, wie die Behauptung besagt.

Bemerkung. Führt man das System homogener Koordinaten ein, so annullieren die Koordinaten $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ eines singulären Punktes der Kurve, welche durch die Gleichung

$$u = f(x, y, z) = 0$$

dargestellt ist, die drei partiellen Ableitungen erster Ordnung, u_1, u_2, u_3; denn die Gleichungen $u = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ ziehen auch die Gleichung $u_3 = 0$ nach sich. Hieraus folgt, dass die Determinante der Funktion u (§ 175) für jeden singulären Punkt verschwindet.

Untersuchung über die Art eines singulären Punktes.

182. Nach dem Vorigen müssen die singulären Punkte der Kurve

$$1) \qquad f(x, y) = 0$$

den beiden Gleichungen genügen:

$$2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Im folgenden werden wir annehmen, dass alle die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y)$, welche wir benutzen werden, stetig bleiben. Es seien nun x_0, y_0 die Koordinaten eines Punktes M der Kurve 1), welche gleichzeitig den beiden Gleichungen 2) genügen, für welche aber nicht sämtliche drei Gleichungen

$$3)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

bestehen. Sind dann, wie vorhin, $x_0 + h$, $y_0 + k$ die Koordinaten eines Punktes m des um den Punkt M als Centrum beschriebenen Kreises mit dem unendlich kleinen Radius ϱ, so ist die Bedingung, dass dieser Punkt auf der Kurve liegt:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = 0.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach der Taylorschen Reihe, und unterdrückt die Glieder, welche der Annahme nach null sind, so wird diese Bedingung:

$$4)\quad \frac{1}{2}\left[h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2hk\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 + k^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right] + R_3 = 0.$$

R_3 bedeutet eine Grösse, die von höherer Ordnung als h^2 und k^2 verschwindet; wir wollen sie, was übrigens nicht notwendig ist, in der Form des Restgliedes der Taylorschen Entwickelung voraussetzen.

Ist nun

$$5)\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2 > 0,$$

so wird der Ausdruck zwischen den Klammern in der Gleichung 4) niemals null, bei reellen Werten von h und k, und da sein absoluter Wert grösser ist als der von R_3, wenn h und k hinreichend klein gewählt sind, so wird der Gleichung 4) überhaupt nicht durch reelle Werte von h und k genügt werden können. Hieraus folgt, dass der Kreis vom Radius ϱ die Kurve nicht schneidet, und folglich ist M ein *isolierter Punkt.*

183. Wenn die Ungleichung 5) nicht stattfindet, so sind die beiden Wurzeln der Gleichung

$$6)\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0 t + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 t^2 = 0$$

reell; sie können durch

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\beta}{\sin(\theta - \beta)}$$

dargestellt werden, wenn θ immer den Koordinatenwinkel, α und β Winkel zwischen 0 und π bezeichnen. Man kann also die Gleichung 4) in der Form:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \left[k - h\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}\right]\left[k - h\frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)}\right] + R_3 = 0$$

darstellen. Wir wollen h und k durch ihre Werte $\varrho\,\frac{\sin(\theta - w)}{\sin\theta}$ und $\varrho\,\frac{\sin w}{\sin\theta}$ ersetzen, die wir bereits früher angewandt haben; ferner schreiben wir, der Kürze wegen:

$$\sqrt{\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 - 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0\cos\theta + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right]^2 + 4\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right]\sin^2\theta} = 2\,\mathsf{M}\sin^2\theta,$$

indem wir festsetzen, dass die Wurzel mit dem Zeichen des Produktes $\sin(\theta - \alpha)\sin(\theta - \beta)$ genommen werden soll. Die Gleichung 4) wird dann, dividiert durch ϱ^2:

$$7)\qquad \mathsf{M}\sin(w - \alpha)\sin(w - \beta) + \frac{R_3}{\varrho^2} = 0.$$

Denn es bekommt durch die angegebene Substitution die Gleichung 4) die Form:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \frac{\sin(w-\alpha)\sin(w-\beta)}{\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)} + \frac{R_3}{\varrho^2} = 0.$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)} = t_1,\quad \frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\alpha)} = t_2,$$

wobei t_1 und t_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung 6) bezeichnen, folgt

$$\sin^2(\theta-\alpha) = \frac{\sin^2\theta}{t_1^2 + 2\,t_1\cos\theta + 1},\quad \sin^2(\theta-\beta) = \frac{\sin^2\theta}{t_2^2 + 2\,t_2\cos\theta + 1},$$

und hieraus ergiebt sich durch einfache Rechnung die Relation 7), in welcher $\frac{R_3}{\varrho^2}$ mit ϱ verschwindet.

Nehmen wir zuerst an, dass die Wurzeln der Gleichung 6) ungleich sind; dann ist

$$8)\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0^2 < 0,$$

und die Winkel α und β sind weder unter einander gleich, noch auch supplementär. Die Gleichung 7) kann nur durch solche Werte von w erfüllt werden, welche einem der Winkel

α, $\pi + \alpha$, β, $\pi + \beta$ unendlich benachbart werden. Andererseits ändert, wenn man einen dieser Winkel mit w_0, und mit ε eine beliebig kleine positive Grösse bezeichnet, die linke Seite der Gleichung 7) ihr Zeichen, sobald man w von $w_0 - \varepsilon$ bis $w_0 + \varepsilon$ wachsen lässt; es liegt also mindestens eine Wurzel in jedem dieser Intervalle; aber auch nur eine einzige. Denn die Ableitung der Gleichung 7) nach w ist:

$$\mathsf{M}\,[\cos(w-\alpha)\sin(w-\beta) + \sin(w-\alpha)\cos(w-\beta)] + \frac{d\,\dfrac{R_3}{\varrho^2}}{dw}.$$

R_3 ist gleich

$$f(x_0 + h, y + k) - \frac{1}{2}\left[h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2hk\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + k^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right]$$

und es wird daher nicht nur $\frac{R_3}{\varrho^2}$, sondern auch

$$\frac{d\,\dfrac{R_3}{\varrho^2}}{dw} = \frac{1}{\varrho^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{h,k}\frac{dh}{dw} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{h,k}\frac{dk}{dw}\right]$$

$$-\frac{1}{\varrho^2}\left[h\frac{dh}{dw}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + \left(h\frac{dk}{dw} + k\frac{dh}{dw}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + k\frac{dk}{dw}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right]$$

$$= \frac{1}{\varrho^2}\left[h\frac{dh}{dw}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\vartheta - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0\right\} + \left(h\frac{dh}{dw} + k\frac{dk}{dw}\right)\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_\vartheta - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0\right\}\right.$$

$$\left. + k\frac{dk}{dw}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_\vartheta - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right\}\right]$$

durch Wahl von ϱ unabhängig von w beliebig klein. Mithin differiert die Ableitung beliebig wenig von

$$\mathsf{M}\sin[2w - (\beta + \alpha)],$$

d. h. wenn $w = \alpha \pm \varepsilon$, oder $\pi + \alpha \pm \varepsilon$ ist, beliebig wenig von

$$\mathsf{M}\sin(\alpha \pm 2\varepsilon - \beta),$$

und wenn $w = \beta \pm \varepsilon$, oder $\pi + \beta \pm \varepsilon$ ist, beliebig wenig von

$$\mathsf{M}\sin(\beta \pm 2\varepsilon - \alpha).$$

Da R_3 infolge unserer Annahmen eine stetige Funktion von w ist, so können wir schliessen, dass die linke Seite der Gleichung 7) eine beständig wachsende, oder beständig abnehmende Grösse im Intervalle von $w_0 - \varepsilon$ bis $w_0 + \varepsilon$ ist.

Folglich hat diese Gleichung nur vier Wurzeln, deren Werte unendlich wenig von den Winkeln α, $\pi+\alpha$, β, $\pi+\beta$ differieren.

Der mit dem Punkte M als Mittelpunkt mit unendlich kleinem Radius beschriebene Kreis schneidet also die Kurve in vier Punkten, und unter den vier Radien, welche durch diese Punkte gehen, giebt es zwei, welche einen unendlich kleinen Winkel mit der Geraden bilden, die unter dem Winkel α zur x-Axe geneigt ist, während die beiden anderen unendlich kleine Winkel mit der Geraden bilden, welche zum Winkel β gehört. Der Punkt M ist folglich ein *Doppelpunkt.*

184. Nehmen wir nun an, dass die Wurzeln der Gleichung 6) gleich sind. In diesem Falle ist

$$9)\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = 0.$$

Die Winkel α und β werden einander gleich, und die Gleichung 7) lautet:

$$10)\qquad \mathsf{M}\sin^2(w-\alpha) + \frac{R_3}{\varrho^2} = 0$$

und M ist eine positive Grösse. Hier ist es nun nötig, ein weiteres Glied in der Taylorschen Entwickelung hinzuzunehmen. Es ist:

$$11)\ R_3 = \frac{1}{3!}\left[h^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 + 3h^2k\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\right)_0 + 3hk^2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right)_0 + k^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0\right] + R_4.$$

Wenn der Ausdruck in der Klammer nicht null wird für $w=\alpha$ oder $w=\pi+\alpha$, so behält er das positive oder negative Zeichen, wenn x von $\alpha-\varepsilon$ bis $\alpha+\varepsilon$ wächst, während er dann stets das entgegengesetzte Zeichen minus oder plus bewahrt, wenn w von $\pi+\alpha-\varepsilon$ bis $\pi+\alpha+\varepsilon$ variiert. Andererseits ist dieses dann auch das Vorzeichen von R_3, weil ϱ unendlich klein wird. Daraus folgt, dass die Gleichung 10) nur Wurzeln besitzt, welche dem Winkel α oder dem Winkel $\pi+\alpha$ unendlich benachbart sind. Die beiden ersten Ableitungen der linken Seite der Gleichung 10) sind:

$$\mathsf{M}\sin 2(w-\alpha) + \frac{d\,\dfrac{R_3}{\varrho^2}}{dw},\quad 2\,\mathsf{M}\cos 2(w-\alpha) + \frac{d^2\,\dfrac{R_3}{\varrho^2}}{dw^2}.$$

Wenn nun w unendlich wenig von α oder $\pi + \alpha$ abweicht, so unterscheidet sich die zweite Ableitung unendlich wenig von $+2M$. Mithin ist die Ableitung erster Ordnung beständig wachsend und kann daher nur einmal null werden. Hieraus folgt, dass die Gleichung 10) nicht mehr als zwei Wurzeln haben kann; endlich existieren auch diese beiden Wurzeln wirklich, weil R_3 notwendig negativ wird, entweder bei dem Werte $w = \alpha$, oder bei dem Werte $w = \pi + \alpha$.

In dem vorliegenden Falle schneidet also der aus dem Punkte M als Mittelpunkt mit unendlich kleinem Radius beschriebene Kreis die Kurve in zwei Punkten, und die Radien, welche nach diesen Punkten führen, welche zu beiden Seiten der unter dem Winkel α zur x-Axe geneigten Geraden liegen, bilden entweder mit dieser Richtung oder mit der entgegengesetzten unendlich kleine Winkel. Der Punkt M ist also ein *Rückkehrpunkt erster Art.*

185. Es erübrigt noch die Untersuchung des Falles, in welchem der Ausdruck zwischen der Klammer in der Gleichung 11) gleichzeitig mit $\sin(w - \alpha)$ null wird. Auch hier kann, wie vorhin, die Gleichung 10) nur durch solche Werte von w erfüllt werden, die entweder α, oder $\pi + \alpha$ unendlich benachbart sind. Also kann es auch in dem Punkte M der Kurve nur eine einzige Tangente geben, deren Neigung zur x-Axe durch den Wert α bestimmt ist. Um die Art des singulären Punktes M zu erkennen, ist es zweckmässig, die Untersuchung des Kreises mit dem Radius ϱ zu verlassen, und statt dessen zwei zur y-Axe parallele Gerade, in gleichem unendlich kleinen Abstande von M, einzuführen. Wir setzen $k = th$ und führen die Bezeichnungen ein:

$$f_2(t) = \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2t\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + t^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right],$$

$$f_3(t) = \frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 + 3t\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\right)_0 + 3t^2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right)_0 + t^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0\right],$$

$$f_4(t) = \frac{1}{4!}\left[\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 + 4t\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\,\partial y}\right)_0 + 6t^2\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\,\partial y^2}\right)_0 + 4t^3\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial y^3}\right)_0 + t^4\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_0\right]$$

. . . .

Bricht man mit dem fünften Gliede die Entwickelung von

$$f(x_0+h,\ y_0+k)$$

ab, so kann der Rest durch

$$R_5 = h^5\,[f_5(t) + \eta]$$

dargestellt werden, wobei η eine unendlich kleine Grösse bezeichnet. Es wird demnach die Gleichung, welche ausdrückt, dass der Punkt x_0+h, y_0+k der gegebenen Kurve angehört:

$$12)\qquad f_2(t) + h\,f_3(t) + h^2 f_4(t) + h^3\,[f_5(t) + \eta] = 0.$$

In dem betrachteten Falle sind die beiden Wurzeln der Gleichung $f_2(t) = 0$ unter einander gleich, und wenn man ihren Wert mit t_1 bezeichnet, so ist auch $f_3(t_1) = 0$. Nach unserer früheren Bezeichnung ist t_1 dem Quotienten $\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$ gleich, und die reellen Wurzeln, welche die Gleichung 12) bei beliebig kleinem Werte von h besitzt, sind unendlich wenig von t_1 verschieden. Wir setzen

$$13)\qquad t = t_1 + \lambda h,$$

wobei λ eine neue Unbekannte bezeichnet, die wir an Stelle von t einführen. Man hat nun

$$f_2(t) = \frac{\lambda^2 h^2}{2!} f''_2(t_1) + \cdots,$$

$$f_3(t) = \frac{\lambda h}{1} f'_3(t) + \frac{\lambda^2 h^2}{2!} f_3''(t) + \cdots,$$

$$f_4(t) = f_4(t_1) + \frac{\lambda h}{1} f'_4(t_1) + \cdots,$$

$$f_5(t) = f_5(t_1) + \cdots,$$

und setzt man weiter:

$$F(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} f''_2(t_1) + \lambda f'_3(t_1) + f_4(t_1),$$

$$F_1(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} f''_3(t_1) + \lambda f'_4(t_1) + f_5(t_1),$$

so wird die Gleichung 12):

$$14)\qquad F(\lambda) + h\,[F_1(\lambda) + \eta] = 0,$$

wobei η eine neue Grösse bezeichnet, die mit h verschwindet.

Wenn die Wurzeln der Gleichung

$$15)\qquad F(\lambda) = 0$$

imaginär sind, so besitzt die Gleichung 14) keine reellen Wurzeln. Es giebt dann auch keine zum Punkte M benachbarte Kurvenpunkte, und dieser Punkt ist ein *isolierter Punkt.*

Sind die Wurzeln der Gleichung 15) reell und ungleich, und bezeichnet man dieselben mit λ' und λ'', so ist ersichtlich, dass die linke Seite der Gleichung 14) ihr Zeichen wechselt, was auch das Vorzeichen von h sein mag, wenn man λ in der Umgebung der Werte λ' oder λ'' variieren lässt. Die Gleichung 14) hat also zwei reelle Wurzeln λ'_1 und λ''_1, und ebenso hat sie zwei andere λ'_2 und λ''_2, wenn man $-h$ an Stelle von h einsetzt. Hieraus folgt, dass vier Kurvenpunkte existieren, für welche gemäss den Gleichungen 13)

$$k = t_1 h + \lambda'_1 h^2, \qquad k = t_1 h + \lambda''_1 h^2,$$
$$k = -t_1 h + \lambda'_2 h^2, \quad k = -t_1 h + \lambda''_2 h^2.$$

Zwei der vier Radien, welche diese Punkte mit dem Punkt M verbinden, bilden unendlich kleine Winkel mit der einen Richtung derjenigen Geraden, deren Richtungskoeffizient t_1 ist, während die beiden anderen Radien mit der entgegengesetzten Richtung unendlich kleine Winkel einschliessen. Hieraus folgt, dass der Punkt M ein *Doppelpunkt ist, in dem sich zwei Zweige der Kurve mit gemeinsamer Tangente begegnen* (Selbstberührungspunkt).

Sind aber die Wurzeln der Gleichung 15) einander gleich, so bezeichnen wir ihren Wert mit λ', und nehmen dabei an, dass die Gleichung

$$16)\qquad F_1(\lambda) = 0$$

die Wurzel λ' nicht besitzt. Die Gleichung 14) erhält die Form:

$$(\lambda - \lambda')^2 + 2h\,\frac{F_1(\lambda) + \eta}{f''_2(t_1)} = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei reelle Wurzeln λ'_1 und λ'_2, welche unendlich wenig von λ' verschieden sind, wenn das Vorzeichen von h entgegengesetzt dem Vorzeichen von $\dfrac{F_1(\lambda)}{f''_2(t_1)}$

ist. Giebt man aber h das Vorzeichen dieses Ausdruckes, so besitzt die Gleichung keine reellen Wurzeln. Hieraus folgt, dass zwei Punkte der Kurve existieren, für welche

$$k = t_1 h + \lambda'_1 h^2, \quad k = t_1 h + \lambda'_2 h^2$$

ist. Wenn nun λ' nicht null ist, so sind λ'_1 und λ'_2 von gleichem Zeichen; folglich liegen die Radien, die diese Punkte mit M verbinden, auf der nämlichen Seite der Tangente, und bilden mit der einen Richtung derselben unendlich kleine Winkel. Der Punkt M ist also ein *Rückkehrpunkt zweiter Art.*

Diese Schlussfolgerung gilt nicht in dem Falle, dass $\lambda' = 0$ ist; der Rückkehrpunkt wird dann von der ersten Art; sie kann auch unrichtig werden, wenn λ' eine Wurzel der Gleichung 16) ist. Doch ist leicht zu sehen, dass der Punkt M immer ein Doppelpunkt höherer Art oder ein isolierter Punkt ist, wenn er nicht Rückkehrpunkt ist.

186. Es würde noch der Fall zu untersuchen sein, wo die drei partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion $f(x, y)$ gleichzeitig für die Koordinaten x_0, y_0 des Punktes M verschwinden; jedoch beschränke ich mich hier auf die Angabe des wesentlichsten Resultates.

Wenn die Werte x_0, y_0 alle partiellen Ableitungen der Funktion f bis einschliesslich derer der $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung zum Verschwinden bringen, so erhält die Bedingung, dass $x_0 + h$, $y_0 + k$ Koordinaten eines Kurvenpunktes werden, nach den Bezeichnungen von § 183 die Form:

$$\Phi(w) \sin(w - \alpha_1) \sin(w - \alpha_2) \ldots \sin(w - \alpha_i) + \frac{R_{n+1}}{\varrho^n} = 0.$$

$\frac{R_{n+1}}{\varrho^n}$ wird mit ϱ zugleich null, und $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_i$ bezeichnen reelle Winkelgrössen zwischen 0 und 2π, deren Anzahl i entweder gleich n ist, oder von n um eine gerade Zahl unterschieden. Endlich ist $\Phi(w)$ eine Konstante, falls $i = n$ ist, andernfalls eine Funktion von w, welche aber für keinen reellen Wert von w null wird. Hieraus erkennt man, dass wenn $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_i$ ungleiche Winkel sind, der Punkt M für die Kurve ein vielfacher Punkt von der Ordnung i wird, d. h. dass sich i Zweige der Kurve in diesem Punkte schneiden. Mithin besteht für einen n-fachen Punkt mit n reellen Zweigen die

notwendige aber nicht hinreichende Bedingung, dass die partiellen Ableitungen von niederer als der n^{ten} Ordnung sämtlich für die Koordinaten dieses Punktes null sind.

Dabei bilden die Richtungskoeffizienten der Tangenten, die zu den Zweigen der Kurve im Punkte M gehören, den reellen Teil der Wurzeln t der Gleichung

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0 + \frac{n}{1}\, t \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\right)_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\, t^2 \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}\right)_0 + \cdots$$
$$+ \frac{n}{1}\, t^{n-1} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x\, \partial y^{n-1}}\right)_0 + t^n \left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)_0 = 0.$$

Unterdrückt man den Index 0, und schreibt man $\frac{dy}{dx}$ an Stelle von t, so ist die vorstehende Gleichung mit derjenigen identisch, welche man durch n-malige Differentiation aus der Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

gewinnt, da bei dieser, infolge unserer Annahmen, alle Ableitungen $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \cdots$ von höherer als der ersten Ordnung herausfallen.

Dies ist nun die Gleichung, welche jeden der Werte $\frac{dy}{dx}$ bestimmt. Um den entsprechenden Wert von $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu erhalten, muss man die obige Gleichung noch einmal differentiieren u. s. w. Diese Bemerkung dient zur Vervollständigung der allgemeinen Regel, die wir zur Differentiation impliciter Funktionen gegeben haben.

Das Differential der Fläche einer gegebenen Kurve.

187. (Fig. 24.) Wir betrachten eine ebene Kurve bezogen auf zwei Koordinatenaxen, die den Winkel θ bilden; mit u bezeichnen wir die Grösse der Fläche $CAPM$, welche zwischen einem Bogen CM, der Axe x und den Ordinaten CA, MP der Endpunkte des Bogens CM liegt. Wird die Anfangsordinate CA als fest gewählt, und die Ordinate $MP = y$,

Fig. 24.

welche der Abscisse $OP = x$ entspricht, variabel gelassen, so ist die Grösse u der Fläche eine Funktion von x. Es soll das Differential dieser Funktion gefunden werden.

Die Grösse einer ebenen Fläche, welche ganz oder teilweise von einer krummen Linie begrenzt ist, ist zu definieren und zwar als die Grenze, welchem sich die Fläche eines beliebigen der Kurve eingeschriebenen Polygones nähert, wenn die Anzahl der Ecken derart beliebig vermehrt wird, dass die Entfernung je zweier aufeinander folgender Ecken nach null konvergiert. Wir wollen nun beweisen, dass sich bei jeder stetigen, eindeutig auf die Abscissenaxe bezogenen Begrenzungskurve eine Flächenzahl auf diese Weise ergiebt, die ganz unabhängig ist von der Art des Polygones, welches der Kurve eingeschrieben wird, sowie auch von der Art und Weise, wie die Anzahl der Polygonecken vermehrt wird. Es genügt eine viereckige Fläche wie $CMPA$ zu betrachten, weil eine von allen Seiten krummlinig begrenzte Fläche in solche Streifen sich zerlegen lässt.

Wir schicken folgenden Hilfssatz voraus: Bei einer im Intervalle von a bis b stetigen Funktion $f(x)$ lässt sich bekanntlich an jeder Stelle x ein Intervall von der Länge $\pm h$ ausfindig machen, so dass die im Innern oder an den Grenzen dieses Intervalles befindlichen Funktionswerte $f(x \pm \theta h)$ $(0 \leq \theta \leq 1)$ von $f(x)$ um weniger differieren, als eine beliebig kleine vorgegebene Zahl (§ 12). Heisst diese Zahl $\frac{\delta}{2}$, so differieren also die im Innern oder an den Grenzen liegenden Funktionswerte auch unter einander um weniger als δ; der Wert h aber kann dabei noch bei den verschiedenen Werten von x verschieden sein. Es ist nun wichtig, dass sich der Satz auch so aussprechen lässt:

Zu jeder beliebig kleinen Zahl δ lässt sich eine Länge h *ermitteln, so dass bei allen Werten von* x *im Intervalle von* a *bis* b *die Unterschiede der in das Intervall* x — h *oder* x + h *fallenden Funktionswerte gleich oder kleiner werden als δ.*

Dabei ist nur erforderlich, dass $f(x)$ eine überall stetige Funktion im Intervalle von a bis b ist $(a > b)$; an der Anfangsstelle a kommt dann natürlich nur das Intervall $a + h$, an der Endstelle b das Intervall $b - h$ in Betracht.

Man ermittele zunächst an der Stelle a ein möglichst grosses Intervall von a bis $a + h_1 = x_1$, in welchem die Funktionswerte die Ungleichung befriedigen:

$$\text{abs}\,[f(a + \theta h_1) - f(a)] \leq \frac{\delta}{3},$$

sodann an der Stelle x_1 ein Intervall von der Länge h_2, so dass

$$\text{abs}\,[f(x_1 + \theta h_2) - f(x_1)] \leqq \frac{\delta}{3};$$

setzt man nun diesen Prozess weiter fort, indem man an der Stelle $x_1 + h_2 = x_2$ das Intervall h_3, an der Stelle $x_2 + h_3 = x_3$ das Intervall h_4 u. s. w. bestimmt, so ist zunächst zweierlei denkbar; der eine Fall ist der, dass man durch eine endliche Zahl von Prozessen zu einem vorletzten Punkte $x_{n-2} + h_{n-1} = x_{n-1}$ und von diesem zu dem Endpunkte $x = x_{n-1} + h_n$ gelangt. Alsdann hat man eine endliche Anzahl von Werten h, nämlich $h_1, h_2 \ldots, h_n$, und wenn man den kleinsten unter diesen Werten mit h bezeichnet, so genügt diese Intervallgrenze allenthalben der gestellten Forderung. Denn konstruiert man von einem Punkte x das Intervall $x + h$, so liegt dasselbe entweder ganz innerhalb eines der zuerst konstruierten Intervalle, und dann unterscheiden sich auch die zu diesem Intervalle gehörigen Funktionswerte unter einander höchstens um $\frac{2\delta}{3}$, oder wenn ein Punkt $x + \theta h$ im Intervalle von $x_{\mu-1}$ bis x_μ sich befindet, so befindet sich ein anderer $x + \theta_2 h$ im Intervalle von x_μ bis $x_{\mu+1}$.

Es ist aber

$$\text{abs}\,[f(x_\mu) - f(x + \theta_1 h)] \leqq \frac{2\delta}{3},$$

$$\text{abs}\,[f(x + \theta_2 h) - f(x_\mu)] \leqq \frac{\delta}{3},$$

folglich auch

$$\text{abs}\,[f(x + \theta_1 h) - f(x + \theta_2 h)] \leqq \delta.$$

Dasselbe gilt auch, wenn h negativ gewählt wird. Es ist aber auch noch die andere Möglichkeit zu erwägen, nämlich die, dass die Grössen h, indem sie nach 0 konvergieren, in unbegrenzter Anzahl vorhanden sind, und dass also durch die Summe $a + h_1 + h_2 + h_3 + \cdots$ ein mittlerer Punkt x_μ oder auch der Endpunkt b definiert wird. Wenn dieser Fall einträte, so liesse sich, weil eben die Grössen h nach 0 konvergieren, kein endlicher von 0 verschiedener Minimalwert für h ausfindig machen, der allenthalben zur Befriedigung der geforderten Ungleichung ausreicht. Durch die Bedingung der Stetigkeit ist aber dieser Fall ausgeschlossen. Denn angenommen, die Summe $a + h_1 + h_2 + \ldots$ konvergiere bei unendlich abnehmendem Werte von h nach einem Punkte x_μ, so liesse sich von diesem Punkte aus eine endliche Strecke k angeben, so dass die in das Intervall von x_μ bis $x_\mu - k$ fallenden Funktionswerte unter einander, sowie von dem Werte $f(x_\mu)$ höchstens um $\frac{\delta}{3}$ differieren, denn die Stetigkeitsbedingung ist an der Stelle x_μ erfüllt. Da die

Summe $a + h_1 + h_2 + h_3 + \cdots$ den Wert x_μ zur Grenze hat, so liesse sich jedenfalls eine Stelle n ermitteln, so dass $a + h_1 + h_2 + \cdots h_n = \xi$ ein Wert ist, der in dem Intervalle von $x - k$ bis x_μ sich befindet. An dieser Stelle ξ genügt nun jedenfalls die endliche Länge $x_\mu - \xi$, um die geforderte Ungleichung zu erfüllen, und die Annahme, dass

$$f(\xi + \varepsilon) - f(\xi) > \frac{\delta}{3}$$

wird, wenn ε grösser als h_{n+1}, das kleiner als $x_\mu - \xi$ ist, gewählt wird, widerspricht also der Stetigkeitsbedingung.

Damit ist der behauptete Satz bewiesen, den man auch in der kurzen Form ausspricht: Jede innerhalb eines Intervalles stetige Funktion einer Variabelen ist zugleich in diesem Intervalle *gleichmässig* stetig.

Um nun die Existenz einer bestimmten Flächenzahl für $CMPA$ und die Unabhängigkeit derselben von der Art der eingeschriebenen Polygone zu erkennen, kann man folgendermassen verfahren. Man teile die Abscisse AP in Teilstrecken, deren Grösse gleich oder kleiner ist als h, wobei h so gewählt ist, dass die zu solch einem Intervalle gehörigen Funktionswerte höchstens um die Grösse δ variieren. Die Anzahl dieser Teilstrecken sei gleich n, ihre Endpunkte seien durch $a, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, b$ bezeichnet. Sind dann $G_1, G_2 \ldots G_n$ die grössten Werte der Funktion $f(x)$, welche im Innern oder an den Grenzen der einzelnen Intervalle vorkommen, und $g_1, g_2 \ldots g_n$ die kleinsten — wir können dabei annehmen, dass die Funktionswerte im Intervalle von A bis P durchaus positiv sind —, so wird der Flächeninhalt eines der Kurve eingeschriebenen Polygones, dessen Ecken die Abscissen $a, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, b$ haben, kleiner sein als

$$\sin\theta\,[G_1(x_1-a)+G_2(x_2-x_1)+\cdots G_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})+G_n(b-x_{n-1})]$$

und grösser als

$$\sin\theta\,[g_1(x_1-a)+g_2(x_2-x_1)+\cdots g_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})+g_n(b-x_{n-1})].$$

Der Unterschied dieser beiden Grenzen ist aber gleich

$$\sin\theta\,[(G_1-g_1)(x_1-a)+(G_2-g_2)(x_2-x_1)+\cdots(G_n-g_n)(b-x_{n-1})]$$

und da sämtliche Differenzen $G - g$ kleiner sind als die anfänglich fixierte beliebig kleine Grösse δ, so ist der Unterschied dieser beiden Grenzen kleiner als

$$\delta(b-a)\sin\theta.$$

Konstruiert man Polygone mit immer grösserer Eckenzahl, indem man zwischen die eben betrachteten n Ecken noch andere

einschaltet, so liegen alle diese Polygone innerhalb der beiden angegebenen Grenzen, und da die Zahl δ beliebig klein wird, wenn h entsprechend klein gewählt wird, so folgt, dass sich für jedes Polygon eine bestimmte Grenze der Flächenzahl ergiebt, wenn man zwischen zwei Eckpunkte immer wieder neue Eckpunkte einschaltet, so dass je zwei aufeinander folgende Ecken beliebig nahe aneinander rücken.

Diese Grenze ist auch für alle Polygone die nämliche. Denn hat man zwei verschiedene Polygone konstruiert, von denen jedes bereits so geartet ist, dass die Abscissen zweier aufeinanderfolgender Ecken höchstens um die Länge h differieren, so unterscheidet sich die Fläche eines jeden derselben von seinem Grenzwerte um $\delta(b-a)\sin\theta$. Es soll bewiesen werden, dass auch die beiden Polygone von einander höchstens um $2\delta(b-a)\sin\theta$ differieren.

Bestimmt man auf der Kurve CM sowohl die Ecken des Polygones P_1, als auch die des Polygones P_2, die auch teilweise zusammenfallen können, und verbindet man nun die aufeinander folgenden Eckpunkte, so entsteht ein Polygon P_3, und es kann nun der Unterschied zwischen P_3 und P_1, und ebenso zwischen P_3 und P_2 nicht grösser sein als $\delta(b-a)\sin\theta$. Denn die Eckpunkte von P_3 fallen teils auf die Eckpunkte von P_1, teils innerhalb derselben; und ebenso liegt P_3 auch zu P_2. Es ist demnach auch der Unterschied zwischen P_1 und P_2 nicht grösser als $2\delta(b-a)\sin\theta$, oder in Worten: Die Unterschiede aller, der Kurve eingeschriebenen Polygonflächen werden beliebig klein, sobald die Differenz der Abscissen je zweier aufeinander folgender Ecken in jedem Polygone unterhalb einer bestimmten Grösse liegt.

Damit ist die Existenz einer Flächenzahl u vollständig bewiesen.

Die Grösse u ist eine Funktion der Abscisse $OP = x$, wenn der Punkt A fest gewählt ist. Es sei $M'P' = y + \Delta y$ die Ordinate, welche der Abscisse $OP' = x + \Delta x$ entspricht. (Fig. 24, S. 270.) Es sei G der grösste Wert, den die Funktion $f(x)$ im Intervalle von x bis $x + \Delta x$ annimmt, und g der kleinste. Der Zuwachs $\Delta u = MM'P'P$ der Fläche u ist dann kleiner als $G\,\Delta x \sin\theta$, und grösser als $g\,\Delta x\sin\theta$. Man hat also

$$g\,\Delta x\sin\theta < \Delta u < G\,\Delta x\sin\theta,$$

oder

$$g\sin\theta < \frac{\Delta u}{\Delta x} < G\sin\theta.$$

Bezeichnet man also einen zwischen g und G gelegenen mittleren Wert der Funktion $f(x)$ mit

$$f(x+\vartheta\Delta x), \quad (0 \leqq \vartheta \leqq 1);$$

so ist

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = f(x+\vartheta x) \,.\, \sin\theta.$$

Geht man zur Grenze über für $\Delta x = 0$, so wird

$$\frac{du}{dx} = f(x)\sin\theta \quad \text{oder} \quad du = f(x)\,dx\sin\theta = y\,dx\sin\theta.$$

Bei rechtwinkligen Koordinaten reduziert sich diese Gleichung auf

$$du = y\,dx.$$

188. Teilen wir die Abscisse AP in n gleiche oder ungleiche Teile, welche sämtlich unendlich klein werden, wenn n unendlich gross wird, und nennen wir $a, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, b$ die Teilpunkte, $y_0, y_1 \ldots y_n$ die entsprechenden Ordinaten, wobei $y_0 = f(a) = AC$, $y_n = f(b) = MP$ ist, so ist

$$u = \sin\theta \lim[(a-x_1)f\{a+\vartheta_1(x_1-a)\}+(x_2-x_1)f\{x_1+\vartheta_2(x_2-x_2)\} \\ +\cdots(b-x_{n-1})f\{x_{n-1}+\vartheta_n(b-x_{n-1})\}].$$

Nach dem Prinzipe von § 10 kann man dafür auch setzen:

$$u = \sin\theta\lim[(a-x_1)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots(b-x_{n-1})f(x_{n-1})],$$

$$u = \sin\theta\lim[(a-x_1)\,y_0+(x_2-x_1)\,y_1+\cdots(b-x_{n-1})\,y_{n-1}] \\ = \sin\theta\lim\Sigma(x_i-x_{i-1})\,y_{i-1}.$$

Denn die Grössen

$$f(a), \quad f(x_1)\ldots f(x_{n-1})$$

unterscheiden sich von

$$f[a+\vartheta_1(x_1+a)],\; f[x_1+\vartheta_2(x_2-x_1)]+\cdots f[x_{n-1}+\vartheta_n(b-x_{n-1})]$$

bezüglich um Werte

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n,$$

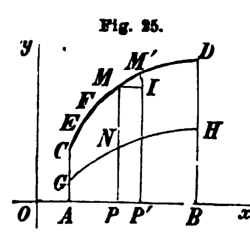
die alle kleiner werden als eine beliebig kleine Zahl δ, wenn die Teilintervalle $x_1 - a_1$, $x_2 - x_1 \ldots b - x_{n-1}$ sämtlich kleiner sind als eine bestimmte Zahl h.

Wie schon im § 10 bemerkt wurde, gilt dieses Resultat auch dann, wenn y beim Übergange vom Punkte C nach M sein Zeichen wechselt, wenn man dabei die Flächenteile, die unterhalb der Abscissenaxe liegen, als negativ betrachtet.

Das Differential der Bogenlänge einer ebenen Kurve.

189. Es sei CD der Bogen einer ebenen Kurve, die wir auf zwei rechtwinklige Koordinatenaxen Ox und Oy bezogen haben. Schreibt man dem Bogen CD eine gebrochene Linie $CEFMM'D$ ein, welche aus n Geraden besteht, und bezeichnet man mit P die Länge dieses Polygones, mit x, y die Koordinaten eines Eckpunktes M und mit $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die Koordinaten des folgenden Eckpunktes M', so ist

Fig. 25.



$$MM' = \sqrt{MI^2 + M'I^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}.$$

Wir nehmen an, dass die Kurve an jeder Stelle eine bestimmte Tangente besitzt und dass die Tangentenrichtung sich stetig ändert; dies besagt, dass $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ im Intervalle von A bis B allenthalben einen bestimmten endlichen Wert besitzt, und dass $f'(x)$ eine stetige Funktion ist. Es ist dann

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x + \vartheta \Delta x), \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

also

$$MM' = \Delta x \sqrt{1 + f'^2(x + \vartheta \Delta x)}.$$

Man kann nun setzen

$$f'(x + \vartheta \Delta x) = f'(x) + \varepsilon,$$

wobei ε eine Grösse bezeichnet, welche mit Δx gleichmässig nach 0 konvergiert, d. h. bei allen Werten von x innerhalb des gegebenen Intervalles kleiner wird als eine beliebig fixierte Grösse δ, wenn Δx unterhalb einer bestimmten Grenze gewählt wird. Aus der Gleichung

$$MM' = \Delta x \sqrt{1 + [f'(x) + \varepsilon]^2}$$

folgt

$$MM' = \Delta x \left[\sqrt{1 + f'(x)^2} + \varepsilon_1\right],$$

wobei ε_1 ebenfalls eine Grösse ist, die gleichmässig, d. h. unabhängig von x, mit Δx nach 0 konvergiert, wie man aus

der Entwickelung des ersten Binomes ohne Schwierigkeit beweist. Diese Formel bezieht sich auf jede Seite des Polygones, wenn man für x und y die Koordinaten der aufeinander folgenden Ecken wählt. Bildet man also die Summe aller Seiten wie MM', so ist die Länge des Polygones:

$$1) \qquad P = \Sigma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx + \Sigma \varepsilon \Delta x.$$

Lässt man nun die Zahl n der Seiten unbegrenzt wachsen und die Länge jeder Seite nach 0 konvergieren, so wird, da $\Sigma \Delta x$ einen endlichen konstanten Wert behält, der gleich der Abscissenlänge AB des Bogens CD ist:

$$2) \qquad \Sigma \varepsilon \Delta x < \delta \cdot AB$$

die Grenze null annehmen. Andererseits bekommt

$$\Sigma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

weil $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ eine stetige Funktion von x ist, einen bestimmten Grenzwert, wie in dem vorigen Paragraphen bewiesen wurde. Denn macht man x zur unabhängigen Variabelen, und konstruiert die Kurve, deren Ordinate Y als Funktion von x durch die Gleichung

$$Y = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

bestimmt ist, so ist, wenn GH das Stück dieser Kurve zwischen den Ordinaten CA und DB ist:

$$3) \qquad \lim \Sigma Y \Delta x = \lim \Sigma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Delta x = S$$

die Flächenzahl $GABH$ für diese Kurve innerhalb der Abscissen OA und OB. Die Gleichung 1) ergiebt also:

$$4) \qquad \lim P = S.$$

Mithin ist bewiesen:

Die Länge eines Polygones, welches dem Bogen einer ebenen Kurve eingeschrieben ist, konvergiert, wenn diese Kurve für das betrachtete Stück stetig verläuft und auch überall eine bestimmte sich stetig ändernde Tangentenrichtung besitzt, nach

einer bestimmten Grenze, wenn alle Seiten des Polygones nach null konvergieren. Diese Grenze ist ganz unabhängig von der Wahl des betrachteten Polygones und von dem Gesetz, nach welchem die Seiten desselben abnehmen; sie heisst die Länge des Bogens CD.

Bezeichnen wir nun mit s die Länge des Bogens CM, wobei wir den Anfangspunkt C fixieren, während der Endpunkt M, welcher zur Abscisse x gehört, variabel ist, so wird s eine Funktion von x sein. Das Differential dieser Funktion ist leicht zu bestimmen. Denn nach dem soeben Bemerkten ist der Bogen s gleich der Fläche $GAPN$, welche zwischen der Kurve GH der x-Axe und den Ordinaten des Punktes C und M enthalten ist. Diese Fläche hat das Differential (§ 187)

$$Y dx \quad \text{oder} \quad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

also ist

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{oder} \quad ds = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

190. Diese Formel liefert den Beweis des Satzes:

Das Verhältnis eines Bogens zu seiner Sehne hat, wenn der Bogen unendlich klein wird, die Grenze eins.

Denn ist der Bogen MM' gleich Δs und die Länge der zugehörigen Sehne MM' gleich c, so ist

$$\frac{\Delta s}{c} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}},$$

und geht man zur Grenze über, so wird

$$\lim \frac{\Delta s}{c} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{ds}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = 1.$$

Diese Eigenschaft kann zur Bestimmung des Bogendifferentiales verwertet werden, wenn statt der rechtwinkligen Koordinaten andere Variabele gewählt sind. Suchen wir z. B. das Differential des Bogens, wenn die Kurve auf schiefwinklige Koordinaten mit dem Winkel θ bezogen ist. Erteilt man

x den Zuwachs Δx, und sind Δy, Δs die entsprechenden Inkremente von y uud s, so hat die Sehne des Bogens Δs den Wert

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + 2\Delta x\, \Delta y \cos\theta + \Delta y^2}.$$

Weil nun das Verhältnis von c zu Δs die Grenze eins hat, so kann man c statt Δs substituieren (§ 8), wenn es sich um die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ handelt. Man hat also

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim \sqrt{1 + 2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cos\theta + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

oder

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + 2\frac{dy}{dx}\cos\theta + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

und

$$ds = \sqrt{dx^2 + 2dx\,dy\cos\theta + dy^2}.$$

191. Die Bogenlänge s, gerechnet von einem willkürlichen aber festen Anfangspunkt, ist eine der Variabelen, welche man bei der Untersuchung der Kurven einzuführen hat. Die Gleichung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

welche sich auf den Fall rechtwinkliger Koordinaten bezieht, lässt das Vorzeichen von ds unbestimmt. Dieses Zeichen ist als positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Bogen s wächst oder abnimmt, wenn die unabhängige Variabele wachsend sich ändert.

Die Benutzung des Differentiales ds liefert einfache Ausdrücke für den Kosinus oder Sinus des Winkels α, den die Tangente der Kurve mit der x-Axe bildet. Dabei ist es jedoch wichtig, den Winkel, um welchen es sich handelt, präcise zu definieren. Wir denken uns im Punkte M der Kurve die Tangente konstruiert und verlegen die x-Axe und die y-Axe vermittelst Parallelverschiebung in diesen Punkt. Wird nun in demselben eine Gerade gedacht, die zunächst mit der positiven Seite der Abscissenaxe zusammenfällt, und alsdann nach der positiven Ordinatenaxe hin bewegt wird, sowie in dem nämlichen Sinne weiter, und ist α der Winkel zwischen 0 und 360°, welcher auf diese Weise beschrieben wird, bis die bewegliche Gerade mit der einen oder anderen der beiden

zur Tangente gehörigen Richtungen zusammenfällt, so ist klar, dass diese Richtung vollkommen bestimmt ist, wenn der Winkel α bekannt ist. Die Richtung α ist aber fixiert durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Ist dieser Quotient positiv, so ist α ein Winkel im ersten oder dritten Quadranten, ist derselbe negativ, im zweiten oder vierten. Aus dieser Formel folgt:

$$\sin \alpha = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos \alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds}.$$

Da nun das Vorzeichen von $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ oder ds zweideutig ist, so geben diese Gleichungen, sowohl die eine wie die andere Richtung nach der Tangente α, je nachdem man das Zeichen + oder − wählt.

Will man dasselbe genauer fixieren, so erhält man folgendes: Wird dx stets als positiv betrachtet, d. h. die Tangente stets im Sinne wachsender Abscissen konstruiert, so ist *erstens*, wenn dy positiv ist, gemäss den Formeln

$$1) \qquad \sin \alpha = + \frac{dy}{ds}, \quad \cos \alpha = + \frac{dx}{ds},$$

α ein Winkel im ersten Quadranten, und gemäss den Formeln

$$2) \qquad \sin \alpha = - \frac{dy}{ds}, \quad \cos \alpha = - \frac{dx}{ds},$$

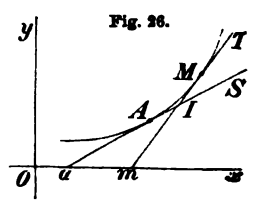
α ein Winkel im dritten Quadranten; *zweitens*, wenn dy negativ ist, gemäss den Formeln 1) ein Winkel im vierten, und gemäss den Formeln 2) ein Winkel im zweiten Quadranten.

Der Radius und der Mittelpunkt der Krümmung in einem Punkte einer ebenen Kurve.

192. Als *absolute Krümmung* des Bogens AM einer ebenen Kurve, die keine Wendepunkte besitzt, bezeichnet man den Winkel SJT, welchen die beiden Tangenten AS und

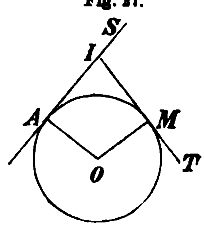
MT, die zu den Endpunkten des Bogens gehören, mit einander bilden. Dieser Winkel ist dabei derjenige, welcher durch eine bewegliche Gerade erzeugt wird, die durch einen festen Punkt geht, und deren aufeinander folgende Lagen den Tangenten parallel werden, die durch die verschiedenen konsecutiven Punkte von AM gehen.

Wird der Endpunkt A des Bogens $AM = s$ festgehalten und das andere Ende M variiert, so ist auch die Krümmung σ variabel, und wächst mit s, solange dieser Bogen keine Wendungen macht. Das Differential $d\sigma$ der Krümmung des Bogens AM heisst der *Kontingenzwinkel* im Punkte M.



Mittlere oder *durchschnittliche* Krümmung des Bogens AM nennt man das Verhältnis $\frac{\sigma}{s}$ der absoluten Krümmung zur Bogenlänge.

Endlich heisst *Krümmungsmass der Kurve in einem Punkte M*, oder auch schlechtweg *Krümmung der Kurve* in diesem Punkte die Grenze, nach welcher die mittlere Krümmung eines Bogens konvergiert, der unendlich klein wird und seinen einen Endpunkt in M hat. Ist also σ die Krümmung des Bogens AM, so ist die Grenze von $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$, wenn Δs nach 0 konvergiert, die Grösse, welche wir die Krümmung der Kurve im Punkte M zu nennen haben. Welches daher auch die als unabhängig betrachtete Variabele sein mag, die Grenze, um die es sich handelt, ist gleich $\frac{d\sigma}{ds}$; die Krümmung einer Kurve in einem Punkte ist also das *Verhältnis des Kontingenzwinkels zum Bogendifferentiale.*



In einem Kreise ist die Krümmung eines Bogens gleich dem Centriwinkel, der zum Bogen gehört, und die mittlere Krümmung oder das Verhältnis des Centriwinkels zum Bogen ist folglich gleich dem reciproken Werte des Radius. Dies Resultat gilt für jeden endlichen Bogen, und daher auch für den Bogen, welcher unendlich

klein wird. Also ist die Krümmung in den verschiedenen Punkten eines Kreises konstant und gleich dem reciproken Werte des Radius.

193. Der Krümmungsradius. *Krümmungsradius* in einem Punkte der Kurve heisst der Radius des Kreises, dessen Krümmung gleich ist derjenigen, welche die Kurve in dem betrachteten Punkte besitzt. Bezeichnet man also mit R die Grösse derselben, so ist

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R} \quad \text{oder} \quad R = \frac{ds}{d\sigma}.$$

Die Werte des Kontingenzwinkels und des Krümmungsradius lassen sich leicht als Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten ausdrücken. Sind α und α_0 die Winkel, welche die Richtungen AS und MT der Tangenten mit der positiven Abscissenaxe bilden, so ist

$$\pm \sigma = \alpha - \alpha_0 \quad \text{oder} \quad \pm d\sigma = d\alpha.$$

Es ist aber

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx},$$

und hieraus folgt durch Differentiation:

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2},$$

oder:

$$1) \qquad \pm d\sigma = d\alpha = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2 + dy^2};$$

andererseits ist

$$\pm ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Man erhält also:

$$2) \qquad R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}.$$

Wir können es unterlassen, das Zeichen $\pm$ vor der rechten Seite der Gleichung zu schreiben, weil das Zeichen des Ausdruckes $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}$ an sich schon unbestimmt ist; dieses Zeichen pflegt man so zu wählen, dass der Wert des Radius R positiv wird.

In den Gleichungen 1) und 2) ist die unabhängige Variabele nicht näher bestimmt; wenn man aber x dazu wählt, so wird

$$3) \qquad \pm\, d\sigma = d\alpha = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

und

$$4) \qquad R = \frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}.$$

194. Es ist leicht zu beweisen, dass der Kreis die einzige stetige Kurve mit konstantem Krümmungsradius ist. Denn für solch eine Kurve hat man

$$ds = a\, d\alpha,$$

wobei a eine Konstante ist. Folglich ergeben die Gleichungen

$$dx = ds \cos\alpha, \qquad dy = ds \sin\alpha,$$

$$dx = a d\alpha \cos\alpha, \qquad dy = a d\alpha \sin\alpha,$$

oder

$$dx = -\, d(a \sin\alpha), \quad dy = d(a \cos\alpha).$$

Bezeichnet man also mit x_0 und y_0 zwei Konstante, so hat man nach dem zweiten Satze in § 15

$$x - x_0 = -\, a \sin\alpha, \quad y - y_0 = a \cos\alpha,$$

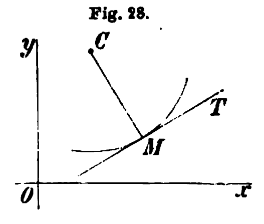
oder

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2,$$

welches die Gleichung eines Kreises mit dem Radius a ist.

195. Der Krümmungsmittelpunkt. Wird die Tangente MT in einem Punkte M der Kurve konstruiert, und der Krümmungskreis derart bestimmt, dass er durch den Punkt M hindurchgeht, dabei die Tangente MT berührt, und zwar auf der nämlichen Seite wie die Kurve, so liegt der Mittelpunkt C dieses Kreises auf der Normalen des Punktes M; er heisst der *Krümmungsmittelpunkt* in Bezug auf diesen Punkt.

Fig. 28.



Lehrsatz. *Der Krümmungsmittelpunkt einer Kurve in einem gegebenen Punkt ist die Grenze des Schnittes der durch diesen Punkt gelegten Normalen mit einer unendlich benachbarten Normalen.*

Es seien x, y die Koordinaten von M in Bezug auf ein rechtwinkliges System. Die Gleichung der Normalen wird

$$1)\qquad (\xi - x) + (\eta - y)\frac{dy}{dx} = 0$$

und wir bezeichnen sie kurz mit $V = 0$. Um die Gleichung der Normalen in einem anderen Punkte M' $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ zu erhalten, muss man in dieser Gleichung x, y, $\frac{dy}{dx}$ durch $x + \Delta x, y + \Delta y, \frac{dy}{dx} + \Delta\frac{dy}{dx}$ ersetzen. Die so gebildete Gleichung stellen wir durch $V + \Delta V = 0$ dar. Der Schnittpunkt dieser beiden Normalen ist dann gegeben durch

$$V = 0, \quad V + \Delta V = 0,$$

oder

$$V = 0, \quad \Delta V = 0,$$

oder endlich

$$V = 0, \quad \frac{\Delta V}{\Delta x} = 0.$$

Nehmen wir nun an, dass der Punkt M' sich unendlich dem Punkte M nähert, so wird der Schnittpunkt der beiden Normalen sich ändern und nach einer bestimmten Grenzlage konvergieren, deren Koordinaten durch die beiden Gleichungen:

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dx} = 0$$

bestimmt sind. Die erste derselben ist die Gleichung 1), die andere ergiebt sich aus ihr durch Differentiation, indem man ξ und η als Konstanten ansieht. Man erhält auf diese Weise

$$2)\qquad \frac{dV}{dx} = -\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] + (\eta - y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt, wenn man die Koordinaten des Punktes C mit x_1, y_1 bezeichnet:

$$3)\qquad x_1 - x = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y_1 - y = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Verbindet man die Gleichungen 3), nachdem man sie ins Quadrat erhoben hat, so erhält man

$$4)\qquad (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = R^2,$$

d. h. die Länge MC ist gleich dem Krümmungsradius R. Ferner lehrt die zweite der Gleichungen 3), dass $y_1 - y$ dasselbe Zeichen hat wie $\frac{d^2y}{dx^2}$; ist aber Y die Ordinate der Tangente MT, welche zur Abscisse $x + \Delta x$ gehört, so hat die Differenz $y + \Delta y - Y$ dasselbe Zeichen wie $\frac{d^2y}{dx^2}$ (§ 166); ferner ist leicht ersichtlich, dass $y_1 - Y$ dasselbe Zeichen hat wie $y_1 - y$; also sind auch $y_1 - Y$ und $y + \Delta y - Y$ von gleichem Zeichen, d. h. der Punkt C liegt auf der nämlichen Seite der Tangente, wie die zu M unendlich benachbarten Kurvenpunkte; also ist der Punkt C der Krümmungsmittelpunkt.

196. Wir wollen *Richtung der Normalen* in einem Kurvenpunkte M die Richtung des Krümmungsradius nennen; es ist das diejenige, in der sich ein beweglicher Punkt bewegen muss, um von M nach C zu gelangen. Sie ist bestimmt, wenn man den Winkel ξ angiebt, den sie mit der positiven Abscissenaxe bildet. Der Winkel ξ kann von 0 bis 360° variieren, und wir denken uns denselben wie bei dem Winkel α (§ 191) erzeugt, indem sich eine bewegliche Gerade, welche anfangs mit der positiven x-Axe zusammenfällt, stets in dem nämlichen Sinne nach der positiven Ordinatenaxe hin dreht. Der Winkel α, welcher in den Gleichungen des § 191 vorkommt, ist erst bestimmt, wenn man das Zeichen von ds fixiert. Diese Unbestimmtheit des Zeichens können wir benutzen, indem wir α derart wählen, dass

$$\xi = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

wird; dann entspricht α einer bestimmten Richtung der Tangente, und die Gleichungen

$$dx = ds \cos\alpha; \quad dy = ds \sin\alpha$$

erfordern, dass der Anfang des Bogens s entsprechend gewählt ist.

Die Cosinus der Winkel, welche die Richtung des Radius $MC = R$ mit den positiven Koordinatenaxen bildet, sind also gleich $-\sin\alpha$ und $+\cos\alpha$, und die Gleichungen 3) des § 195 werden:

$$x_1 - x = -R\sin\alpha, \quad y_1 - y = R\cos\alpha.$$

Das Differential $d\alpha$ hat den Wert (§ 193)

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

und hieraus folgt, dass die linke Seite der zweiten Gleichung 3) in § 195 auch gleich ist $\frac{dx}{d\alpha}$ oder $\frac{ds}{d\alpha}\cos\alpha$. Es ist also

$$y_1 - y = R\cos\alpha = \frac{ds}{d\alpha}\cos\alpha \quad \text{oder} \quad R = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Folglich ergiebt sich aus unseren Annahmen, dass ds und $d\alpha$ von gleichem Zeichen sind und dass $d\alpha$ gleich ist dem Kontingenzwinkel $d\sigma$.

Die Evoluten und Evolventen der ebenen Kurven.

197. Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte zu den verschiedenen Punkten einer ebenen Kurve bildet eine andere Kurve, welche die *Evolute* der ersten heisst. Letztere ist eine *Evolvente* in Bezug auf den Ort der Krümmungsmittelpunkte.

Die Gleichungen 3) des § 195 bestimmen die Koordinaten des Mittelpunktes bei rechtwinkligem Koordinatensysteme, wenn x zur unabhängigen Variabelen gewählt ist; von letzterer Annahme werden sie befreit, wenn man $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$ an Stelle von $\frac{d^2y}{dx^2}$ schreibt. Es wird dann:

$$x_1 - x = -\frac{(dx^2 + dy^2)\,dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

$$y_1 - y = +\frac{(dx^2 + dy^2)\,dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Sind x und y gegebene Funktionen derselben unabhängigen Variabelen, so bekommt man die Gleichung der Evolute,

wenn man diese unabhängige Variabele zwischen den beiden Gleichungen eliminiert.

198. Um die Eigenschaften der Evolute zu untersuchen, wenden wir die im § 196 erhaltenen Formeln an, nämlich

$$1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x - R\sin\alpha, \\ y_1 &= y + R\cos\alpha. \end{aligned}$$

R und α bezeichnen Krümmungsradius und Winkel der fixierten Tangentenrichtung. Die Grössen, welche in diesen Gleichungen vorkommen, sind Funktionen derselben unabhängigen Variabelen, und die Differentiation giebt:

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx - R\cos\alpha\, d\alpha - dR\sin\alpha, \\ dy_1 &= dy - R\sin\alpha\, d\alpha + dR\cos\alpha. \end{aligned}$$

Aber die Terme

$$dx - R\cos\alpha\, d\alpha, \quad dy - R\sin\alpha\, d\alpha$$

sind null zufolge der Gleichungen

$$dx = ds\cos\alpha, \quad dy = ds\sin\alpha, \quad ds = R\, d\alpha;$$

man hat also einfach:

$$2)\qquad dx_1 = -dR\sin\alpha, \quad dy_1 = dR\cos\alpha,$$

und gewinnt aus diesen Gleichungen:

$$3)\qquad \frac{dy_1}{dx_1} = -\operatorname{cotg}\alpha \quad \text{oder} \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

ferner

$$4)\qquad dx_1^2 + dy_1^2 = dR^2.$$

Die Gleichung 3) besagt, *dass die Normalen der gegebenen Kurve die Tangenten der Evolute sind,* und die Gleichung 4), *dass das Differential des Krümmungsradius der gegebenen Kurve gleich dem Differentiale* ds_1 *des Bogens* s_1 *der Evolute ist,* wenn dieser Bogen von einem willkürlichen festen Anfangspunkt bis zu dem betrachteten Krümmungsmittelpunkt gerechnet wird.

Fig. 29.

Rechnen wir den Bogen $C_0 C = s_1$ der Evolute von einem Punkte C_0 an, der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt M_0 der gegebenen Kurve ist, und bezeichnen mit R_0 den Krümmungsradius im Punkte M_0, so giebt die Gleichung 4)

$$ds_1 = dR \quad \text{oder} \quad ds_1 = d(R - R_0).$$

Da die Variabelen s_1 und $R - R_0$ dasselbe Differential haben und gleichzeitig verschwinden, so ist

$$s_1 = R - R_0.$$

Damit ist folgende Eigenschaft ausgedrückt:

Ein beliebiger Bogen auf der Evolute einer ebenen Kurve ist gleich der Differenz zwischen den beiden Krümmungsradien, die zu den Endpunkten dieses Bogens führen.

199. Auf Grund dieser Eigenschaft hat der Ort der Krümmungsmittelpunkte den Namen *Evolute* erhalten. Ist nämlich $M_0 M_1$ ein Bogen der gegebenen Kurve, und $C_0 C_1$ der entsprechende der Evolute, und befestigt man in C_1 das eine Ende eines Fadens von der Länge $M_1 C_1 = R_1$, so wird, wenn sich dieser Faden auf den Bogen $C_1 C_0$ aufgelegt hat und dabei von C_0 ab in der Richtung $C_0 M_0$ gespannt ist, das andere Ende in den Punkt M_0 fallen, gemäss der Gleichung $C_0 C_1 = R_1 - R_0$. Wickelt man den Faden wieder ab, indem man ihn stets gespannt hält, so beschreibt dieses Ende den Bogen $M_0 M_1$. Denn ist $C_1 C M$ eine Lage des Fadens, so ist

$$CM = C_0 M_0 + C_0 C = R_0 + s_1.$$

Also ist CM der Krümmungsradius, welcher zum Punkt C führt, und der Punkt M liegt folglich auf dem Bogen $M_0 M_1$.

Die Evolute einer algebraischen Kurve ist selbst eine algebraische Kurve, und die bewiesenen Sätze lehren, dass jeder Bogen der Evolute durch eine algebraische Funktion der Koordinaten ausgedrückt werden kann. Man sagt daher, dass diese Evolute *rektifikabel* ist.

200. Um von der Evolute zur Evolvente zurückzukehren, muss man die beiden Gleichungen anwenden:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0, \quad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{dy_1}{dx_1}.$$

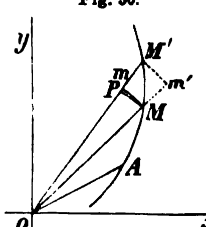
Hier sind x_1 und y_1 gegebene Funktionen einer unabhängigen Variabelen. Eliminiert man diese zwischen den beiden Gleichungen, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$, welche die Differentialgleichung der gesuchten Evolvente ist. Man sieht, dass diese Differentialgleichung

überhaupt alle *orthogonalen Trajektorien* der gegebenen Kurven umfasst, d. h. alle Kurven, welche die Tangenten derselben zu Normalen haben. Hieraus folgt, dass jede Kurve unendlich viele Evolventen hat, worauf wir noch später zurückkommen werden.

Die Gleichungen im Polarkoordinatensystem.

201. Das Differential der Fläche eines Sektors. Die Punkte einer Kurve AM seien bestimmt durch den Radiusvektor $OM = \varrho$, welcher von einem festen Punkt O ausgeht, und durch den Winkel ω, den die Richtung dieses Radius mit einer festen Richtung OX bildet. Ist A ein fester Punkt und M ein variabeler, so wird die Fläche des Sektors OAM, die von der Kurve und den beiden Radien OA, OM eingeschlossen ist, eine Funktion, deren Differential wir bestimmen wollen. Erteilt man ω den Zuwachs $M'OM = \Delta\omega$, so ändert sich der Radius um $\Delta\varrho$, und die Fläche $AOM = u$ erhält das Inkrement

Fig. 30.



$$\Delta u = MOM'.$$

Ist $\varrho + \Delta_1\varrho$ der grösste Wert, welcher unter den Radienvektoren von OM bis OM' überhaupt vorkommt, und $\varrho + \Delta_2\varrho$ der kleinste, so wird der Kreissektor, welcher zu dem Winkel $\Delta\omega$ und dem Radius $\varrho + \Delta_1\varrho$ gehört, grösser sein, als die Fläche Δu, dagegen der Kreissektor mit demselben Winkel und dem Radius $\varrho + \Delta_2\varrho$ kleiner. Es ist also

$$\frac{1}{2}\Delta\omega(\varrho + \Delta_1\varrho)^2 > \Delta u > \frac{1}{2}\Delta\omega(\varrho + \Delta_2\varrho)^2,$$

oder

$$\frac{1}{2}(\varrho + \Delta_1\varrho)^2 > \frac{\Delta u}{\Delta\omega} > \frac{1}{2}(\varrho + \Delta_2\varrho)^2.$$

Lässt man nun $\Delta\omega$ nach null konvergieren, so konvergieren auch, da ϱ als stetige Funktion von ω vorausgesetzt ist, $\Delta_1\varrho$ und $\Delta_2\varrho$ nach null, und es wird

$$\frac{1}{2}\varrho^2 = \frac{du}{d\omega} \quad \text{oder} \quad du = \frac{1}{2}\varrho^2 d\omega.$$

Legen wir durch den Anfangspunkt oder Pol des Systems die Gerade Oy senkrecht zu Ox und bezeichnen wir mit x und y die rechtwinkligen Koordinaten in Bezug auf diese Axen, so ist

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{y}{x}, \quad \varrho \cos \omega = x.$$

Die erste Gleichung giebt durch Differentiation:

$$\frac{d\omega}{\cos \omega^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} \quad \text{oder} \quad \varrho^2 d\omega = x\,dy - y\,dx.$$

Also kann das Differential des Sektors u auch durch die Gleichung

$$du = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

dargestellt werden.

202. Das Bogendifferential. Wird mit s der Bogen AM bezeichnet, dessen Anfangspunkt A fest ist, während der Punkt M variabel bleibt, so ist Δs das Inkrement MM', welches dem Zuwachs $\Delta\omega$ entspricht. Wir fällen vom Punkte M die Senkrechte MP auf den Radius OM' und ziehen die Sehne MM'. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MPM' folgt

$$MM'^2 = MP^2 + M'P^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{MM'}{\Delta\omega}\right)^2 = \left(\frac{MP}{\Delta\omega}\right)^2 + \left(\frac{M'P}{\Delta\omega}\right)^2.$$

Es ist

$$MP = \varrho \sin \Delta\omega, \quad M'P = \varrho + \Delta\varrho - \varrho \cos \omega.$$

Die Grenzen der Verhältnisse, welche in die obige Gleichung eingehen, werden nicht geändert, wenn man

$$MM', \quad MP, \quad M'P$$

bezüglich durch

$$\Delta s, \quad \varrho\Delta\omega, \quad \Delta\varrho$$

ersetzt. Denn die Grenze des Verhältnisses von Δs zu seiner Sehne MM' ist die Einheit; ebenso die Grenze des Verhältnisses von $MP : \varrho\Delta\omega = \frac{\sin \Delta\omega}{\Delta\omega}$. Endlich wird auch

$$\frac{M'P}{\Delta\omega} = \frac{\Delta\varrho}{\Delta\omega} + \varrho\,\frac{1 - \cos \omega}{\Delta\omega} = \frac{\Delta\varrho}{\Delta\omega} + 2\varrho\,\frac{\sin^2 \frac{1}{2}\Delta\omega}{\Delta\omega},$$

also

$$\lim \frac{M'P}{\Delta\omega} = \frac{d\varrho}{d\omega}.$$

Demnach hat man

$$\lim \left(\frac{\Delta s}{\Delta \omega}\right)^2 = \varrho^2 + \lim \left(\frac{\Delta \varrho}{\Delta \omega}\right)^2,$$

d. h.

$$\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2 = \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 \quad \text{oder} \quad ds^2 = \varrho^2 d\omega^2 + d\varrho^2.$$

Man kann diese Gleichung auch aus der bei rechtwinkligen Koordinaten gewonnenen ableiten; wir haben dies im § 73 gethan und brauchen hier nicht nochmals darauf zurückzukommen.

203. Bestimmung der Tangente. Im Polarkoordinatensysteme bestimmt man die Tangente vermittelst des Winkels μ, den sie mit dem Radiusvektor bildet. Der Winkel μ im Punkte M der Kurve ist die Grenze, nach welcher der Winkel $PM'M$ konvergiert, wenn sich der Punkt M' dem Punkte M unbegrenzt nähert (s. Figur in § 201).

Das rechtwinklige Dreieck $MM'P$ giebt

$$\cos PM'M = \frac{M'P}{MM'}, \quad \sin PM'M = \frac{MP}{MM'}.$$

Die Grenzen der rechten Seiten dieser Gleichungen ändern sich nicht, wenn man wie im vorigen Paragraphen

$$MM', \quad MP, \quad M'P$$

ersetzt durch

$$\Delta s, \quad \varrho\Delta\omega, \quad \Delta\varrho.$$

Man erhält demnach:

$$\cos \mu = \lim \frac{\Delta \varrho}{\Delta s}, \quad \sin \mu = \lim \frac{\varrho \Delta \omega}{\Delta s},$$

d. h.

$$\cos \mu = \frac{d\varrho}{ds} = \frac{d\varrho}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2}},$$

$$\sin \mu = \frac{\varrho\, d\omega}{ds} = \frac{\varrho\, d\omega}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2}}.$$

Hieraus folgt:

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\varrho\, d\omega}{d\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Hierbei bedeutet μ den Winkel, den die nach der Richtung wachsender Winkel ω konstruierte Tangente mit der Richtung

des verlängerten Radiusvektor einschliesst. Ist $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\omega}$ null, so wird dieser Winkel gleich $\frac{\pi}{2}$, ist $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\omega} = \infty$, so wird dieser Winkel null.

204. Man kann die Punkte einer Kurve auch durch zwei Radienvektoren ϱ und ϱ' bestimmen, welche von zwei gegebenen Anfangspunkten ausgehen. Bezeichnet man mit μ und μ' die Winkel, die diese Radien mit der Tangente bilden, so ist

$$\cos\mu = \frac{d\varrho}{ds}, \quad \cos\mu' = \frac{d\varrho'}{ds},$$

also

$$\frac{\cos\mu'}{\cos\mu} = \frac{d\varrho'}{d\varrho}.$$

In diesem Koordinatensysteme ist z. B. die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel

$$\varrho' = \pm\,\varrho + \text{Konst.}$$

Daraus folgt $\frac{d\varrho'}{d\varrho} = \pm 1$, und unsere Gleichung ergiebt

$$\cos\mu' = \pm\cos\mu,$$

was eine bekannte Eigenschaft der Tangente an Kegelschnitten ausdrückt. An Stelle der beiden Radienvektoren, die von zwei festen Anfangspunkten ausgehen, kann man auch die Winkel und ω' als Koordinaten einführen, welche diese Radien mit einer festen Richtung bilden. Man hat nun die Gleichungen

$$\sin\mu = \frac{\varrho\, d\omega}{ds}, \quad \sin\mu' = \frac{\varrho'\, d\omega'}{ds},$$

und infolge der Relation:

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega'},$$

wird

$$\frac{\sin\mu'}{\sin\mu} = \frac{\sin\omega\, d\omega'}{\sin\omega'\, d\omega}.$$

205. Subtangente und Subnormale. Zieht man durch den Pol des Koordinatensystems eine Senkrechte zum Radiusvektor, so werden die Abschnitte auf dieser Geraden vom Anfangspunkt bis zu den Schnittpunkten mit der Tangente und der Normale die *Polarsubtangente* und *-Subnormale* genannt.

Die Subtangente $OT = T'$ und Subnormale $ON = N'$ erhalten die Längen

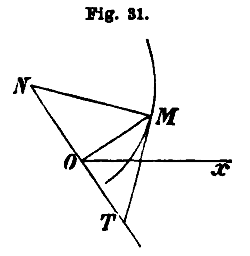


Fig. 31.

$$T' = \varrho \operatorname{tang} \mu, \quad N' = \varrho \operatorname{cotg} \mu,$$

oder

$$T' = \varrho^2 \frac{d\omega}{d\varrho} = \frac{\varrho^2}{\varrho'}, \quad N' = \frac{d\varrho}{d\omega} = \varrho'.$$

Die Längen T und N der Tangente und der Normalen sind:

$$T = \sqrt{\varrho^2 + T'^2} = \varrho \frac{ds}{d\varrho}, \quad N = \sqrt{\varrho^2 + N'^2} = \frac{ds}{d\omega}.$$

206. Der Kontingenzwinkel und der Krümmungsradius. Der Kontingenzwinkel $d\sigma$ ist, wie wir sahen, gleich dem Differentiale des Winkels, den die Tangente mit der x-Axe bildet. Andererseits ist dieser Winkel gleich $\omega + \mu$; man erhält demnach

$$d\sigma = d\omega + d\mu.$$

Die Gleichung

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\varrho}{\dfrac{d\varrho}{d\omega}}$$

liefert durch Differentiation, wenn man ω als unabhängige Variabele betrachtet:

$$\frac{d\mu}{\cos\mu^2} = \frac{\left(\dfrac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 - \varrho \dfrac{d^2\varrho}{d\omega^2}}{\left(\dfrac{d\varrho}{d\omega}\right)^2} d\omega, \quad d\mu = \frac{\left(\dfrac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 - \varrho \dfrac{d^2\varrho}{d\omega^2}}{\varrho^2 + \left(\dfrac{d\varrho}{d\omega}\right)^2} d\omega.$$

Es ist also

$$d\sigma = \frac{\varrho^2 + 2\left(\dfrac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 - \varrho \dfrac{d^2\varrho}{d\omega^2}}{\varrho^2 + \left(\dfrac{d\varrho}{d\omega}\right)^2} d\omega = \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho^2 + \varrho'^2} d\omega.$$

Da nun $ds = \sqrt{\varrho^2 + \left(\dfrac{d\varrho}{d\omega}\right)^2} \,.\, d\omega$ ist, so folgt hieraus für den Krümmungsradius

$$1)\quad R = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{\left[\varrho^2 + \left(\dfrac{d\varrho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\left(\dfrac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 - \varrho \dfrac{d^2\varrho}{d\omega^2}} = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}.$$

Man kann diese Formel auch aus derjenigen ableiten, welche bei rechtwinkligen Koordinaten erhalten wurde; dies ist im § 73 ausgeführt, als wir uns mit dem Probleme der Transformation der Variabelen beschäftigten.

Bisweilen ist es von Vorteil, in die Gleichung 1) die Ableitungen von $\frac{1}{\varrho}$ an Stelle der Ableitungen von ϱ einzuführen. Es ist

$$\varrho = \frac{1}{\left(\frac{1}{\varrho}\right)}, \quad d\varrho = -\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2}, \quad d^2\varrho = -\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2} + 2\frac{\left(d\frac{1}{\varrho}\right)^2}{\left(\frac{1}{\varrho}\right)^3}$$

und die Substitution dieser Werte in die Gleichung 1) liefert:

$$2) \qquad R = \frac{\left[\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d\frac{1}{\varrho}}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\varrho^3}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d^2\frac{1}{\varrho}}{d\omega^2}\right)}$$

Einhüllende Kurven.

207. Mit $f(x, y, \alpha)$ sei eine Funktion der drei Variabelen x, y, α bezeichnet, deren Wert eindeutig bestimmt ist, wenn man die Werte dieser Variabelen fixiert. Wenn man annimmt, dass x, y die Koordinaten in irgend einem Koordinatensysteme darstellen, und dass α ein veränderlicher Parameter ist, so repräsentiert die Gleichung

$$1) \qquad f(x, y, \alpha) = 0$$

ein System von Kurven; jedem Werte von α entspricht eine bestimmte Kurve. Wird, nachdem α einen bestimmten Wert erhalten hat, dem Parameter der neue Wert $\alpha + \Delta\alpha$ erteilt, so erhält man eine zweite Kurve mit der Gleichung

$$2) \qquad f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0,$$

welche die erste in gewissen Punkten $m, m', m'' \ldots$ schneidet. Die Koordinaten dieser Punkte müssen den Gleichungen der beiden Kurven genügen, und folglich auch der Gleichung:

$$3) \qquad \frac{f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0.$$

Lässt man jetzt $\Delta\alpha$ nach 0 konvergieren, so werden die Punkte $m, m' \ldots$ im allgemeinen nach bestimmten Grenzen $M, M' \ldots$ konvergieren, und es ist ersichtlich, dass die Koordinaten dieser Punkte $M, M' \ldots$ die Gleichung 1), sowie die Gleichung

$$4) \qquad \frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

befriedigen werden, welche letztere aus 3) hervorgeht, wenn α null wird. Es liegen also auf jeder Kurve des Systemes 1) gewisse Punkte $M, M' \ldots$, die auf die genannte Weise bestimmt sind. Der geometrische Ort aller dieser Punkte ist eine Kurve, deren Gleichung vermittelst der Elimination von α aus den Gleichungen 1) und 4) gewonnen wird. Diese Kurve heisst die *Einhüllende* (Enveloppe) der Kurven des gegebenen Systemes, und diese haben ihrerseits den Namen *Eingehüllte* erhalten.

Die Existenz einer bestimmten Ableitung $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ ist eine hinreichnde Bedingung dafür, dass bestimmte Grenzpunkte $M, M' \ldots$ auf jeder Kurve vorhanden sind.

208. Es muss beachtet werden, dass die Einhüllende nicht mehr durch diese Regel bestimmt werden kann, wenn die linke Seite der Gleichung 1) keine eindeutig bestimmte Funktion ist. Denn ein gemeinsamer Punkt zweier unendlich benachbarter Kurven genügt zwar noch den Gleichungen

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0,$$

aber, wenn die Funktion f mehrere Werte annimmt, so kann man nicht mehr behaupten, dass $f(x, y, \alpha + \Delta\alpha)$ jedesmal die Grenze $f(x, y, \alpha)$ hat, wenn $\Delta\alpha$ null wird.

Wir wollen dies durch ein Beispiel erläutern. Es sei die Einhüllende aller der Kreise zu bestimmen, welche im rechtwinkligen Koordinatensysteme durch die Gleichung

$$(x - \alpha)^2 + y^2 - a^2 = 0$$

dargestellt sind, wobei a eine Konstante ist. Die linke Seite ist eine eindeutige Funktion und unsere Regel sonach anwendbar. Die Differentiation nach α giebt

$$x - \alpha = 0$$

und durch Elimination von α erhält man die Gleichung der Enveloppe

$$y^2 - a^2 = 0 \text{ oder } (y - a)(y + a) = 0,$$

die sich aus zwei Parallelen zur x-Axe zusammensetzt.

Die Gleichung der Eingehüllten kann, da sie vom zweiten Grade in Bezug auf α ist, auch in der Form geschrieben werden:

$$\alpha - x + \sqrt{a^2 - y^2} = 0,$$

und wollte man nun die Regel des § 207 anwenden, so käme man zu der absurden Gleichung $1 = 0$. Aber wie wir vorhin sagten, die fragliche Regel ist nicht anwendbar. Denn wenn man zwei unendlich benachbarte Kurven betrachtet, und man wählt als die eine von ihnen

$$\alpha = x \pm \sqrt{a^2 - y^2},$$

so muss man für die andere

$$\alpha + \Delta\alpha = x \mp \sqrt{a^2 - y^2}$$

setzen; denn andernfalls würden sich die Teile nicht schneiden.

209. Die Einhüllenden haben eine gemeinsame Eigenschaft, die sich in dem folgenden Satze ausspricht.

Lehrsatz. *Die Einhüllende eines Kurvensystemes berührt die Kurven in jedem Punkte, wo sie denselben begegnet.*

Ist

$$f(x, y, \alpha) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung des Systemes in geradlinigen Koordinaten, und die Funktion f eindeutig, so ist die Einhüllende durch die beiden Gleichungen bestimmt

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \tag{2}$$

Um den Richtungskoeffizienten $\frac{dy}{dx}$ der Tangente in einem bestimmten Punkt einer Systemskurve zu erhalten, muss man die Gleichung 1) differentiieren; man bekommt

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0. \tag{3}$$

Will man nun den Richtungskoeffizienten der Tangente in einem bestimmten Punkte der Einhüllenden finden, so kann man noch die Gleichung 1) als Gleichung derselben ansehen, nur muss man α nicht mehr als Konstante, sondern als eine Funktion von x und y betrachten, welche durch die zweite der Gleichungen 2) bestimmt ist. Unter dieser Annahme hat man die Gleichung 1) zu differentieren, und das ergiebt:

$$4)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,d\alpha = 0.$$

Die zweite Gleichung 2), welche für jeden Punkt der Einhüllenden erfüllt ist, reduziert aber diese Gleichung 4) auf die Form 3). Also erhält man für die Einhüllende sowohl wie für die Eingehüllte

$$5)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Handelt es sich nun um einen Punkt einer Eingehüllten, so hat α in der Gleichung 5) den Wert, welcher einer Systemskurve entspricht; handelt es sich aber um einen Punkt der Einhüllenden, so hat α den Wert, der aus der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ hervorgeht. Betrachtet man nun einen Punkt M, welcher einer Kurve des Systemes und der Einhüllenden gemeinsam ist, so ist der Wert von α, welcher der Systemskurve entspricht, gleich dem Werte, den man aus der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ gewinnt, weil diese Gleichung für den Punkt M gilt. Der Wert von $\frac{dy}{dx}$ ist folglich derselbe für beide Kurven und diese berühren sich daher in M.

Bemerkung. Ein Beispiel für die betrachtete Eigenschaft der Einhüllenden haben wir bereits behandelt. Die Evolute einer Kurve ist nichts anderes als die Einhüllende des Normalensystemes, und wir haben gesehen, dass sie die Normalen tangiert.

Die Gleichung $f(x, y, \alpha) = 0$ kann, wenn die Koordinaten x, y eines Punktes M in dieselbe eingesetzt werden, mehrere

Werte α liefern; unter diesen ist aber, wenn M zugleich ein Punkt der Einhüllenden ist, jedenfalls einer (mehrfach zählend) vorhanden, der auch der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ genügt. Die auf diese Weise bestimmte Systemskurve wird von der Einhüllenden tangiert, während die anderen Systemskurven, die etwa noch durch den Punkt M gehen können, die Einhüllende daselbst schneiden.

Ein Kurvensystem kann einhüllende Kurven nur dann besitzen, wenn α vom höheren als dem ersten Grade in der Gleichung vorkommt, d. h. geometrisch, wenn das Kurvensystem die Ebene zum mindesten zweifach überdeckt, indem durch einen Punkt der Ebene im allgemeinen zwei (reelle oder imaginäre) Kurven hindurchgehen.

Der Beweis der Berührung zwischen Einhüllenden und Eingehüllten wird ungültig, wenn in einem gemeinsamen Punkte x, y die beiden Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ null werden. Denn in diesem Falle lässt sich weder die Tangente der einen noch der anderen Kurve aus den Gleichungen 3) und 4) in der Form 5) berechnen. Es ist also nicht bewiesen, dass die Einhüllende, welche durch die Gleichungen 2) definiert ist, die Systemskurve berührt, sobald sie durch einen singulären Punkt derselben hindurchgeht. Vielmehr kann es eintreten, dass die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ zusammen mit $f(x, y, \alpha) = 0$ nur einen Ort singulärer Punkte, die zugleich Durchschnittspunkte benachbarter Systemskurven sind, darstellt, und dass *diese Einhüllende* die Kurven des Systemes nicht berührt. Will man für die durch die Gleichungen

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

repräsentierte Kurve in diesem Falle die Tangentenrichtung in einem bestimmten Punkte berechnen, so werden in der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

sämtliche Koeffizienten $\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}$ null, woraus man weiter folgert, dass die Einhüllende durch ihre beiden Gleichungen mehrfach zählend ausgedrückt ist.

210. Eine wichtige Anwendung der Theorie der Enveloppen ist folgende.

Betrachtet man eine beliebige Kurve bezogen auf zwei rechtwinklige Axen und ist α der Winkel, den die Richtung

der Tangente mit der Abscissenaxe bildet, so wird die Gleichung dieser Tangente

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = f(\alpha) \tag{1}$$

und $f(\alpha)$ ist eine Funktion von α, die von der Art der Kurve abhängt. Da diese aber die Einhüllende ihrer Tangenten ist, so bekommt man ihre Gleichung, indem man α zwischen der Gleichung 1) und der hieraus durch Differentiation folgenden Gleichung

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = f'(\alpha) \tag{2}$$

eliminiert. Man kann α zur unabhängigen Variabelen machen, und alsdann bestimmen die Gleichungen 1) und 2) die Koordinaten x und y als Funktionen von α. Man findet:

$$\begin{aligned} x &= f'(\alpha) \cos \alpha + f(\alpha) \sin \alpha, \\ y &= f'(\alpha) \sin \alpha - f(\alpha) \cos \alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Differentiation dieser Gleichungen giebt dann weiter:

$$\begin{aligned} dx &= [f''(\alpha) + f(\alpha)] \cos \alpha \, d\alpha, \\ dy &= [f''(\alpha) + f(\alpha)] \sin \alpha \, d\alpha, \end{aligned} \tag{4}$$

und indem man diese Gleichungen quadriert und addiert:

$$ds = [f''(\alpha) + f(\alpha)] \, d\alpha, \tag{5}$$

was übrigens auch aus den Formeln in § 191 hervorgeht. Da $d\alpha$ gleich dem Kontingenzwinkel ist, so erhält man für den Krümmungsradius

$$R = f''(\alpha) + f(\alpha). \tag{6}$$

Die vorstehenden Formeln lassen verschiedene Anwendungen zu, von denen wir ein Beispiel geben wollen. Erteilt man α einen bestimmten Wert, so stellt die Gleichung 2) eine Senkrechte zur Tangente dar, und zwar in dem Punkte x, y, welcher durch die Gleichung 3) bestimmt ist, also im Kurvenpunkte. Die Gleichung 2) liefert mithin die Normalen der Kurve. Bildet man nun die Ableitung der Gleichung 2) nach α, nämlich

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = f''(\alpha), \tag{7}$$

so gehört das System der Gleichungen 2) und 7) den Einhüllenden des Normalensystemes an, also der Evolute der

gebenen Kurve. Berechnet man aus 2) und 7) die Werte von x, y, und bezeichnet man sie durch x_1 und y_1, so wird

$$8)\qquad \begin{aligned} x_1 &= f'(\alpha)\cos\alpha - f''(\alpha)\sin\alpha,\\ y_1 &= f'(\alpha)\sin\alpha + f''(\alpha)\cos\alpha, \end{aligned}$$

und dies sind die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes. Durch Differentiation folgt weiter:

$$9)\qquad \begin{aligned} dx_1 &= -\,[f'(\alpha) + f'''(\alpha)]\sin\alpha\,d\alpha,\\ dy_1 &= +\,[f'(\alpha) + f'''(\alpha)]\cos\alpha\,d\alpha, \end{aligned}$$

also, wenn s_1 den Bogen der Evolute ausdrückt:

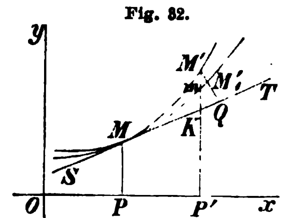
$$10)\qquad ds_1 = [f'(\alpha) + f'''(\alpha)]\,d\alpha = dR.$$

Man findet so die Resultate im § 198 wieder.

Berührungen verschiedener Ordnung zwischen ebenen Kurven.

211. Es sei ST die Tangente im Punkte M einer Kurve MM' und es werde eine zweite Kurve MM'_1 betrachtet, welche auch durch M geht. Auf der ersten Kurve wählen wir den Punkt M' unendlich benachbart an M und fällen auf die Tangente ST die Senkrechte $M'Q$, welche die zweite Kurve im Punkte M'_1 schneiden möge. Wird MQ als unendlich kleine Grösse erster Ordnung bezeichnet, so wird $M'Q$ im allgemeinen (§ 166) eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung. Berührt nun die Kurve MM'_1 die Gerade ST im Punkte M nicht, so wird die Strecke M'_1Q unendlich klein von erster Ordnung, anderenfalls wird sie unendlich klein von zweiter oder höherer Ordnung.

Fig. 32.



Haben zwei Kurven MM', MM'_1 im Punkte M dieselbe Tangente ST, so sagt man, dass sie sich in M *berühren*, und da in diesem Falle $M'Q$ und M'_1Q unendlich klein von zweiter oder höherer Ordnung sind, so findet dasselbe auch für die Strecke $M'M'_1$ statt, welche die Differenz oder Summe jener Grössen ist. Ist nun die Ordnung der unendlich kleinen Grösse $M'M'_1$ in Bezug auf die unendlich kleine Grösse erster Ordnung MQ durch die Zahl $\mu + 1$ ausgedrückt, so werden

wir sagen, dass die beiden Kurven im Punkte M eine *Berührung von der Ordnung* μ besitzen. Diese Definition ist vom Koordinatensysteme ganz unabhängig.

Die beiden Koordinatenaxen Ox und Oy mögen nun unter einander den Winkel θ besitzen, die Ordinatenaxe sei nicht gerade parallel der Tangente ST. Wir konstruieren die Ordinate MP des Punktes M, ebenso die Ordinate $M'P'$, welche die Kurve MM'_1 in m, und die Tangente ST in K schneidet. Schliesslich verbinden wir noch die Punkte m und M'_1 durch eine Gerade. Die Winkel bei m und M'_1 des unendlich kleinen Dreiecks $mM'M'_1$ konvergieren nach endlichen Grenzen; der Winkel m hat zur Grenze den Winkel SMP, den wir als von null verschieden voraussetzten, während der Winkel M'_1 zur Grenze einen rechten Winkel hat. Da nun das Verhältnis der Seiten $M'M'_1$, $M'm$ gleich dem Verhältnis der Sinus der gegenüber liegenden Winkel ist, so folgt, dass das Verhältnis

$$\frac{M'M'_1}{M'm}$$

einer endlichen Grenze zustrebt. Bezeichnet man nun mit α die Neigung der Tangente ST zur Axe Ox, so findet man mittelst derselben Rechnungen wie im § 166

$$PP' = MQ\,\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} - M'Q\,\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta},$$

und da das Verhältnis $\dfrac{M'Q}{MQ}$ unendlich klein ist, so sieht man, dass das Verhältnis

$$\frac{MQ}{PP'}$$

nach einer endlichen Grenze konvergiert.

Hieraus folgt, dass das Verhältnis von MM'_1 zu MQ von derselben Ordnung unendlich klein wird, wie das Verhältnis von $M'm$ zu PP'; wenn wir also mit μ die Ordnung der Berührung beider Kurven bezeichnen, so ist $M'm$ eine unendlich kleine Grösse der Ordnung $\mu+1$ im Vergleich zu PP' als unendlich kleiner Grösse der ersten Ordnung.

Ist nun x die Abscisse des Punktes M, $x+\Delta x$ die des Punktes M' und m, sind ferner Y und Y' die Ordinaten dieser letzteren Punkte, so haben wir

$$M'm = Y - Y', \quad PP' = \Delta x,$$

so dass $\mu + 1$ die Ordnung der unendlich kleinen Grösse $Y - Y'$ im Vergleich zu Δx wird.

Sind y und y' die Werte, nach denen Y und Y' konvergieren, wenn Δx null wird, so bestehen nach der Taylorschen Formel, wenn wir annehmen, dass die erforderlichen Bedingungen erfüllt sind, die Gleichungen:

$$Y = y + \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x^2 + \cdots \frac{1}{\mu + 1!}\frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}}\Delta x^{\mu+1} + R_{\mu+2},$$

$$Y' = y' + \frac{dy'}{dx}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2y'}{dx^2}\Delta x^2 + \cdots \frac{1}{\mu + 1}\frac{d^{\mu+1}y'}{dx^{\mu+1}}\Delta x^{\mu+1} + R'_{\mu+2}.$$

Damit nun unsere beiden Kurven in M wirklich eine Berührung der Ordnung μ haben, d. h. damit die Differenz $Y - Y'$ unendlich klein von $\mu + 1^{\text{ter}}$ Ordnung werde, sind die Gleichungen notwendig und hinreichend:

$$1) \quad y' = y, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx_2}, \cdots \frac{d^\mu y'}{dx^\mu} = \frac{d^\mu y}{dx^\mu}.$$

Es müssen also für die Abscisse x des Berührungspunktes nicht nur die Ordinaten der beiden Kurven, sondern auch die μ ersten Ableitungen derselben einander bezüglich gleich sein. Sind diese Bedingungen erfüllt und die Ableitungen $\mu + 1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{d^{\mu+1}y'}{dx^{\mu+1}}, \quad \frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}}$$

einander nicht gleich, so wird:

$$2) \quad Y - Y' = \frac{1}{\mu + 1!}\left(\frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}} - \frac{d^{\mu+1}y'}{dx^{\mu+1}}\right)\Delta x^{\mu+1} + (R_{\mu+2} - R'_{\mu+2})$$

Die Differenz $Y - Y'$ wird also in der That von $\mu + 1^{\text{ter}}$ Ordnung unendlich klein, und die Zahl μ giebt folglich die Ordnung der Berührung an.

212. Ist diese Ordnung μ ungerade, so ändert $Y - Y'$ sein Zeichen nicht, wenn man das Vorzeichen von Δx ändert, weil $R_{\mu+2} - R'_{\mu+2}$ von höherer als der $\mu + 1^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich klein wird; das Zeichen bleibt also das nämliche wie das der Differenz

$$\frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}} - \frac{d^{\mu+1}y'}{dx^{\mu+1}}$$

Dies besagt, dass zu beiden Seiten des Berührungspunktes die eine Kurve durchaus auf derselben Seite der andern verläuft.

Ist dagegen μ eine gerade Zahl, so ändert $Y - Y'$ mit Δx auch sein Zeichen, und die Kurven durchsetzen sich gegenseitig im Berührungspunkte.

Wir bemerken schliesslich, dass es im Falle einer Berührung μ^{ter} Ordnung nicht möglich ist, durch den Punkt M eine dritte Kurve zu legen, die zwischen den beiden ersten verläuft, es sei denn, dass sie im Punkte M eine Berührung von μ^{ter} oder höherer Ordnung mit jenen besitzt. Denn ist Y'' die Ordinate der dritten Kurve, welche zur Abscisse $x + \Delta x$ gehört, so ist

$$Y'' - Y' = (Y'' - Y) + (Y - Y').$$

Ist nun $Y'' - Y$ von niederer als der $\mu + 1^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich klein, so wird auch $Y'' - Y'$ von derselben Ordnung unendlich klein, und folglich haben

$$Y'' - Y' \quad \text{und} \quad Y'' - Y$$

auch dasselbe Zeichen.

Oskulierende Kurven.

213. C bezeichne eine gegebene Kurve mit den Koordinaten x, y. C' sei eine Kurve von gegebener Art, in deren Gleichung noch $n + 1$ willkürliche Konstanten vorkommen mögen. Mit y' bezeichnen wir die Ordinate der Kurve C', welche zur Abscisse x gehört.

Ist nun μ eine ganze Zahl nicht grösser als n, so kann man noch über die willkürlichen Konstanten derart verfügen, dass die Kurve C' durch einen bestimmten Punkt M auf C mit der Abscisse x hindurchgeht und hier eine Berührung μ^{ter} Ordnung mit der Kurve besitzt. Die Bedingungen dieser Berührung ergeben sich, wenn man die Werte von y und die μ ersten Ableitungen derselben, welche aus der Gleichung der Kurve C hervorgehen, den Werten von y' und seinen μ ersten Ableitungen, wie sie aus der Gleichung C' folgen, gleich setzt. Man erhält $\mu + 1$ Gleichungen; ist also $n > \mu$, so bleiben

noch $n - \mu$ Konstanten unbestimmt; ist aber $n = \mu$, so ist die Kurve C' vollkommen bestimmt, und besitzt im Punkte M mit der Kurve C eine Berührung zum mindesten von der Ordnung n. In diesem letzteren Falle sagt man, die Kurve C' oskuliert die Kurve C im Punkte M; sie ist unter allen Kurven der betrachteten Art diejenige, die dort die grösstmögliche Berührung mit C hat.

214. Nehmen wir nun an, dass man die willkürlichen Konstanten in der Gleichung von C' derart bestimmt hat, dass die Kurve C' nicht nur durch den Punkt M (x, y) der Kurve C hindurchgeht, sondern daselbst auch eine Berührung μ^{ter} Ordnung mit C besitzt, wobei μ kleiner als n ist. Die Zahl μ kann sich auch auf null reduzieren; in diesem Falle haben die Kurven keine Berührung, sondern schneiden sich. Die Bedingungen unserer Annahme sind, wenn wir von Fällen der Diskontinuität immer absehen:

$$1) \qquad y' = y, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^\mu y'}{dx^\mu} = \frac{d^\mu y}{dx^\mu},$$

im Falle $\mu = 0$ reduzieren sie sich auf die erste Gleichung. Da nun noch $n - \mu$ Konstante willkürlich bleiben, so können wir die Kurve C' durch einen anderen Punkt der Kurve C gehen lassen, welcher die Abscisse $x + \Delta x$ haben möge. Bezeichnen wir mit Y und Y' die Ordinaten der beiden Kurven, welche zu diesem Abscissenwert gehören, so erhalten wir, wie in § 211:

$$Y' - Y = \left(\frac{d^{\mu+1}y'}{dx^{\mu+1}} - \frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}}\right) \frac{\Delta x^{\mu+1}}{\mu + 1!} + R'_{\mu+2} - R_{\mu+2}.$$

Die Grössen $R'_{\mu+2}$ und $R_{\mu+2}$ werden mit Δx unendlich klein und zwar von der Ordnung $\mu + 2$. Die Bedingung, welche wir ausdrücken wollen, nämlich $Y = Y'$ wird also:

$$\left(\frac{d^{\mu+1}y'}{dx^{\mu+1}} - \frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}}\right) + \mu + 1! \, \frac{R'_{\mu+2} - R_{\mu+2}}{\Delta x^{\mu+1}} = 0,$$

und lässt man Δx nach 0 konvergieren, so wird sie schliesslich:

$$2) \qquad \frac{d^{\mu+1}y'}{dx^{\mu+1}} = \frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}}.$$

Fügt man diese Gleichungen dem Systeme 1) noch hinzu, so erhält man genau die Bedingungen dafür, dass die Berührung der Curven C und C' von der Ordnung $\mu + 1$ ist.

Hieraus folgt: Um diejenige der Kurven C' zu erhalten, welche die Kurve C im Punkte M oskuliert, genügt es die $n + 1$ willkürlichen in der Gleichung für C' enthaltenen Konstanten derart zu bestimmen, dass diese Kurve durch den Punkt M und durch n andere Punkte: $M_1, M_2 \ldots M_n$ mit den Abscissenwerten $x_1, x_2 \ldots x_n$ hindurchgeht, und sodann nach einander jede dieser Abscissen nach x konvergieren zu lassen. Bekommt x_1 die Grenze x, so hat C' in M eine Berührung erster Ordnung mit C; wird sodann auch x_2 gleich x, so erhöht sich diese Ordnung um eine Einheit u. s. w.

215. Bisher haben wir angenommen, dass die Punkte $M_1, M_2 \ldots M_n$ nach einander mit dem Punkt M zusammenrücken. Indessen fällt die Kurve C', welche durch alle diese Punkte geht, auch dann noch mit der oskulierenden Kurve im Punkte M zusammen, wenn die Punkte $M_1, M_2 \ldots M_n$ dem Punkte M sich unendlich nähern, indem sie gleichzeitig nach irgend welchem stetigen Gesetze auf der Kurve sich ändern.

Denn sind $y = f(x)$ und $y' = f_1(x)$ die Gleichungen der beiden Kurven C und C', ferner $\varphi(x)$ die Differenz $f_1(x) - f(x)$, und bezeichnen wir mit $x, x + h_1, x + h_2 \ldots x + h_n$ die Abscissen der Punkte $M, M_1, M_2 \ldots M_n$, willkürlich gewählt auf C', wobei die Beträge dieser Grössen $h_1 \ldots h_n$ kleiner seien als eine gegebene Grösse h, so werden die Gleichungen, welche ausdrücken, dass C' durch die Punkte $M, M_1 \ldots M_n$ hindurchgeht:

$$1)\quad \varphi(x) = 0, \quad \varphi(x + h_1) = 0, \quad \varphi(x + h_2) = 0 \ldots \varphi(x + h_n) = 0.$$

Dies System kann man durch das folgende ersetzen:

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x + h_1) - \varphi(x) = 0, \quad \varphi(x + h_2) - \varphi(x) = 0, \\ \ldots \varphi(x + h_n) - \varphi(x) = 0,$$

oder:

$$2)\quad \varphi(x) = 0, \quad \varphi'(x + k_1) = 0, \quad \varphi'(x + k_2) = 0 \ldots \varphi'(x + k_n) = 0,$$

wobei $k_1, k_2 \ldots k_n$ Grössen bezeichnen, deren Beträge kleiner sind als h.

Desgleichen kann aber das System 2) ersetzt werden durch

$$\varphi(x) = 0,\ \varphi'(x+k_1) = 0,\ \varphi'(x+k_2) - \varphi'(x+k_1) = 0,$$
$$\ldots \varphi'(x+k_n) - \varphi'(x+k_1) = 0,$$

oder:

3) $\varphi(x) = 0,\ \varphi'(x+k_1) = 0,\ \varphi''(x+l_2) = 0 \ldots \varphi''(x+l_n) = 0.$

Die Beträge von $l_2 \ldots l_n$ sind auch noch kleiner als h. Indem man so fortfährt, ersetzt man schliesslich das System 1) durch das System

4) $\varphi(x) = 0,\ \varphi'(x+k_1) = 0,\ \varphi''(x+l_2) = 0 \ldots \varphi^n(x+p_n) = 0$

Sämtliche Grössen $k_1, l_2 \ldots p_n$, welche von $h_1, h_2 \ldots h_n$ abhängen, sind dem absoluten Betrage nach kleiner als h. Lässt man nun h und damit auch $h_1, h_2 \ldots h_n$ nach null konvergieren, so konvergieren zugleich auch $k_1, l_2 \ldots p_n$ nach null und das System 4) reduziert sich auf

5) $\varphi(x) = 0,\ \varphi'(x) = 0,\ \varphi''(x) = 0 \ldots \varphi^n(x) = 0,$

d. h. auf

$$y' = y,\ \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^ny'}{dx^n} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Sonach haben die Kurven im Punkte M eine Berührung n^{ter} Ordnung.

Es verdient auch bemerkt zu werden, dass der Beweis gültig bleibt, wenn x eine variabele Grösse bedeutet, die nach einer Grenze ξ konvergiert. Alsdann verändern sich alle Punkte $M, M_1, M_2 \ldots M_n$ in willkürlicher Weise und konvergieren nach demselben Grenzpunkte $\mathfrak{M}$.

216. Oskulierende Gerade. Oskulierender Kegelschnitt. Die Gleichung einer Geraden enthält nur zwei Konstanten. Man kann daher zwischen einer gegebenen Kurve und einer Geraden in einem beliebig gegebenen Kurvenpunkte nur eine Berührung erster Ordnung herstellen. Die oskulierende Gerade einer Kurve ist also in jedem Punkte nichts anderes als die Tangente der Kurve. Dieses Resultat findet man auch nach der allgemeinen Regel. Denn ist

$$y' = ax + b$$

die allgemeine Gleichung einer Geraden, so hat man

$$\frac{dy'}{dx} = a,$$

und da die Bedingungen der Berührung in einem Punkte mit der Abscisse x die folgenden sind:

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

so erhält man für die Konstanten a und b die Werte:

$$a = \frac{dy}{dx}, \quad b = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Die Gleichung der oskulierenden Geraden wird demnach

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x),$$

wenn ξ und η die laufenden Koordinaten bedeuten.

Die allgemeine Kegelschnittsgleichung enthält fünf willkürliche Konstanten; mithin hat der oskulierende Kegelschnitt einer gegebenen Kurve eine Berührung vierter Ordnung mit dieser Kurve. In gewissen besonderen Kurven kann die Berührung auch von höherer Ordnung werden. So hat z. B. eine Kurve dritter Ordnung im allgemeinen 27 Punkte, in denen die oskulierenden Kegelschnitte je eine Berührung fünfter Ordnung mit der Kurve besitzen. Diesen Satz hat Steiner zuerst aufgestellt. (Einen algebraischen Beweis s. Serret: Höhere Algebra Bd. II; ferner Clebsch, Journal f. Math. Bd. 63 u. 64.) Wenn man Kegelschnitte betrachtet, welche noch anderweitigen bestimmten Bedingungen genügen, so wird die Zahl der willkürlichen Konstanten kleiner als 5, und die oskulierende Kurve hat im allgemeinen nicht mehr eine Berührung vierter Ordnung: Dieser Fall tritt ein, wenn man z. B. nur Parabeln betrachtet, welche von vier Konstanten abhängen, oder Kreise, welche drei Konstante enthalten, und die wir nun genauer untersuchen wollen.

Der oskulierende Kreis.

217. Die allgemeine Gleichung eines Kreises enthält drei Konstanten, nämlich die Koordinaten x_1, y_1 des Mittelpunktes und den Radius R. Man kann daher nur eine Berührung

zweiter Ordnung in einem Punkte x, y einer gegebenen Kurve mit einem Kreise herstellen, und die Bedingungen dieser Oskulation sind:

$$1)\qquad y' = y,\quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

wenn y' die Ordinate des Kreises bezeichnet. Die Gleichung desselben ist

$$(x - x_1)^2 + (y' - y_1)^2 = R^2,$$

und differentiiert man dieselbe zweimal, so folgt:

$$(x - x_1) + (y' - y)\frac{dy'}{dx} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 + (y' - y_1)\frac{d^2y'}{dx^2} = 0.$$

Ersetzt man in diesen drei Gleichungen die Grössen y', $\frac{dy'}{dx}$, $\frac{d^2y'}{d^2}$ durch ihre Werte gemäss den Gleichungen 1), so erhält man die drei folgenden:

$$2)\qquad \begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2, \\ (x - x_1) + (y - y_1)\dfrac{dy}{dx} = 0, \\ 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + (y - y_1)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0, \end{cases}$$

durch welche die Koordinaten x_1, y_1 des Mittelpunktes und der Radius R des im Kurvenpunkte x, y oskulierenden Kreises bestimmt werden.

Diese Gleichungen sind aber genau dieselben, wie die, durch welche der Krümmungskreis bestimmt wird; es folgt also, dass der oskulierende Kreis mit dem Krümmungskreis identisch ist.

Der oskulierende Kreis durchschneidet im allgemeinen die Kurve bei seiner Berührung, denn die Ordnung derselben ist eine gerade. Indessen kann die Berührung auch in besonderen Punkten von dritter Ordnung werden, und alsdann bleibt der Kreis in der Umgebung des Berührungspunktes ganz auf der nämlichen Seite der Kurve.

Die allgemeinen Betrachtungen des § 214 führen zu folgenden Sätzen:

1. Der in einem bestimmten Kurvenpunkte oskulierende Kreis ist die Grenze, nach welcher der Kreis konvergiert, welcher die Kurve in diesem Punkte berührt und noch durch einen zweiten Punkt hindurchgeht, wenn dieser zweite Punkt sich unbegrenzt dem ersten nähert und dabei stets auf der Kurve bleibt.

2. Der in einem bestimmten Kurvenpunkte oskulierende Kreis ist die Grenze, nach welcher ein Kreis konvergiert, welcher durch diesen Punkt und durch zwei andere Kurvenpunkte hindurchgeht, wenn diese letzteren beiden unbegrenzt dem ersten sich nähern, und dabei stets auf der Kurve bleiben.

Achtes Kapitel.

Anwendungen der Theorie ebener Kurven.

Die Fläche der Kegelschnitte.

218. Wiewohl die Messung der von Kurven begrenzten Flächen der Integralrechnung angehört, so wollen wir doch hier bereits einige der einfachsten Fälle und insbesondere die Kegelschnitte behandeln.

Fig. 88.

Die Parabelfläche. Es sei die Fläche des Segmentes MOM' zu bestimmen, welche zwischen dem Parabelbogen und seiner Sehne enthalten ist. Zur x-Axe wählen wir den Durchmesser Ox, der durch die Mitte P der Sehne MM' geht, und zur y-Axe die Tangente Oy im Endpunkte dieses Durchmessers.

Sind x, y die Koordinaten eines Punktes M, der als variabel gedacht ist, und Θ der Koordinatenwinkel, so wird das Differential der Fläche $OMP = u$ (§ 187):

$$du = y\,dx \sin\theta.$$

Die Gleichung $y^2 = 2px$ der Parabel ergiebt aber

$$y = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

also ist:

$$du = \sqrt{2p} \cdot \sin\theta \cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Da nun $x^{\frac{1}{2}}\,dx$ das Differential von $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ist, so hat die Fläche u das nämliche Differential wie die Funktion $\frac{2}{3}\sqrt{2p}\sin\theta\, x^{\frac{3}{2}}$ und unterscheidet sich daher von dieser Funktion nur um eine Konstante. Andererseits werden aber beide Funktionen

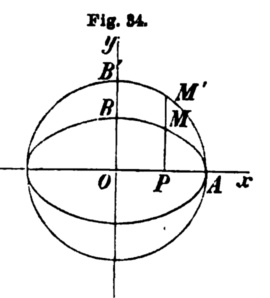
für $x = 0$ ebenfalls null; mithin muss diese Konstante gleich null sein und man erhält:

$$u = \frac{2}{3}\sqrt{2px} \cdot x \sin\theta \quad \text{oder} \quad u = \frac{2}{3} xy \sin\theta.$$

Diese Gleichung besagt, dass die Fläche OMP gleich $\frac{2}{3}$ der Fläche des Parallelogrammes $OMPQ$ ist, welches mit den Koordinaten des Punktes M gebildet ist. Desgleichen ist die Fläche $OM'P$ gleich $\frac{2}{3}$ des Parallelogrammes $OPM'Q'$, mithin ist das Segment MOM' auch gleich $\frac{2}{3}$ des Parallelogrammes $MM'Q'Q$.

219. Die Ellipsenfläche. Eine Ellipse sei bezogen auf ihren Mittelpunkt und ihre Hauptaxen; $2a$ und $2b$ seien die Längen der Axen, und es werde die Fläche u gesucht, welche zwischen den beiden Axen Ox, Oy, dem Bogen BM und der Ordinate MP liegt. Wird der Kreis konstruiert, welcher die grosse Axe $2a$ zum Durchmesser hat, und mit u' die Fläche bezeichnet, die zwischen den Axen Ox und Oy, dem Kreisbogen $B'M'$ und der Ordinate $M'P$ liegt, so ist

Fig. 34.



$$du = y\,dx, \quad du' = y'dx.$$

Da aber y' und y die Ordinaten des Kreises und der Ellipse sind, so ist $\frac{y'}{a} = \frac{y}{b}$, also

$$du = \frac{b}{a}\,du'.$$

Mithin haben die Grössen u und $\frac{b}{a}u'$ dasselbe Differential, und weil sie gleichzeitig mit x verschwinden, so sind sie notwendig selbst unter einander gleich, d. h. es ist

$$u = \frac{b}{a}\,u'.$$

Die ganze Kreisfläche ist πa^2, die ganze Elipsenfläche demnach πab.

220. Die Hyperbelfläche. Wir betrachten eine Hyperbel, die auf ihre beiden Asymptoten als Koordinatenaxen bezogen ist; ihre Gleichung wird

Fig. 35.

$$xy = m^2,$$

u bezeichne die Fläche, die zwischen der Kurve, der x-Axe und den Ordinaten AC, PM liegt; von den letzteren ist die eine fest, die andere variabel gedacht. Es ist

$$du = y\,dx \sin\theta = m^2 \sin\theta \frac{dx}{x}.$$

$\frac{dx}{x}$ ist aber das Differential des natürlichen Logarithmus von x; also ist

$$u = m^2 \sin\theta\, l(x) + \text{Konst.}$$

Die Fläche u muss null werden, wenn x gleich der Abscisse x_0 des Punktes C ist, folglich ist

$$0 = m^2 \sin\theta\, l(x_0) + \text{Konst.} \quad \text{oder} \quad \text{Konst.} = -m^2 \sin\theta\, l(x_0).$$

Demnach wird

$$u = m^2 \sin\theta\, l \frac{x}{x_0}.$$

Ist die Hyperbel gleichseitig, so ist $\theta = 90^0$. Wählen wir also als feste Anfangsordinate die des Scheitels C der Hyperbel, und setzen wir m gleich der Längeneinheit, so wird

$$u = l(x).$$

Die durch die verschiedenen Ordinaten der gleichseitigen Hyperbel begrenzten Flächen sind also gleich den Logarithmen der entsprechenden Abscissen. Auf Grund dieser Eigenschaft heissen die natürlichen Logarithmen auch die *hyperbolischen*.

Das Bogenelement der Kegelschnitte.

221. Das Bogenelement der Ellipse. Die Koordinaten einer Ellipse, bezogen auf Mittelpunkt und Hauptaxen, lassen sich als Funktionen eines variabelen Winkels φ durch die Gleichungen

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b \cos\varphi$$

ausdrücken; a und b sind die Längen der Halbaxen, φ die excentrische Anomalie, gerechnet von der kleinen Axe. Konstruiert man nämlich den konzentrischen Kreis mit dem Durchmesser $2a$, so wird der zu einem Punkte M der Fläche zugehörige Winkel φ gefunden, indem man die Ordinate PM (Figur in § 219) bis zu ihrem Durchschnitte M' mit diesem Kreise verlängert; es ist alsdann $\angle B'OM' = \varphi$. Aus den obigen Gleichungen folgt

$$dx = a \cos\varphi\, d\varphi, \quad dy = -b \sin\varphi\, d\varphi,$$

$$ds = \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Bezeichnet man mit k die Excentricität, d. h. das Verhältnis $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, so gewinnt dieser Ausdruck die Form:

$$1) \qquad ds = a\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

statt der man auch schreiben kann:

$$2) \qquad \frac{ds}{a} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - k^2 \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Bisweilen ist es auch notwendig, ds als Funktion des Winkels λ zu bestimmen, den die Normale der Kurve mit der x-Axe bildet. Nach den vorigen Formeln wird:

$$\operatorname{tang}\lambda = -\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}\operatorname{cotg}\varphi, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{a}{b}\operatorname{cotg}\lambda,$$

also:

$$a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2\lambda + b^2 \sin^2\lambda}$$

und

$$d\varphi = -\frac{a}{b}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\lambda}\, d\lambda = -\frac{ab\, d\lambda}{a^2 \cos^2\lambda + b^2 \sin^2\lambda}.$$

Also folgt:

$$ds = \frac{a^2 b^2\, d\lambda}{(a^2 \cos^2\lambda + b^2 \sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}},$$

oder:

$$ds = \frac{b^2}{a}\frac{d\lambda}{(1 - k^2 \sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

$d\lambda$ ist nichts anderes als der Kontingenzwinkel, und also stellt $\frac{ds}{d\lambda}$ den Krümmungsradius dar.

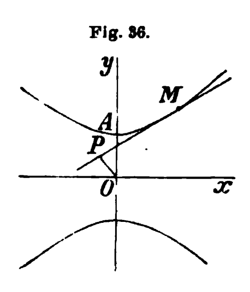


Fig. 36.

222. Das Bogenelement der Hyperbel. Für das Differential des Hyperbelbogens kann man einen ganz ähnlichen Ausdruck wie bei der Ellipse aufstellen. Wählen wir zur x-Axe die Hauptaxe, welche die Kurve nicht schneidet, zur y-Axe die andere, und bezeichnen wir mit $2a$ die Länge der ersten Axe, mit $2b = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \cdot 2a$ die Länge der zweiten, so wird die Gleichung der Kurve

$$y = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{x^2 + a^2} \qquad \left(k^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2}\right).$$

Die Koordinaten x, y lassen sich als Funktionen eines Winkels φ ausdrücken, indem man

$$x = a\sqrt{1-k^2} \operatorname{tang} \varphi, \quad y = \frac{ak}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}$$

setzt. Dieselben genügen bei jedem Werte von φ der Kurvengleichung. Hieraus folgt:

$$dx = a\sqrt{1-k^2} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad dy = a\sqrt{1-k^2} \frac{k \sin \varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi,$$

und es wird

$$1)\quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\sqrt{1-k^2} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Durch den Endpunkt M des Bogens s, dessen Anfang wir im Scheitel A der y-Axe annehmen, legen wir die Tangente MP und fällen vom Mittelpunkte die Senkrechte OP auf dieselbe. Die Gleichung der Geraden OP wird

$$\eta k \sin \varphi + \xi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = 0.$$

Bezeichnet t die Strecke MP der Tangente, welche die Entfernung des Punktes M von der Geraden OP misst, so ist

$$t = \frac{a}{\sqrt{1-k^2}} \operatorname{tang} \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi},$$

und differentiiert man diesen Ausdruck, so folgt:

$$2)\qquad dt = a\sqrt{1-k^2}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$+\frac{ak^2}{\sqrt{1-k^2}}\left(\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right).$$

Subtrahiert man nun die Gleichung 2) von der Gleichung 1), so wird

$$3)\quad d(s-t) = \frac{ak^2}{\sqrt{1-k^2}}\left(\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right).$$

Die Grösse t ist eine algebraische Funktion der Koordinaten, und man sieht, dass das Differential der Differenz $s-t$ eine ähnliche Form hat, wie das Differential des Ellipsenbogens.

223. Das Differential des Parabelbogens und seine Rektifikation. Es sei

$$y^2 = 2px$$

die Gleichung einer Parabel, bezogen auf ihre Hauptaxe, und die Scheiteltangente, ferner α der Winkel zwischen der Tangente und der x-Axe, so ist

Fig. 87.

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

oder

$$y = p\operatorname{cotg}\alpha,\quad x = \frac{p}{2}\operatorname{cotg}^2\alpha.$$

Hieraus folgt:

$$dy = -\frac{p\,d\alpha}{\sin^2\alpha},\quad dx = -\frac{p\operatorname{cotg}\alpha\,d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Bezeichnet man ferner mit s den Bogen der Kurve vom Scheitel an, so wird

$$1)\qquad ds = -\frac{p\,d\alpha}{\sin^3\alpha}.$$

Wir setzen das negative Zeichen vor diesen Ausdruck, weil die Quadratwurzel, welche das Zeichen Plus oder Minus hat, fortgefallen ist und s eine abnehmende Funktion ist, wenn α wächst.

Bezeichnen wir mit t die Länge der Tangente zwischen dem Berührungspunkte M, der zugleich Endpunkt des Bogens s ist, und dem Schnittpunkt P mit der y-Axe, so ist

$$t = \frac{x}{\cos\alpha} \quad \text{oder} \quad t = \frac{p}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

demnach

2) $$dt = \frac{p}{2}\,\frac{d\alpha}{\sin\alpha} - p\,\frac{d\alpha}{\sin^3\alpha}.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der Gleichung 1), so folgt:

3) $$d(s-t) = -\frac{p}{2}\,\frac{d\alpha}{\sin\alpha}.$$

Im § 44 wurde gezeigt, dass $\frac{d\alpha}{\sin\alpha}$ das Differential von $l\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\right)$ ist, mithin ist

$$s - t = -\frac{p}{2}\,l\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\right) + \text{Konst.}$$

Der Bogen s und die Strecke t verschwinden für $\alpha = \frac{\pi}{2}$, folglich ist die Konstante null und man hat

4) $$s = t - \frac{p}{2}\,l\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\right).$$

224. Dies Resultat giebt ohne weiteres die Lösung eines nicht uninteressanten Problemes. Die Linie PF, welche den Punkt P mit dem Brennpunkte der Parabel verbindet, steht senkrecht zur Tangente MT und ihre Länge ist

$$PF = \frac{p}{2\sin\alpha}.$$

Wählen wir nun den Punkt J auf der Verlängerung von MP so, dass MJ gleich dem Bogen s ist, so wird

$$JP = s - t = -\frac{p}{2}\,l\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\right).$$

Wenn wir jetzt die Linie JS senkrecht zu JT konstruieren und die beiden Geraden JT und JS zu Koordinatenlinien machen, so werden die Koordinaten x, y des Brennpunktes F

$$y = \frac{p}{2\sin\alpha}, \quad x = -\frac{p}{2}\,l\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\right).$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$e^{-\frac{2x}{p}} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha, \quad e^{\frac{2x}{p}} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha,$$

oder

$$e^{\frac{2x}{p}} + e^{-\frac{2x}{p}} = \frac{2}{\sin\alpha},$$

und auf Grund der ersten Gleichung wird also:

5) $$e^{\frac{2x}{p}} + e^{-\frac{2x}{p}} = \frac{4y}{p} \quad \text{oder} \quad y = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{2x}{p}} + e^{-\frac{2x}{p}}\right).$$

Es ist nun leicht einzusehen, dass dies die Gleichung der Kurve wird, welche der Brennpunkt beschreibt, wenn die Parabel, ohne zu gleiten, auf der festen Geraden JT rollt. Diese Kurve ist die *Kettenlinie*.

Der Krümmungsradius der Kegelschnitte.

225. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte kann immer auf die Form

1) $$y^2 = 2px + qx^2$$

gebracht werden, wobei x und y rechtwinklige Koordinaten sind. Es ist dies die Scheitelgleichung der Kurve. Durch zwei aufeinander folgende Differentiationen erhält man:

2) $$y\frac{dy}{dx} = p + qx,$$

3) $$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = q.$$

Multipliziert man die Gleichungen 1) und 3) und subtrahiert man alsdann die Gleichung 2), nachdem dieselbe ins Quadrat erhoben ist, so folgt

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2.$$

Der Ausdruck für den Krümmungsradius

$$R = \pm\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

wird folglich:

$$R = \frac{\left[y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Nun ist aber
$$y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = N^2,$$
wenn N die Länge der Normalen bedeutet, folglich ist

4) $$R = \frac{N^3}{p^2}.$$

Der Krümmungsradius der Kegelschnitte ist also dem Kubus der Normalen proportional, letztere gerechnet vom Berührungspunkte bis zum Durchschnitt mit der Axe.

Die Gleichung 2) giebt zum Quadrat erhoben:
$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = p^2 + 2pqx + q^2x^2 = p^2 + qy^2,$$
und folglich ist

5) $$N^2 = p^2 + (1+q)\,y^2,$$

wodurch man also den Krümmungsradius als Funktion von einer der beiden Koordinaten ausdrücken kann.

Ein anderer bemerkenswerter Ausdruck für R wird erhalten, wenn man den Winkel γ einführt, den die Normale mit dem von einem Brennpunkt ausgehenden Radiusvektor bildet. Bezeichnet man mit ϱ diesen Radius und mit ω den Winkel, den er mit der x-Axe bildet, so hat man bekanntlich
$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1 + \sqrt{1+q}\cos\omega}{p}, \quad \text{daher} \quad \frac{d\varrho}{\varrho^2} = \frac{\sqrt{1+q}\sin\omega}{p}\,d\omega.$$

Der Winkel γ ist nun bestimmt durch die Gleichung
$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega},$$
und wird demnach hier
$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\sqrt{1+q}}{p}\,\varrho\sin\omega = \frac{y\sqrt{1+q}}{p}.$$

Die Gleichung 5) reduziert sich also auf

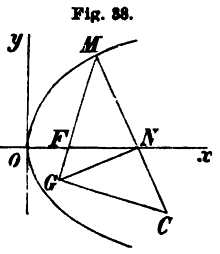
6) $$N = \frac{p}{\cos\gamma}.$$

Die Projektion der Normalen auf den von einem Brennpunkt ausgehenden Radiusvektor ist also bei einem Kegelschnitte konstant und gleich dem Parameter.

Der Ausdruck 4) für den Krümmungsradius wird, indem man N durch seinen Wert aus der Gleichung 6) ersetzt:

7) $$R = \frac{p}{\cos^3 \gamma} \quad \text{oder} \quad R = \frac{N}{\cos^2 \gamma}.$$

226. Die letzte Formel führt zu einer einfachen Konstruktion des Krümmungsradius. Man ziehe die Normale in M bis zu ihrem Durchschnittspunkt N mit der Brennpunktsaxe und verbinde den Punkt M mit dem Brennpunkte F, alsdann errichte man in N die zur Normale Senkrechte NG bis zu ihrem Durchschnitt G mit dem Radiusvektor MF und konstruiere endlich im Punkte G das Lot GC auf dem Radius, bis es die Normale in C schneidet, so wird der Punkt C der Krümmungsmittelpunkt des Punktes M. Denn es ist



$$MG = \frac{MN}{\cos \gamma} = \frac{N}{\cos \gamma} \quad \text{und} \quad MC = \frac{MG}{\cos \gamma} = \frac{N}{\cos^2 \gamma},$$

folglich

$$MC = R.$$

Die Evolute der Kegelschnitte.

227. Evolute der Ellipse. Aus der Flächengleichung

1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

folgt durch Differentiation:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

ferner:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2(a^4 - c^2x^2)}{a^4y^2} = \frac{b^4 + c^2y^2}{a^2y^2},$$

wenn man

$$c^2 = a^2 - b^2$$

setzt. Die Gleichungen:

$$x_1 = x - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad y_1 = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden folglich:

2) $$x_1 = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \quad y_1 = -\frac{c^2 y^3}{b^4}.$$

Nimmt man also c^2 positiv an, d. h. $a^2 > b^2$, und setzt man

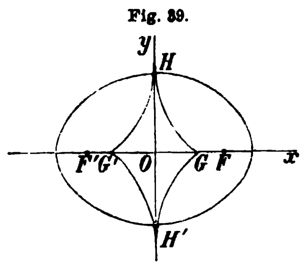
$$a_1 = \frac{c^2}{a}, \quad b_1 = \frac{c^2}{b},$$

so folgt aus den Gleichungen 2) auf Grund der Gleichung 1)

3) $$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

welches die gesuchte Gleichung für die Ellipsenevolute ist. Diese Evolute $GHG'H'$ hat als Symmetrieaxen die Hauptaxen der Kurve, und die Punkte GG', in denen sie die Brennpunktsaxe schneidet, liegen zwischen den Brennpunkten F, F' der Ellipse, weil $a_1 < c$. Ferner erkennt man aus den Gleichungen 2), dass jeder Quadrant der Ellipse und der entsprechende Quadrant der Evolute in den zwei Nebenwinkeln gelegen sind, welche mit der nämlichen Richtung der x-Axe und den beiden entgegengesetzten Richtungen der y-Axe gebildet werden. Auch kann man bemerken, dass die Evolute ganz innerhalb der Fläche liegt, wenn $b_1 < b$ oder

Fig. 39.



$$\frac{a^2 - b^2}{b} < b, \quad \text{d. h.} \quad a < b\sqrt{2}$$

ist. Sie trifft die Ellipse in den Scheitelpunkten der kleinen Axe, wenn

$$a = b\sqrt{2}$$

ist; sie schneidet die Ellipse in vier Punkten, wenn

$$a > b\sqrt{2}$$

ist. Die Krümmungsradien der Ellipse in den Endpunkten der kleinen und der grossen Axe sind bezüglich $b + b_1$ und $a - a_1$

oder $\frac{a^2}{b}$ und $\frac{b^2}{a}$. Die Länge eines Quadranten der Evolute ist folglich

$$\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{ab}.*$$

Differentiiert man die Gleichung 3) zweimal, so folgt, indem man $dx_1 =$ Konst. setzt:

$$\frac{1}{a_1}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{b_1}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{dy_1}{dx_1} = 0,$$

$$-\frac{1}{3a_1^2}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3b_1^2}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 + \frac{1}{b_1}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0$$

und hieraus:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{b_1^{\frac{2}{3}}}{a_1^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{y_1^{\frac{1}{3}}}{x_1^{\frac{1}{3}}},\quad \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{b_1^{\frac{4}{3}}}{3a_1^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{1}{3}}y_1^{\frac{1}{3}}}.$$

Der Krümmungsradius R_1 der Evolute wird also

$$R_1 = \frac{3x_1^{\frac{1}{3}}y_1^{\frac{1}{3}}\left(a_1^{\frac{4}{3}}x_1^{\frac{2}{3}} + b_1^{\frac{4}{3}}y_1^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{a_1^{\frac{4}{3}}b_1^{\frac{4}{3}}}.$$

Der Wert $\frac{dy_1}{dx_1}$ ist null in den Schnittpunkten G, G' mit der grossen Axe, und unendlich in den Schnittpunkten H, H' der kleinen Axe. Hieraus erkennt man, dass diese vier Punkte Rückkehrpunkte erster Art sein müssen. In jedem derselben wird der Krümmungsradius R_1 gleich null. Der Wert von $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ hat immer dasselbe Vorzeichen wie y_1. Die Evolute ist demnach stets konvex nach der Abscissenaxe gerichtet.

228. Evolute der Hyperbel. Bei der Rechnung, die uns zur Gleichung der Ellipsenevolute führte, braucht b^2 nicht als positiv angenommen zu werden; sie gilt daher auch für die Hyperbel. Schreibt man $-b^2$ an Stelle von b^2, so erhält die mit c^2 bezeichnete Grösse den Wert

* Die Länge eines Teiles der Evolute, in welchem ein Rückkehrpunkt liegt, kann nicht durch die Differenz der zu den Endpunkten gehörigen Krümmungsradien dargestellt werden, weil diese sich längs des Bogens nicht mehr bloss in demselben Sinne ändern. Dieser Einschränkung unterliegt auch der allgemeine Satz pag. 288.

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

und die Gleichungen 1) und 3) des vorigen Paragraphen werden:

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$2)\qquad x_1 = + \frac{c^2 x^3}{a^4}, \quad y_1 = - \frac{c^2 y^3}{b^4}.$$

Die Gleichung 1) stellt die Hyperbel, die Gleichungen 2) die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes derselben dar. Setzt man wie früher:

$$a_1 = \frac{c^2}{a}, \quad b_1 = \frac{c^2}{b},$$

so giebt die Elimination von x und y:

$$3)\qquad \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Man erkennt leicht vermittelst dieser Gleichungen, dass die Hyperbelevolute aus zwei unendlichen Ästen HGK, $H'G'K'$ besteht, die zu den beiden Axen symmetrisch, und nach der reellen Axe konvex gelegen sind. Die Punkte G, G', in denen sie diese Axe trifft, sind Rückkehrpunkte erster Art. Sie liegen ausserhalb der Brennpunktsstrecke FF', weil $a_1 > c$ ist.

Fig. 40.

229. Evolute der Parabel. Die Scheitelgleichung

$$y^2 = 2px$$

ergiebt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3},$$

also

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right) = \frac{2px + p^2}{y^2},$$

und hieraus folgen für die Koordinaten x_1, y_1 des Krümmungsmittelpunktes die folgenden Werte:

$$x_1 = x - \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 3x + p,$$

$$y_1 = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{y^3}{p^2},$$

oder:

$$x = \frac{1}{3}(x_1 - p), \quad y = -\sqrt[3]{y_1 p^2}.$$

Trägt man diese Werte in die Gleichung der Parabel ein, so erhält man die der Evolute, nämlich

$$y_1^2 = \frac{8}{27}\frac{(x_1-p)^3}{p}.$$

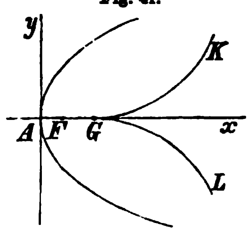


Fig. 41.

Durch Differentiation folgt:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{\sqrt[3]{p}} y_1^{\frac{1}{3}}, \quad y_1 \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{3p^{\frac{2}{3}}} y_1^{\frac{2}{3}}.$$

Diese Gleichungen beweisen, dass die Evolute der Parabel aus zwei unendlichen Ästen GK, GL besteht, die sich im Punkte G der Hauptaxe vereinigen. Dieser Punkt, dessen Abscisse gleich p ist, ist ein Rückkehrpunkt erster Art. Die Evolute kehrt die konvexe Seite der Parabelaxe zu.

Die Cykloide.

230. Die *Cykloide* wird erzeugt durch einen festen Punkt auf der Peripherie eines Kreises, wenn dieser ohne zu gleiten, auf einer festen unbegrenzten Geraden rollt.

Zur x-Axe wählen wir die Gerade Ax, auf welcher der gegebene Kreis rollt, und zum Anfangspunkte einen unter den Punkten A auf dieser Geraden, mit welchen der erzeugende Punkt der Cykloide zusammenfallen kann. Da sich die Bewegung des rollenden Kreises unbegrenzt fortsetzt und dabei immer wieder der erzeugende Punkt auf die Basislinie kommt, so besteht die Cykloide aus unendlich vielen Teilen, die unter

einander kongruent sind und auf derselben Seite der Geraden Ax, zur Rechten oder Linken des Punktes A liegen. Die Gleichung der Kurve lässt sich leicht ableiten. Die y-Axe sei senkrecht zur Abscissenaxe Ax gewählt, es werde ein Punkt M der Cykloide betrachtet; bei der zugehörigen Lage des erzeugenden Kreises sei H der Berührungspunkt zwischen Kreis und Basislinie.

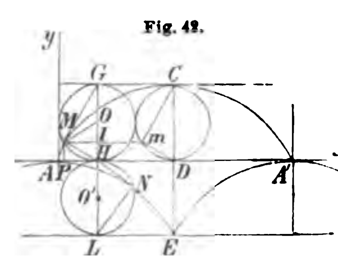


Fig. 42.

Es seien nun

$$AP = x, \quad MP = y$$

die Koordinaten von M. Wir verbinden diesen Punkt mit dem Mittelpunkt O des erzeugenden Kreises HMG und fällen die Senkrechte MI auf GH. Dann ist

$$x = AH - PH = AH - MI,$$
$$y = OH - OI.$$

Bezeichnet man nun mit a den Radius des erzeugenden Kreises, mit φ die jeweilige Grösse des Wälzungswinkels, d. h. den Winkel, welchen der Radius MO mit der Richtung OH bildet, so ist

$$MI = a \sin \varphi, \quad OI = a \cos \varphi.$$

Nun ist die Länge AH gleich der Länge des Bogens $MH = a\varphi$ gemäss der Definition der Cykloide. Mithin wird

$$1) \qquad x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(1 - \cos \varphi)$$

und man erhält alle Punkte der Kurve, wenn man der Grösse φ alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ beilegt. Die zweite der Gleichungen 1) ergiebt:

$$2) \qquad \cos \varphi = \frac{a-y}{a}, \quad \varphi = \arccos \frac{a-y}{a},$$

daher

$$3) \qquad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}$$

und substituiert man diese Werte in die erste der Gleichungen 1), so folgt:

$$4) \qquad x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Die Wurzel kann mit dem positiven und mit dem negativen Zeichen genommen werden, je nach dem Werte von φ.

Die Gleichung 4) ist die Kurvengleichung als Relation zwischen x und y. Doch ist es nicht vorteilhaft, sie an Stelle der Gleichungen 1) zu setzen, und wir behalten daher die letzteren bei.

231. Tangente und Normale der Cykloide. Aus der Differentiation der Gleichungen 1) folgt:

$$5)\qquad \begin{aligned} dx &= a(1-\cos\varphi)\,d\varphi, \\ dy &= a\sin\varphi\,d\varphi. \end{aligned}$$

Der Ausdruck für die Subnormale N' wird auf Grund der Gleichungen 1) und 5)

$$6)\qquad N' = y\,\frac{dy}{dx} = a\sin\varphi = PH.$$

Hieraus folgt, dass MH die Normale der Kurve ist, und dass folglich die Gerade MG, welche den Punkt M mit dem Gegenpunkte von H auf dem Kreise verbindet, die Tangente ist.

Dies Ergebnis führt zu einem einfachen Verfahren, um die Tangente in einem beliebigen Punkt M der Cykloide zu konstruieren. Wir bemerken zunächst, dass das Maximum von y gleich $2a$ ist und jedesmal eintritt, sobald φ gleich π oder einem ungeraden Vielfachen von π ist. Da aber alles, was von einem Teile der Kurve ausgesagt wird, auch für alle anderen gilt, so haben wir nur den Teil zu betrachten, der seinen Anfang im Punkte A hat. Dann gehört zu dem Maximum der Wert $x = \pi a$; das ist die Mitte der Basis der Cykloide. Konstruiert man nun über der Maximalordinate CD als Durchmesser den erzeugenden Kreis CmD, und legt durch den Punkt M die Gerade Mm parallel zu Ax, verbindet man ferner den Punkt m, in welchem die Gerade den Halbkreis CmD schneidet, mit C, und zieht endlich durch den Punkt M die Gerade MG parallel zu mC, so wird diese Gerade die gesuchte Tangente.

Vermittelst der Gleichung 3) kann man dem Ausdruck für die Subnormale N' die Form geben:

$$N' = \sqrt{2ay - y^2}, \tag{7}$$

und da die Normale N gleich $\sqrt{N'^2 + y^2}$ ist, so wird

$$N = \sqrt{2ay},$$

oder

$$N = 2a \sin \frac{1}{2} \varphi. \tag{8}$$

Schreibt man in der Gleichung 7) an Stelle von N' seinen Ausdruck $y\frac{dy}{dx}$, so erhält man die *Differentialgleichung* der Cykloide, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}. \tag{9}$$

Es ist mitunter auch von Vorteil, den Anfangspunkt der Koordinaten in den Scheitel C der Cykloide zu verlegen und die Geraden GC und CD als x- und y-Axe zu wählen. Man muss alsdann in den Gleichungen a durch $\pi a + x$, und y durch $2a - y$ ersetzen. Macht man z. B. diese Substitution in der Gleichung 9), so wird

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}.$$

Wir haben dabei das Zeichen auf der linken Seite nicht geändert, weil das Vorzeichen auf der rechten Seite zweideutig bleiben kann.

232. Quadratur der Cykloide. Bezeichnet man mit u die Fläche, welche zwischen der Kurve, ihrer Basis und der Ordinate $MP = y$ enthalten ist, so ist

$$du = y\,dx = a^2(1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi.$$

Setzt man

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi),$$

so wird

$$du = a^2\left(\frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi.$$

Die rechte Seite ist, wie leicht ersichtlich, das Differential der Funktion

$$a^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right).$$

Ferner verschwindet diese Funktion ebenso wie u für $\varphi = 0$; folglich ist

$$10)\qquad u = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right).$$

Will man die ganze Fläche U bestimmen, die von dem einen Zweige der Kurve und der Basis begrenzt ist, so hat man $\varphi = 2\pi$ zu setzen und dies ergiebt

$$11)\qquad U = 3\pi a^2.$$

Die ganze Fläche eines Zweiges der Cykloide ist demnach gleich dem Dreifachen der Fläche des erzeugenden Kreises.

233. Rektifikation der Cykloide. Die Gleichungen 5) im § 231 geben

$$dx^2 + dy^2 = 2a^2(1-\cos\varphi)\,d\varphi^2 = 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi^2,$$

also

$$12)\qquad ds = 2a\sin\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi.$$

Die rechte Seite ist das Differential von $-4a\cos\frac{1}{2}\varphi$; also ist

$$s = -4a\cos\frac{1}{2}\varphi + \text{Konst.}$$

Wählt man den Punkt A zum Anfang des Bogens s, so wird dieser Bogen null für $\varphi = 0$; mithin ist

$$0 = -4a + \text{Konst.},$$

d. h. die Konstante ist gleich $4a$, und man hat

$$13)\qquad s = 4a\left(1-\cos\frac{1}{2}\varphi\right) = 8a\sin^2\frac{1}{4}\varphi.$$

Die ganze Länge S eines Zweiges der Kurve ergiebt sich für $\varphi = 2\pi$, und demnach ist

$$14)\qquad S = 8a.$$

Diese Länge ist also gleich dem Vierfachen des Durchmessers des erzeugenden Kreises.

234. Krümmungsradius der Cykloide. Der Winkel, den die Tangente der Kurve mit der y-Axe bildet, ist gleich der Hälfte des Winkels φ. Hieraus folgt, dass der Kontingenzwinkel gleich $\frac{1}{2}d\varphi$ und der Krümmungsradius

$$R = 2\frac{ds}{d\varphi}$$

ist. Die Gleichung 12) ergiebt $\frac{ds}{d\varphi} = 2a \sin\frac{1}{2}\varphi$, und dies ist nach Gleichung 8) die Länge N der Normalen; also ist

15) $$R = 2N,$$

d. h. der Krümmungsradius ist das Doppelte der Normalen.

235. Evolute der Cykloide. Aus diesem Resultate lässt sich ohne Rechnung die Evolute der Cykloide bestimmen. Wir verlängern den Durchmesser GH des Kreises O um die Länge $HL = GH$ unterhalb der Axe Ax (Figur in § 230) und konstruieren über HL als Durchmesser den Kreis O', der im Punkte N die verlängerte Normale MH schneidet, ferner ziehen wir an diesen Kreis die Tangente LE parallel zu Ax, welche die Maximalordinate CD in E schneidet. Aus der Gleichheit der Winkel MHG, LHN folgt die der Bögen MG, LN und der supplementären MH, HN. Die Sehnen MH und HN sind ebenfalls gleich, und folglich ist N der zum Punkte M gehörige Krümmungsmittelpunkt. Der Bogen HN ist gleich der Länge AH und also das Supplement LN desselben gleich HD oder LE.

Mithin kann die Evolute der Cykloide durch einen Punkt N auf der Peripherie eines Kreises mit dem Radius a erzeugt werden, wenn dieser ohne zu gleiten auf einer Geraden EL rollt, die parallel zu Ax in der Entfernung $2a$ liegt, derart, dass die Lagen des Punktes N auf der Geraden EL den nämlichen Abscissenwerten entsprechen, wie die Maximalordinaten der ursprünglichen Cykloide. Die Evolute ist also ebenfalls eine Cykloide, welche der ersten gleich ist.

Dasselbe erkennt man auch ohne Benutzung der Gleichung für den Krümmungsradius. Denn während MG die Tangente der ersten Cykloide im Punkte M ist, ist NH die Tangente im Punkte N der zweiten. Diese ist also die Enveloppe der Normalen zur ursprünglichen Kurve, und folglich die Evolute derselben.

Endlich ergiebt sich auch dieser Satz sehr leicht aus den allgemeinen Gleichungen für die Koordinaten x_1, y_1 des Krüm-

mungsmittelpunktes. Die Differentiation der Gleichungen 5) in § 231 liefert, indem $d\varphi$ als konstant genommen wird:

16) $$d^2x = a \sin\varphi\, d\varphi^2, \quad d^2y = a \cos\varphi\, d\varphi^2,$$

und mittelst der Gleichungen 5) und 16) werden die allgemeinen Gleichungen des § 197:

$$x_1 = a(\varphi + \sin\varphi), \quad y_1 = -a(1 - \cos\varphi).$$

Verschiebt man nun die Koordinatenaxen parallel zu sich in den Punkt, dessen Koordinaten $x = \pi a$ und $y = -2a$ sind, so muss man an Stelle von x_1 und y_1 $\pi a + x_1$ und $-2a + y_1$ schreiben, und wenn man gleichzeitig $\varphi_1 + \pi$ an Stelle von φ einführt, so erhält man die Gleichungen:

$$x_1 = a(\varphi_1 - \sin\varphi_1), \quad y_1 = a(1 - \cos\varphi_1),$$

welche in der That eine der ursprünglichen gleiche Cykloide darstellen.

236. Diese Eigenschaft der Cykloide führt nun auch unmittelbar zu ihrer Rektifikation. Denn der Bogen EN der Evolute ist gleich der Differenz

$$EC - MN = 4a - 4a \sin\frac{1}{2}\varphi$$

zwischen den Krümmungsradien der Punkte C und M. Andererseits ersieht man, dass der Bogen $s = AM$ erhalten wird, wenn man in diesem Ausdruck $\pi - \varphi$ statt φ setzt; also ist

$$s = 4a - 4a \cos\frac{1}{2}\varphi = 8a \sin^2\frac{1}{2}\varphi.$$

Dieselbe Eigenschaft der Cykloide liefert noch ein Mittel, die Quadratur dieser Kurve zu erhalten; wir beschränken uns indess auf diese Angabe, welche der Leser selbst wird ausführen können.

Die Epicykloiden.

237. Epicykloide nennt man die Kurve, welche von einem bestimmten Punkt auf der Peripherie eines Kreises erzeugt wird, wenn dieser ohne zu gleiten auf einem anderen festen Kreise rollt. Die Cykloide gehört also zur Klasse der Epicykloiden; bei ihr wird der Radius des festen Kreises unendlich.

Die Epicykloide heisst eine *innere* oder *äussere*, je nachdem sie im Innern des festen Kreises oder ausserhalb desselben gelegen ist. Jede Epicykloide kann vermittelst zweier verschiedener Kreise erzeugt werden, die auf demselben festen Kreise rollen. Die Radien dieser beiden Kreise haben entweder zu ihrer Summe oder zu ihrer Differenz den Radius des festen Kreises, je nachdem es sich um eine innere oder um eine äussere Epicykloide handelt

Nehmen wir nämlich an, dass die innere oder äussere Epicykloide erzeugt sei durch einen Punkt M des Kreises A,

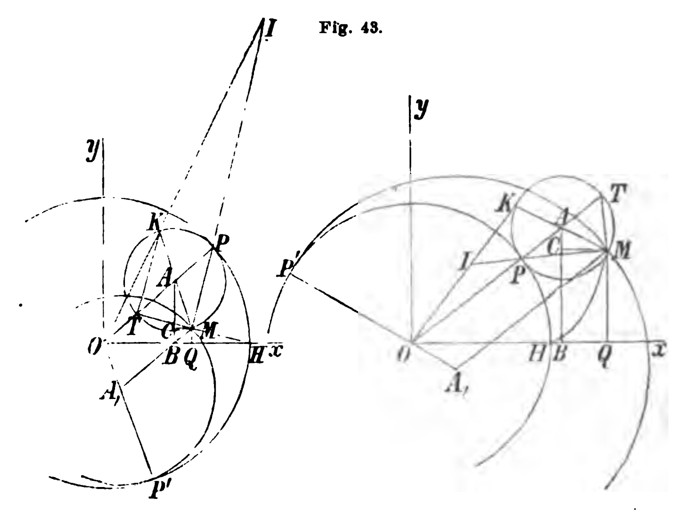


Fig. 43.

der auf dem festen Kreise O rollt. Es sei H einer der Punkte des festen Kreises, mit denen der erzeugende Punkt zusammenfallen kann, und P ein bestimmter Berührungspunkt der beiden Kreise. Wir ziehen AM und konstruieren über den Linien AO, AM das Parallelogramm $OAMA'$; wir beschreiben endlich einen Kreis um den Punkt A' als Mittelpunkt mit dem Radius $A'M$. Dieser Kreis wird den Kreis O in einem Punkte P' berühren, der auf der Verlängerung der Linie OA' gelegen ist. Denn bezeichnet man mit r den Radius des Kreises O, mit a und a' die Radien der Kreise A und A', so ist

$$r = a + a'$$

bei der inneren Epicykloide, und

$$r = a' - a$$

bei der äusseren. Da nun die Winkel PAM, $P'A'M$, POP' gleich sind, so ist

$$\frac{\operatorname{arc} PM}{a} = \frac{\operatorname{arc} P'M}{a'} = \frac{\operatorname{arc} PP'}{r},$$

also

$$\frac{\operatorname{arc} P'M \pm \operatorname{arc} PM}{a' \pm a} = \frac{\operatorname{arc} PP'}{r},$$

und weil $a' \pm a = r$ ist, so ist

$$\operatorname{arc} P'M \pm \operatorname{arc} PM = \operatorname{arc} PP'.$$

Das obere Zeichen entspricht der inneren, das untere der äusseren Epicykloide. In beiden Fällen aber hat man

$$\operatorname{arc} PM = \operatorname{arc} PH$$

nach der Definition für die Erzeugung der Kurve; folglich ist auch

$$\operatorname{arc} P'M = \operatorname{arc} P'H,$$

und demnach kann die Epicykloide auch erzeugt werden durch einen Punkt M, sowohl des Kreises A, als auch des Kreises A', die auf dem Kreise O rollen.

Dabei ist noch folgendes zu bemerken: Wird eine äussere Epicykloide erzeugt, indem ein Kreis vom Radius a auf dem Kreise r rollt, sodass die beiden Kreise sich mit ihren konvexen Seiten berühren, wobei $a \gtrless r$ sein kann, so ist $a' = r + a$ und der zweite erzeugende Kreis berührt mit seiner konkaven Seite die konvexe des festen.

Wird eine innere Epicykloide erzeugt, indem ein Kreis vom Radius a auf dem Kreise r rollt, so dass die konvexe Seite des beweglichen die konkave des festen berührt, so ist $a < r$ und $a' = r - a$; und dieser zweite Kreis liegt ebenfalls im Innern des festen.

Geht man dagegen von einem Kreise $a > r$ aus, der mit seiner konkaven Seite die konvexe des festen berührt, so hat man die Formel für die äussere Epicykloide anzuwenden, jedoch mit Vertauschung der Vorzeichen auf der rechten Seite, es wird $a' = a - r$, also $r = a - a'$.

238. Beziehen wir die Kurve auf zwei rechtwinklige Axen Ox, Oy, von denen die erste durch den Punkt H geht, und bezeichnen wir mit φ den Wälzungswinkel MAP, der von dem

Radius AM des erzeugenden Punktes beschrieben ist, wenn sich derselbe aus seiner anfänglichen Lage HO bewegt hat, — dieser Winkel φ kann von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren, denn die Bewegung kann als eine unbegrenzte betrachtet werden —, so sind die Bogen PM und PH gleich $a\varphi$ und der Winkel POH wird gleich $\frac{a\varphi}{r}$.

$OQ = x$ und $MQ = y$ sind die Koordinaten des Punktes M. Fällt man AB senkrecht auf Ox und MC senkrecht auf AB, so ist, nach der Figur:

$$x = OB + MC, \quad y = AB - AC,$$

und die Dreiecke OAB, OMC ergeben:

$$x = (r \pm a) \cos \frac{a\varphi}{r} \mp a \cos \left(\frac{a\varphi}{r} \pm \varphi\right),$$

$$y = (r \pm a) \sin \frac{a\varphi}{r} \mp a \sin \left(\frac{a\varphi}{r} \pm \varphi\right).$$

Die oberen Zeichen gelten für die äussere, die unteren für die innere Epicykloide. Das Verhältnis $\frac{a}{r}$ werde gleich n gesetzt, so hat man für die äussere Epicykloide:

$$1) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{n+1}{n} \cos n\varphi - \cos (n+1)\varphi, \\[2ex] \dfrac{y}{a} = \dfrac{n+1}{n} \sin n\varphi - \sin (n+1)\varphi, \end{cases}$$

und diese Formeln gelten auch für die innere, wenn man statt a, n, φ die Werte $-a$, $-n$, $-\varphi$ setzt.

Die Epicykloide ist eine algebraische Kurve, wenn die positive oder negative Zahl n rational ist. Der Fall $n = -\frac{1}{2}$ liefert eine innere Cykloide, die eine Gerade ist. Die zweite der Gleichungen 1) wird dann $y = 0$ und die Kurve reduziert sich auf einen Durchmesser des festen Kreises. Für $n = -\frac{1}{4}$ werden die Gleichungen 1), wenn man a in $-a$, φ in $-\varphi$ verwandelt:

$$\frac{x}{a} = 3\cos\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{3\varphi}{4} = 4\cos^3\frac{\varphi}{4},$$
$$\frac{y}{a} = 3\sin\frac{\varphi}{4} - \sin\frac{3\varphi}{4} = 4\sin^3\frac{\varphi}{4},$$

also, wenn man φ eliminiert, und r an Stelle von $4a$ setzt:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}.$$

Im Falle $n = 1$ hat man

$$\frac{x}{a} = 2\cos\varphi - \cos 2\varphi, \quad \frac{y}{a} = 2\sin\varphi - \sin 2\varphi,$$

oder

$$\frac{x-a}{2a} = \cos\varphi\,(1-\cos\varphi), \quad \frac{y}{2a} = \sin\varphi\,(1-\cos\varphi).$$

Führt man die Polarkoordinaten ϱ und ω ein, derart, dass

$$x - a = \varrho\cos\omega, \quad y = \varrho\sin\omega,$$

so folgt aus diesen Gleichungen

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\omega \quad \text{oder} \quad \varphi = \omega$$

und

$$\varrho = 2a\,(1-\cos\omega) \quad \text{oder} \quad \varrho = 4a\sin^2\frac{1}{2}\omega.$$

Allgemein: Jede Epicykloide wird aus unendlich vielen, unter sich gleichen Zweigen gebildet, und die Punkte, in denen diese Zweige auf dem festen Kreise enden, sind Rückkehrpunkte. Die Anzahl dieser Zweige wird eine endliche und die ganze Kurve ist in sich geschlossen, wenn das Verhältnis $n = \frac{a}{r}$ eine rationale Zahl ist.

239. Tangente und Normale der Epicykloide. Die Differentiation der Gleichungen 1) ergiebt:

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{a} = (n+1)\,[\sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi]\,d\varphi \\ \qquad = 2\,(n+1)\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\left(n\varphi + \dfrac{\varphi}{2}\right)d\varphi, \\ \dfrac{dy}{a} = (n+1)\,[\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi]\,d\varphi \\ \qquad = 2\,(n+1)\sin\dfrac{\varphi}{2}\sin\left(n\varphi + \dfrac{\varphi}{2}\right)d\varphi, \end{cases}$$

also:

$$3)\quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\left(n\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Diese Gleichung beweist, dass die Tangente im Punkte M der Epicykloide die Gerade MT ist, welche den Punkt M mit dem Punkte T, dem Gegenpunkte von P im Kreise A, verbindet. Denn der Winkel, den diese Gerade MT mit der x-Axe bildet, ist gleich der Summe aus den Winkeln AOx, OTM, eine Summe, die stets gleich $n\varphi + \frac{\varphi}{2}$ ist, wenn man von den Vielfachen von π absieht. Hieraus folgt, dass die Normale im Punkte M der Epicykloide die Gerade MP ist, die den Punkt M mit dem jeweiligen Berührungspunkt der Kreise O und A verbindet.

240. Rektifikation der Epicykloide. Addiert man die Gleichungen 2), nachdem man sie ins Quadrat erhoben hat, und zieht man die Quadratwurzel aus der erhaltenen Summe, so folgt:

$$4)\qquad \frac{ds}{a} = 2(n+1)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

also

$$\frac{s}{a} = -4(n+1)\cos\frac{\varphi}{2} + \text{Konst.}$$

Nimmt man H zum Anfang des Bogens s, so wird s zugleich mit φ gleich null; die Konstante ist also $4(n+1)$ und man hat:

$$\frac{s}{a} = 4(n+1)\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right) = 8(n+1)\sin^2\frac{\varphi}{4}.$$

Um die Länge S eines ganzen Zweiges der Kurve zu erhalten, hat man $\varphi = 2\pi$ zu setzen, und es wird

$$5)\qquad S = 8(n+1)\,a.$$

241. Quadratur der Epicykloide. Die Gleichungen 1) und 2) ergeben:

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{a^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n}(1-\cos\varphi)\,d\varphi,$$

oder

$$du = a^2\frac{(n+1)(2n+1)}{2n}(1-\cos\varphi)\,d\varphi,$$

wenn u die Fläche bezeichnet, die von der Kurve, dem Radiusvektor des Punktes M und der Abscissenaxe eingeschlossen

ist. Es ist aber $d\varphi - \cos\varphi\, d\varphi$ das Differential von $\varphi - \sin\varphi$, und diese Funktion verschwindet ebenso wie u gleichzeitig mit φ. Demnach erhält man

$$u = a^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{2n} (\varphi - \sin\varphi).$$

Für die ganze Fläche U, welche von einem Zweige der Kurve und seinen äussersten beiden Radien eingeschlossen ist, wird $\varphi = 2\pi$, also

$$U = a^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \pi.$$

Der Sektor des Kreises zwischen den nämlichen Radien ist $\frac{\pi a^2}{n}$. Die zwischen dem festen Kreise und dem Kurvenzweige gelegene Fläche ist folglich $U - \frac{\pi a^2}{n}$, und nennt man U_1 diese Fläche, so ist

$$U_1 = (2n+3)\, a^2 \pi.$$

Da wir für n auch negative Werte zulassen, so gelten die Formeln auch für die innere Epicykloide ebenso wie für die äussere. Sie reduziert sich auf $U_1 = 3\pi a^2$ für $n = 0$, und so findet man das für die Cykloide bereits erhaltene Resultat wieder.

242. Krümmungsradius der Epicykloide. Die Gleichung 3) lehrt, dass der Kontingenzwinkel $d\sigma$ gleich ist

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) d\varphi.$$

Mithin erhält der Krümmungsradius $R = \frac{ds}{d\sigma}$ nach Gleichung 4) den Wert

$$6) \qquad R = \frac{4(n+1)}{2n+1} a \sin\frac{\varphi}{2},$$

und weil $2a \sin\frac{\varphi}{2} = MP$ ist (Fig. in § 237), so hat man

$$7) \qquad \frac{R}{MP} = \frac{2n+2}{2n+1} = \frac{2r \pm 2a}{r \pm 2a}.$$

Legt man durch den Punkt T die Sehne TK parallel zur Normalen MP und zieht die Gerade OK, welche diese Normale in J schneidet, so ist im Dreieck OKT

$$\frac{PJ}{KT} = \frac{OP}{OT},$$

also, weil $KT = MP$ ist:

$$\frac{MJ}{MP} = \frac{OP + OT}{OT} = \frac{2r \pm 2a}{r \pm 2a}.$$

Die oberen Zeichen gelten hier, wie in Gleichung 7), für die äussere Epicykloide, die unteren für die innere. Aus dieser Gleichung und der Gleichung 7) folgt

$$R = MJ,$$

mithin ist J der zum Punkte M gehörige Krümmungsmittelpunkt.

243. Evolute der Epicykloide. Die Differentiation der Gleichung 3) liefert:

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{2n+1}{2} \frac{d\varphi}{dx};$$

folglich werden die Gleichungen für die Koordinaten x_1, y_1 des Krümmungsmittelpunktes J

$$x_1 = x - \frac{2}{2n+1} \frac{dy}{d\varphi}, \quad y_1 = y + \frac{2}{2n+1} \frac{dx}{d\varphi},$$

oder nach den Gleichungen 1) und 2):

$$\frac{x_1}{a} = \frac{1}{2n+1} \left[\frac{n+1}{n} \cos n\varphi + \cos (n+1)\varphi\right],$$

$$\frac{y_1}{a} = \frac{1}{2n+1} \left[\frac{n+1}{n} \sin n\varphi + \sin (n+1)\varphi\right].$$

Drehen wir die Koordinatenaxen um den Winkel $n\pi$, und zwar in der Richtung von der positiven x-Axe zur positiven y-Axe, und bezeichnen wir mit x'_1 und y'_1 die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes in Bezug auf diese neuen Axen, so wird

$$x'_1 = x_1 \cos n\pi + y_1 \sin n\pi, \quad y'_1 = -x_1 \sin n\pi + y_1 \cos n\pi.$$

Setzt man

$$a_1 = \frac{a}{2n+1}, \quad \varphi_1 = \varphi - \pi,$$

so folgt:

$$\frac{x'_1}{a_1} = \frac{n+1}{n} \cos n\varphi_1 - \cos(n+1)\varphi_1,$$

$$\frac{y'_1}{a_1} = \frac{n+1}{n} \sin n\varphi_1 - \sin(n+1)\varphi_1.$$

Diese Formeln unterscheiden sich von den Gleichungen 1) durch die Vertauschung von a mit $a_1 = \frac{a}{2n+1}$; *die Evolute der Epicykloide ist also wiederum eine Epicykloide, die zu der ursprünglichen ähnlich ist.* Sie wird erzeugt, indem der Kreis vom Radius $\frac{a}{2n+1}$ auf dem Kreise vom Radius $\frac{r}{2n+1}$ rollt; dieser feste Kreis liegt zu dem ursprünglichen festen Kreise konzentrisch, und die Spitzen der Evolute sind um den Winkel $n\pi$ gegen die Spitzen der ursprünglichen gedreht.

Die Evolvente des Kreises.

244. Ersetzt man in den Gleichungen 1) des § 238, welche eine Epicykloide definieren, a durch seinen Wert nr, und führt man an Stelle von φ den Winkel $\psi = n\varphi$ ein, den die Verbindungslinie der Mittelpunkte O und A der Kreise mit der x-Axe bildet, so erhalten die Gleichungen der Epicykloide die Form:

$$\frac{x}{r} = \cos\psi\left(1 + 2n\sin^2\frac{\psi}{2n}\right) + \psi\sin\psi\,\frac{\sin\frac{\psi}{n}}{\frac{\psi}{n}},$$

$$\frac{y}{r} = \sin\psi\left(1 + 2n\sin^2\frac{\psi}{2n}\right) - \psi\cos\psi\,\frac{\sin\frac{\psi}{n}}{\frac{\psi}{n}}.$$

Nehmen wir nun an, dass der Radius a des erzeugenden Kreises unendlich wird, so wird auch n unendlich; das Ver-

hältnis $\sin\frac{\psi}{n} : \frac{\psi}{n}$ konvergiert nach 1, und $2n \sin^2 \frac{\psi}{2n}$ nach null. Demnach wird für diesen Grenzfall

$$\frac{x}{r} = \cos\psi + \psi \sin\psi,$$

$$\frac{y}{r} = \sin\psi - \psi \cos\psi.$$

Diese Gleichungen, welche man auch leicht direkt bilden kann, bestimmen die Evolvente des Kreises, d. h. die Kurve, deren Evolute der Kreis ist, und die aus der Abwickelung eines gespannt erhaltenen Fadens von einem Kreise entsteht. Sie besteht aus zwei unendlichen Zweigen, deren Vereinigungspunkt ein Rückkehrpunkt ist, und die zu den beiden Bewegungen entgegengesetzten Sinnes gehören, die man der erzeugenden Tangente beilegen kann.

Die Eigenschaft, dass die Epicykloide ihrer Evolute ähnlich ist, gilt im eigentlichen Sinne nicht mehr für diesen Grenzfall; indessen kann man doch die Kreisevolvente und den Kreis selbst als Epicykloiden betrachten, und jede dieser Kurven entspricht dem Fall $n = \infty$; denn lässt man einen Kreis vom Radius a auf einem unendlich kleinen Kreise rollen, so beschreibt der Punkt, der am Anfang auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte im Abstande $2a$ vom festen Centrum liegt, eine Kurve, die unendlich wenig von einem Kreise mit dem Radius $2a$ verschieden ist.

Die Spirale des Archimedes.

245. Diese Spirale ist in Polarkoordinaten definiert durch die Gleichung

$$\varrho = a\omega,$$

wobei a eine gegebene Strecke bezeichnet. Beschreibt man um den Anfangspunkt einen Kreis mit dem Radius a, so sind die Bogen dieses Kreises, gerechnet von der festen Axe, die Längen der Radienvektoren, die durch die Endpunkte dieser Bogen zu legen sind.

Der Winkel μ zwischen der Tangente und dem Radiusvektor, die Subtangente T' und die Subnormale N' haben hier die Werte

Fig. 44.

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\varrho\, d\omega}{d\varrho} = \frac{\varrho}{a} = \omega,$$

$$T' = \frac{\varrho^2 d\omega}{d\varrho} = \frac{\varrho^2}{a} = a\omega^2, \quad N' = \frac{d\varrho}{d\omega} = a.$$

Mithin ist die Subnormale konstant, was ein einfaches Verfahren für die Konstruktion der Tangente liefert. Der Krümmungsradius wird, wenn man die Normale $N = \sqrt{\varrho^2 + N'^2}$ einführt:

$$R = \frac{(\varrho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2a^2} = \frac{N^3}{N^2 + a^2},$$

und bezeichnet man mit a' die Projektion der Subnormalen a auf die Normale N, so ist

$$R = \frac{N^2}{N + a'},$$

ein Ausdruck, der sich leicht konstruieren lässt.

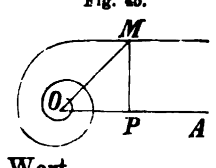
Die hyperbolische Spirale.

246. Die hyperbolische Spirale ist in Polarkoordinaten definiert durch

$$\varrho\omega = a,$$

wobei a eine gegebene Strecke ist. Für $\omega = 0$ ist ϱ unendlich. Der Radius nimmt ab, wenn ω wächst, und wird null für $\omega = \infty$. Die Kurve macht also um den Anfangspunkt O unendlich viele Windungen, ohne ihn jemals zu erreichen; dieser Punkt ist ein *asymptotischer*. Die Ordinate $MP = \varrho \sin\omega$ der Kurve hat den Wert

Fig. 45.



$$\varrho \sin\omega = a\frac{\sin\omega}{\omega}$$

und wird für $\omega = 0$ gleich a. Hieraus folgt, dass die Kurve zur Asymptote die Gerade besitzt, welche im Abstande a von der x-Axe parallel zu derselben verläuft. Die Grössen $\operatorname{tang}\mu$, T', N' erhalten hier die Werte:

$$\operatorname{tang}\mu = -\frac{\varrho\omega^2}{a} = -\omega, \quad T' = -a, \quad N' = -\frac{a}{\omega^2}.$$

Die Subtangente ist konstant, und hieraus folgt eine einfache Tangentenkonstruktion.

Die Konstruktion des Krümmungsradius enthält auch keinerlei Schwierigkeit. Doch bietet sie zu wenig Interesse, als dass wir bei ihrer Entwickelung verweilen wollen.

Die logarithmische Spirale.

247. Die logarithmische Spirale ist durch die Gleichung

$$1)\qquad \varrho = a e^{m\omega}$$

definiert, wobei a eine gegebene Strecke, m eine gegebene Zahl bezeichnet. Diese Gleichung repräsentiert die nämliche Kurve, wie gross auch die gegebene Strecke a sein mag. Denn dreht man die feste Axe, von der aus der Winkel ω gerechnet wird, um einen Winkel α, so muss man, um die Gleichung der Kurve in Bezug auf diese neue Axe zu erhalten, ω durch $\omega + \alpha$ ersetzen, und dies giebt, wenn man $ae^{m\alpha}$ mit a' bezeichnet:

$$\varrho = a' e^{m\omega}.$$

Demnach kann man auch $a = 1$ annehmen, wir wollen indessen, um die Homogenität der Geichungen zu bewahren, die Gleichung 1) beibehalten.

Fig. 46.

Die Gleichung 1) ergiebt für $\omega = 0$, $\varrho = a = OA$, und lässt man nun ω von 0 bis ∞ wachsen, so bekommt ϱ entsprechende, ebenfalls unbegrenzt wachsende Werte. Legt man dagegen der Grösse ω negative Werte von 0 bis $-\infty$ bei, so nimmt ϱ von a bis 0 ab. Demnach macht die Kurve vom Punkte A an unendlich viele Windungen, sowohl in dem einen, wie in dem andern Drehsinne um den Pol.

Die Differentiation der Gleichungen 1) ergiebt:

$$2)\qquad \frac{d\varrho}{d\omega} = m a e^{m\omega}, \quad \text{oder} \quad \frac{d\varrho}{d\omega} = m\varrho.$$

Folglich erhalten der Winkel μ zwischen Tangente und Radiusvektor, die Subtangente T' und die Subnormale N' die Werte:

$$3)\qquad \operatorname{tang}\mu = \frac{1}{m}, \quad T' = \frac{\varrho}{m}, \quad N' = m\varrho.$$

Die erste Gleichung besagt:

Bei der logarithmischen Spirale ist der Winkel zwischen Radiusvektor und Tangente konstant.

Das Flächendifferential eines Sektors der Kurve ist

$$du = \frac{1}{2}\varrho^2 d\omega = \frac{1}{2m}\varrho\, d\varrho.$$

$\varrho\, d\varrho$ ist das Differential von $\frac{\varrho^2}{2}$; folglich ist

$$u = \frac{\varrho^2}{4m} + \text{Konst.}$$

Soll die Fläche u zugleich mit ω null werden, so wird die Konstante $-\frac{a^2}{4m}$, und also

$$u = \frac{\varrho^2 - a^2}{4m}.$$

Das Bogendifferential ds der Kurve ist

$$4)\quad ds = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2} = \sqrt{m^2+1}\,\varrho\, d\omega = a\sqrt{m^2+1}\,e^{m\omega}\,d\omega = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\,d\varrho,$$

mithin

$$s = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\,\varrho + \text{Konst.}$$

Misst man den Bogen s vom Punkte A an, für welchen $\varrho = a$ ist, so wird

$$s = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}(\varrho - a).$$

Der Kontingenzwinkel, der allgemein gleich $d\mu + d\omega$ ist, wird hier gleich $d\omega$. Der Krümmungsradius R ist also $\frac{ds}{d\omega}$, und nach den Gleichungen 2) und 4) wird

$$5)\quad R = \sqrt{m^2+1}\,\varrho.$$

Dieser Ausdruck ist aber zugleich die Länge $N = \sqrt{\varrho^2 + N'^2}$ der Normalen; mithin ist der Krümmungsmittelpunkt der Endpunkt K der Subnormalen. Hiernach ist es auch leicht, die Gleichung für die Evolute der hyperbolischen Spirale zu bilden. Denn die Koordinaten ϱ_1, ω_1 des Mittelpunktes K sind

$$\varrho_1 = N' = m\varrho = mae^{m\omega}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2} + \omega,$$

und dies giebt nach Elimination von ω

6) $$\varrho_1 = m\,ae^{m\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Die Evolute der logarithmischen Spirale ist also eine gleiche logarithmische Spirale mit dem nämlichen Pol.

248. Wie wir schon oben sahen, lässt sich die Gleichung 6) auf die Form 1) bringen, wenn man die feste Axe um den Pol unter einem bestimmten Winkel α dreht. Da es frei steht ein ganzes Vielfaches von 2π zu α zu addieren oder zu subtrahieren, ohne dass die neue Richtung dadurch geändert wird, so kann man $\alpha + 2i\pi$ statt α schreiben, wobei i eine ganze noch unbestimmte Zahl, α einen Winkel zwischen 0 und 2π bedeutet. Wir ersetzen also in der Gleichung 6) ω_1 durch $\omega + \alpha + 2i\pi$ und schreiben ϱ an Stelle von ϱ_1, dann wird die Gleichung der Evolute:

$$\varrho = m\,ae^{m\left(\alpha + 2i\pi - \frac{\pi}{2}\right) + m\omega}$$

und reduziert sich auf

$$\varrho = ae^{m\omega},$$

wenn man α durch die Bedingung

$$me^{m\left(\alpha + 2i\pi - \frac{\pi}{2}\right)} = 1,$$

oder

7) $$\alpha = -(4i-1)\frac{\pi}{2} - \frac{l(m)}{m}$$

bestimmt; das Symbol l bezeichnet den natürlichen Logarithmus.

Ist nun die Zahl m so beschaffen, dass

8) $$\frac{l(m)}{m} = -(4i-1)\frac{\pi}{2}$$

wird, wobei i irgend eine bestimmte ganze Zahl bezeichnet, so giebt die Gleichung 7) $\alpha = 0$, und in diesem Falle wird die logarithmische Spirale 1) ihre eigene Evolute. Die Funktion $\frac{l(m)}{m}$, deren Ableitung $\frac{1-l(m)}{m^2}$ ist, wächst von $-\infty$ bis $\frac{1}{e}$, wenn man m von 0 bis e wachsen lässt; und nimmt ab

von $\frac{1}{e}$ bis 0, wenn m von e bis $+\infty$ wächst. Hieraus folgt, dass, wenn für i irgend eine ganze positive Zahl gewählt wird, auch jedesmal ein Wert m vorhanden ist, welcher die Gleichung 8) befriedigt. Es giebt also unendlich viele logarithmische Spiralen, welche die merkwürdige Eigenschaft haben, dass sie mit ihrer Evolute zusammenfallen.

Anwendungen der Theorie der Einhüllenden.

249. Wir wollen zum Schlusse dieses Kapitels zwei Beispiele für die im § 207 entwickelte Methode zur Bestimmung der Einhüllenden eines Kurvensystemes geben.

Aufgabe I. *Die Variabelen* x_1 *und* y_1 *seien mit einander durch die Relation verbunden:*

$$1)\qquad \left(\frac{x_1}{a}\right)^m + \left(\frac{y_1}{b}\right)^m = 1,$$

in welcher a *und* b *Konstante sind. Es soll die Einhüllende der Kurven bestimmt werden, welche durch die Gleichung*

$$2)\qquad \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \left(\frac{y}{y_1}\right)^n = 1$$

definiert sind.

Da x_1 und y_1 als Funktionen des nämlichen Parameters betrachtet werden können, so hat man das Differential der Gleichung 2) in Bezug auf diesen Parameter zu bilden; man erhält so:

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n \frac{dx_1}{x_1} + \left(\frac{y}{y_1}\right)^n \frac{dy_1}{y_1} = 0.$$

Da aber x_1 und y_1 durch die Gleichung 1) verbunden sind, so wird auch, indem man diese Gleichung differentiiert:

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^m \frac{dx_1}{x_1} + \left(\frac{y_1}{b}\right)^m \frac{dy_1}{y_1} = 0$$

und die Elimination von $\frac{dy_1}{dx_1}$ zwischen diesen Gleichungen ergiebt:

$$3)\qquad \frac{\left(\frac{x}{x_1}\right)^n}{\left(\frac{x_1}{a}\right)^m} = \frac{\left(\frac{y}{y_1}\right)^n}{\left(\frac{y_1}{b}\right)^m}.$$

Die Gleichung 3) ist die Gleichung, die aus der Differentiation der Gleichung 2) in Bezug auf den variabelen Parameter hervorgeht. Auf Grund der Gleichungen 1) und 2) ist die Summe der Nenner und ebenso der Zähler in der Gleichung 3) gleich 1. Folglich ist jedes Glied der Gleichung 3) gleich 1, und man hat

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n = \left(\frac{x_1}{a}\right)^m, \quad \left(\frac{y}{y_1}\right)^n = \left(\frac{y_1}{b}\right)^m,$$

oder

$$4) \qquad \left(\frac{x_1}{a}\right)^{m+n} = \left(\frac{x}{a}\right)^n, \quad \left(\frac{y_1}{b}\right)^{m+n} = \left(\frac{y}{b}\right)^n.$$

Die Elimination von x_1 und y_1 zwischen den Gleichungen 1) und 4) lässt sich unmittelbar ausführen, und man erhält als Gleichung der gesuchten Einhüllenden:

$$5) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = 1.$$

Der Fall $a = b$, $m = 2$, $n = 1$ verdient besonders bemerkt zu werden. Sind die Koordinaten rechtwinklig, so stellen die Gleichungen

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2, \quad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1$$

ein System von Geraden dar, auf welchen die zwischen den Axen enthaltene Strecke die konstante Länge a hat. Die Einhüllende, deren Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

wird, ist eine Epicykloide, wie im § 238 gezeigt wurde.

250. Aufgabe II. *Auf die Peripherie eines Kreises treffen parallele Strahlen, welche von dort reflektiert werden, wobei der reflektierte Strahl mit der Normalen jedesmal denselben Winkel bildet wie der auffallende. Es soll die Einhüllende der reflektierten Strahlen bestimmt werden.*

Die gesuchte Einhüllende wird die *Katakaustika* genannt. Als Koordinatenaxen wählen wir zwei rechtwinklige Durchmesser, von denen der eine, die x-Axe, den auffallenden Strahlen parallel sei. Sind $a \cos\varphi$ und $a \sin\varphi$ die Koordinaten eines Punktes der Peripherie, auf welchen ein Strahl fällt,

so bildet der reflektierte Strahl mit der x-Axe den Winkel 2φ, und die Gleichung dieses Strahles wird

$$(y - a\sin\varphi) = \operatorname{tang} 2\varphi\,(x - a\cos\varphi),$$

oder

$$y\cos 2\varphi - x\sin 2\varphi + a\sin\varphi = 0.$$

Mithin muss φ eliminiert werden zwischen dieser Gleichung und der folgenden:

$$y\sin 2\varphi + x\cos 2\varphi - \frac{a}{2}\cos\varphi = 0,$$

die aus der Differentiation nach φ hervorgeht. Löst man die beiden Gleichungen nach x und y auf, so folgt:

$$x = \frac{a}{4}(3\cos\varphi - \cos 3\varphi),$$

$$y = \frac{a}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi).$$

Auf Grund der Gleichungen im § 238 erkennt man, dass die durch diese Gleichungen dargestellte Katakaustika eine äussere Epicykloide ist, welche von einem Kreise mit dem Radius $\frac{1}{4}a$ erzeugt wird, der auf einem Kreise mit dem Radius $\frac{1}{2}a$ rollt, welcher zu dem ursprünglichen konzentrisch liegt.

Neuntes Kapitel.

Theorie der Raumkurven und Flächen.

Die Tangente und Normalebene einer Kurve.

251. Eine Kurve heisst eine *räumliche* oder auch *doppelt gekrümmte*, wenn ihre sämtlichen Punkte nicht mehr in der nämlichen Ebene gelegen sind.

Betrachtet man eine ebene oder räumliche Kurve, die auf drei geradlinige Koordinatenaxen Ox, Oy, Oz bezogen ist, und sind x, y, z die Koordinaten eines Punktes M dieser Kurve, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ die Koordinaten eines andern Punktes M' der nämlichen Kurve, so werden die Gleichungen der Sekante MM':

$$\eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{\Delta z}{\Delta x}(\xi - x),$$

wobei ξ, η, ζ die variabelen Koordinaten bedeuten. Die Grössen y und z können als Funktionen von x betrachtet werden; wenn nun der Punkt M' sich unbegrenzt dem Punkte M nähert und die Verhältnisse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ nach bestimmten Grenzen konvergieren, so werden die Gleichungen für die Grenzlage der Sekante:

$$1) \qquad \eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{dz}{dx}(\xi - x).$$

Dies sind alsdann die Gleichungen für die Tangente der Kurve im Punkte M. Man kann sie in einer Formel zusammenfassen, nämlich

$$2) \qquad \frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}.$$

Im Falle rechtwinkliger Koordinaten sind die Kosinus der Winkel, welche die eine oder die andere Richtung der Tangente mit den positiven Koordinatenaxen bildet, proportional zu den Differentialen dx, dy, dz. Denn betrachtet man zwei Punkte M und M' mit den Koordinaten x, y, z, und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, und bezeichnet man die Winkel, welche die Richtung von M nach M' mit den positiven Axen bildet, durch α, β, γ, so ist, wie aus der geometrischen Anschauung hervorgeht:

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}},$$

dabei ist das Vorzeichen der Quadratwurzel positiv zu nehmen, während die Vorzeichen der Zähler durch die Werte von Δx, Δy, Δz eindeutig bestimmt sind. Rückt der Punkt M' an den Punkt M unbegrenzt heran, so wird

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = dx : dy : dz,$$

und es bezeichnen dann α, β, γ die Winkel, welchen die in der Richtung von M nach dem Punkte $x + dx$ genommene Tangente mit den positiven Richtungen der Koordinatenaxen einschliesst.

Normalebene einer Kurve heisst die Ebene, die im Berührungspunkte einer Tangente senkrecht zu der letzteren steht. Jede Gerade, welche durch diesen Punkt geht und in der Normalebene liegt, heisst eine Normale. Nach der letzten Bemerkung wird im Falle rechtwinkliger Koordinaten die Gleichung dieser Ebene:

$$3)\qquad (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

252. Sind die Koordinaten x, y, z als Funktionen einer unabhängigen Variabelen t gegeben, derart dass

$$4)\qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

ist, so wird

$$dx = \varphi'(t)\,dt, \quad dy = \psi'(t)\,dt, \quad dz = \chi'(t)\,dt,$$

und substituiert man diese Werte in die Gleichungen der Tangente und der Normalebene, so folgt:

$$5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\xi - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \dfrac{\eta - \psi(t)}{\psi'(t)} = \dfrac{\zeta - \chi(t)}{\chi'(t)} \\ [\xi - \varphi(t)]\,\varphi'(t) + [\eta - \psi(t)]\,\psi'(t) + [\zeta - \chi(t)]\,\chi'(t) = 0. \end{cases}$$

Ist die Kurve durch zwei Gleichungen

$$6)\qquad f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

also als Schnitt zweier Flächen definiert, so hat man diese Gleichungen zu differentiieren, hieraus die Differentiale dx, dy, dz zu berechnen und diese Werte in die Gleichungen 2) und 3) einzutragen. Die Differentiation der Gleichungen 6) ergiebt:

$$7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0, \end{cases}$$

und statt die angegebene Substitution in die Gleichungen der Tangente auszuführen, kann man dasselbe Resultat auch ableiten, indem man aus den Gleichungen 2) die Werte von dy und dz entnimmt und diese in die Gleichungen 7) einträgt. Letztere sind homogen in Bezug auf dx, dy, dz und diese Differentiale sind nach der Gleichung 2) proportional zu $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$. Das Resultat der Elimination wird also

$$8)\qquad \begin{cases} (\xi - x)\dfrac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\dfrac{\partial f}{\partial y} + (\zeta - z)\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ (\xi - x)\dfrac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\dfrac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Jede dieser Gleichungen stellt eine Ebene dar, und das System der beiden die Schnittlinie, also eine bestimmte Gerade, solange die partiellen Ableitungen bestimmte Werte haben, die dabei nicht der Relation genügen:

$$9)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Genügen die Koordinaten x, y, z des Punktes M diesen Gleichungen, so bestimmen auch die Gleichungen 7) nicht mehr die Verhältnisse von zweien der Differentiale dx, dy, dz zur dritten, und der Punkt M ist ein *singulärer Punkt.* Wir beschränken uns auf diese einfache Angabe, die wir nicht weiter entwickeln können, ohne die Grenzen, die wir uns gesteckt haben, zu überschreiten.

Noch ist zu bemerken, dass immer nur eine der beiden Kurvengleichungen bei der Bildung je einer der Gleichungen 8) vorkommt; folglich hängt auch die Ebene, welche durch solch eine Gleichung bestimmt ist, immer nur von *einer* der Flächen ab, auf welcher die Kurve liegt. Im folgenden wird diese Bemerkung weiter entwickelt werden.

Die Tangentenebene und die Normale einer Fläche.

253. Eine Fläche, welche auf drei geradlinige Axen Ox, Oy, Oz bezogen ist, habe allgemein die Gleichung

$$1)\qquad f(x, y, z) = 0,$$

in welcher x, y, z die Koordinaten irgend eines Flächenpunktes M bedeuten.

Ziehen wir auf der Fläche eine beliebige Kurve, welche durch den Punkt M geht, so kann diese Kurve als Schnitt der gegebenen Fläche mit einer zweiten betrachtet werden, und es sei

$$2)\qquad F(x, y, z) = 0$$

die Gleichung dieser zweiten Fläche. Die Tangente der Kurve im Punkte M wird nach § 252 durch die beiden Gleichungen dargestellt:

$$3)\qquad (\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$4)\qquad (\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Die durch die Gleichung 3) definierte Ebene enthält demnach alle Tangenten, welche sich an all den verschiedenen Kurven in diesem Punkte konstruieren lassen, die auf der Fläche verlaufen und durch diesen Punkt hindurchgehen. Sie heisst die *Tangentenebene* der Fläche im Punkte M.

Diese Schlussfolgerung setzt indessen voraus, dass die Verhältnisse der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

unter einander im Punkte M bestimmte Werte besitzen. Ist dies nicht der Fall, so ist der Punkt M ein *singulärer Punkt* der Fläche. In dem Scheitel der Kegelflächen tritt dies z. B. ein.

Man kann die Definition der Tangentenebene in einem Flächenpunkte auch ganz unabhängig machen von der Betrachtung der Tangenten der durch diesen Punkt hindurchgehenden Kurven, wodurch die Analogie mit der Definition der Tangente einer Kurve hervortritt.

Betrachtet man drei Flächenpunkte M, M', M'' mit den Koordinaten x, y, z; $x+\Delta_1 x$, $y+\Delta_1 y$, $z+\Delta_1 z$; $x+\Delta_2 x$, $y+\Delta_2 y$, $z+\Delta_2 z$, so wird, wenn diese drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen, eine bestimmte Ebene durch dieselben definiert. Die Gleichung dieser Ebene:

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$$

hat den Bedingungen zu genügen:

$$A\Delta_1 x + B\Delta_1 y + C\Delta_1 z = 0,$$
$$A\Delta_2 x + B\Delta_2 y + C\Delta_2 z = 0,$$

und aus diesen letzten Gleichungen ergeben sich für die Verhältnisse der Koeffizienten A, B, C die Werte:

$$A:B:C = \Delta_1 y\,\Delta_2 z - \Delta_2 y\,\Delta_1 z : \Delta_1 z\,\Delta_2 x - \Delta_2 z\,\Delta_1 x : \Delta_1 x\,\Delta_2 y - \Delta_2 x\,\Delta_1 y.$$

Die Differenzen der rechten Seite sind nicht sämtlich gleich 0, wenn die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen; man kann sie in der Form schreiben:

$$A:B:C = \frac{\Delta_1 y}{\Delta_1 x}\frac{\Delta_2 z}{\Delta_2 x} - \frac{\Delta_2 y}{\Delta_2 x}\frac{\Delta_1 z}{\Delta_1 x} : \frac{\Delta_1 z}{\Delta_1 x} - \frac{\Delta_2 z}{\Delta_2 x} : \frac{\Delta_2 y}{\Delta_2 x} - \frac{\Delta_1 y}{\Delta_1 x}.$$

Lässt man nun die beiden Punkte M' M'' in beliebiger Weise an den Punkt M heranrücken, so jedoch, dass die Richtungen MM', MM'' bestimmte, übrigens beliebige Grenzwerte erhalten, die von einander verschieden sind, so erhalten die Grössen $\frac{\Delta_1 y}{\Delta_1 x}$ und $\frac{\Delta_2 y}{\Delta_2 x}$ die willkürlichen, von einander verschiedenen Werte $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_2$, während die Verhältnisse $\frac{\Delta_1 z}{\Delta_1 x}$ und $\frac{\Delta_2 z}{\Delta_2 x}$ gemäss der Flächengleichung die Grenzwerte annehmen:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1,$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2.$$

Dabei bedeuten $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ die partiellen Ableitungen der Funktion z, von denen wir voraussetzen, dass sie stetige Funktionen der unabhängigen Variabelen x und y sind. Demnach wird

$$A:B:C = \frac{\partial z}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2\right] : \frac{\partial z}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2\right] : \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right],$$

oder

$$A:B:C = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} : -1.$$

Ist also die Gleichung der Fläche in der expliciten Form $z = F(x, y)$ gegeben, so konvergieren alle Ebenen, die in der angegebenen Weise konstruiert werden, nach einer bestimmten Grenzlage mit der Gleichung

$$\zeta - z = \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y)$$

und diese Ebene ist die Tangentenebene der Fläche. Bei der impliciten Gleichung $f(x, y, z) = 0$ ergeben sich nach § 80 die partiellen Ableitungen von z aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

und die Gleichung der Tangentenebene wird wie oben

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) - \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

Normale der Fläche in einem bestimmten Punkte heisst die im Berührungspunkte einer Tangentenebene senkrecht stehende Gerade. Jede durch die Normale gelegte Ebene heisst eine *Normalebene.* Sind die Koordinatenaxen rechtwinklig, so folgen aus der Gleichung 3) für die Normale die Gleichungen:

$$5) \qquad \frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

254. Betrachtet man x und y als die unabhängigen Variabelen, und bezeichnet man das totale Differential von z mit

$$6)\qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

wobei die partiellen Ableitungen $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

bestimmt sind, so wird die Gleichung der Tangentenebene

$$7)\qquad \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

und die Gleichungen der Normalen bei rechtwinkligen Koordinaten

$$8)\qquad (\xi - x) + p(\zeta - z) = 0, \quad (\eta - y) + q(\zeta - z) = 0.$$

255. Will man an die Fläche mit der Gleichung 1) von einem gegebenen ausserhalb der Fläche gelegenen Punkte mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 eine Tangentenebene legen, so genügt es zunächst, den Berührungspunkt zu bestimmen. Die Koordinaten dieses Punktes müssen die beiden Gleichungen erfüllen:

$$9)\qquad \begin{gathered} f(x, y, z) = 0, \\ (x_0 - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (y_0 - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (z_0 - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{gathered}$$

Dieselben bestimmen auf der Fläche eine Kurve, die den Ort der gesuchten Punkte bildet. Verbindet man den gegebenen Punkt mit dem Berührungspunkte einer dieser Tangentenebenen und der Fläche, so wird die Gleichung dieser Geraden:

$$10)\qquad \frac{\xi - x_0}{x - x_0} = \frac{\eta - y_0}{y - y_0} = \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}.$$

Die Elimination der Koordinaten x, y, z zwischen diesen Gleichungen und den beiden vorigen liefert die Gleichung einer Kegelfläche, die in jedem Punkte der durch die Gleichungen 9) definierten Kurve dieselbe Tangentenebene besitzt wie die ursprüngliche Fläche. Diese Kegelfläche ist also der gegebenen umschrieben. Zum Beweise dieser Behauptung genügt es einzusehen, dass die Tangentenebene der Fläche sowohl wie die Tangentenebene des Kegels die Tangente der

Kurve (Gleichung 9) und die Gerade (Gleichung 10) enthalten müssen. Hieraus folgt, dass sie zusammenfallen.

Wenn der Punkt mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 auf einer Geraden

$$x_0 = az_0, \quad y_0 = bz_0$$

sich bewegt und dabei ins unendliche fortrückt, so tritt an Stelle der zweiten Gleichung 9) die Bedingung

$$11) \qquad a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Denn diese Gleichung drückt aus, dass die Tangentenebene der Fläche in einem Punkte x, y, z der Geraden $x = az$, $y = bz$ parallel ist. Verbindet man dieselbe mit der Gleichung 1), so erhält man den Ort der Berührungspunkte eines, der gegebenen Fläche umschriebenen, Cylinders, dessen Erzeugende der durch die Gleichungen

$$\xi = a\zeta, \quad \eta = b\zeta$$

definierten Geraden parallel sind. Die Erzeugenden des Cylinders haben die Gleichungen

$$12) \qquad \xi - x = a(\zeta - z), \quad \eta - y = b(\zeta - z),$$

und die Gleichung desselben ergiebt sich, wenn man die Koordinaten x, y, z zwischen den Gleichungen 1), 11) und 12) eliminiert.

Anwendung homogener Koordinaten.

256. Bezeichnet man die geradlinigen Koordinaten eines Punktes durch die Verhältnisse

$$\frac{x}{w}, \quad \frac{y}{w}, \quad \frac{z}{w},$$

so kann jede Gleichung

$$1) \qquad f(x, y, z, w) = 0,$$

deren linke Seite eine homogene Funktion von x, y, z, w ist, als Gleichung einer Fläche betrachtet werden. In ähnlicher Weise wie im § 171 erhält man die Gleichung der Tangentenebene in der Form:

$$\left(\frac{\xi}{\omega}-\frac{x}{w}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{\eta}{\omega}-\frac{y}{w}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\frac{\zeta}{\omega}-\frac{z}{w}\right)\frac{\partial f}{\partial z}+\left(\frac{\omega}{\omega}-\frac{w}{w}\right)\frac{\partial f}{\partial w}=0,$$

wenn $\frac{\xi}{\omega}$, $\frac{\eta}{\omega}$, $\frac{\zeta}{}$ die variabelen Koordinaten bedeuten. Auf Grund der Eigenschaft homogener Funktionen wird aber die Gleichung 1) auch in der Form

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+w\frac{\partial f}{\partial w}=0$$

darstellbar, und die Gleichung der Tangentenebene lässt sich reduzieren; man erhält für dieselbe

$$2)\qquad \xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta\frac{\partial f}{\partial z}+\omega\frac{\partial f}{\partial w}=0.$$

Desgleichen werden, wenn eine Kurve durch zwei homogene Gleichungen

$$f(x,y,z,w)=0,\quad F(x,y,z,w)=0$$

definiert ist, die Gleichungen für die Tangente

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta\frac{\partial f}{\partial z}+\omega\frac{\partial f}{\partial w}=0,$$

$$\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial y}+\zeta\frac{\partial F}{\partial z}+\omega\frac{\partial F}{\partial w}=0.$$

Ist die Gleichung 1) algebraisch und vom Grade m, so wird die Gleichung 2) nur vom Grade $m-1$ in Bezug auf die Koordinaten des Berührungspunktes. Betrachtet man alle Tangentenebenen der Fläche, welche durch einen bestimmten Punkt ξ_0, η_0, ζ_0, ω_0 des Raumes gehen, so wird der Ort ihrer Berührungspunkte durch zwei Gleichungen definiert, von denen die eine vom m^{ten}, die andere vom $m-1^{\text{ten}}$ Grade ist. Diese Kurve ist demnach von der Ordnung $m(m-1)$. Betrachtet man zwei verschiedene Punkte im Raume und konstruiert zu jedem den berührenden Kegel, so schneiden sich die Kurven, längs welcher diese Kegel die Fläche berühren, in $m(m-1)^2$ Punkten; denn diese Punkte sind aus einer Gleichung m^{ten} Grades und zwei Gleichungen $m-1^{\text{ten}}$ Grades zu bestimmen. Die zu diesen Punkten gehörigen Tangentenebenen gehen durch die beiden Kegelspitzen und enthalten demnach die

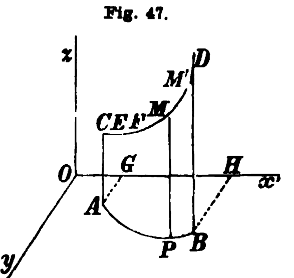
Verbindungsgerade. Mithin giebt es bei einer Fläche m^{ter} Ordnung im allgemeinen $m(m-1)^2$ Tangentenebenen, die durch eine beliebige Gerade im Raum hindurchgehen. Diese Zahl heisst die *Klasse der Fläche.*

Der Beweis dieser Eigenschaft würde eine besondere Transformation erfordern, wenn man die gewöhnlichen nicht homogenen Koordinaten zu Grunde legt.

Das Differential der Bogenlänge einer beliebigen Kurve.

257. In derselben Weise wie bei den ebenen Kurven (§ 189) haben wir auch hier bei den räumlichen vorzugehen. Es sei CD der Bogen einer beliebigen Kurve, die wir auf drei rechtwinklige Axen Ox, Oy, Oz beziehen. Dem Bogen CD schreiben wir ein Polygon $CEFMM'D$ ein, dessen Seitenzahl n sei; wir bezeichnen mit P den Umfang dieses Polygones, mit x, y, z die Koordinaten irgend eines Eckpunktes M, mit $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ die Koordinaten des folgenden Eckpunktes M'. Alsdann ist

Fig. 47.



$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}}.$$

Die Verhältnisse

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

konvergieren nach den Grenzen

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx},$$

wenn Δx null wird; und indem wir annehmen, dass diese Differentialquotienten stetige Funktionen von x sind längs des ganzen betrachteten Kurvenbogens, können wir setzen:

$$MM' = \Delta x \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \varepsilon \right].$$

Dabei bedeutet ε eine Grösse, die nicht nur bei jedem Werte von x mit Δx nach null wird, sondern auch gleichmässig bei allen für den Bogen CD geltenden Werten von x nach null konvergiert, d. h. man kann unabhängig von x den Wert Δx so klein wählen, dass an jeder Stelle des Bogens der Betrag von ε kleiner ist, als eine willkürlich vorgegebene Zahl δ. Bildet man also die Summe aller Seiten des Polygones, so ist

$$1)\qquad P = \Sigma \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \Sigma \varepsilon \Delta x,$$

und es ist der Betrag von $\Sigma \varepsilon \Delta x$ kleiner als $\delta \Sigma \Delta x = \delta . GH$. Lässt man nun die Zahl n der Polygonseiten unbegrenzt wachsen, und dabei jede Seite nach null konvergieren, so wird δ beliebig klein, folglich $\delta . GH$ und also auch $\Sigma \varepsilon \Delta x$ gleich 0. Die erste Summe aber, in welcher $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ eine stetige Funktion der unabhängigen Variabelen x bedeutet, konvergiert nach einem bestimmten Grenzwerte, wie im § 187 bewiesen wurde. Denn konstruieren wir die Kurve, deren Ordinate Y als Funktion von x durch die Gleichung

Fig. 48.

$$2)\qquad Y = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

bestimmt ist, und betrachten wir den Bogen cmd dieser Kurve, dessen Endpunkte c und d die Abscissen Og und Oh haben, welche den Abscissen OG und OH bezüglich gleich sind, so wird, wenn wir mit S die Fläche bezeichnen, die zwischen dem Bogen cd, den Ordinaten der Endpunkte und der Abscissenaxe eingeschlossen ist (§ 188):

$$3)\quad S = \lim \Sigma Y \Delta x = \lim \Sigma \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Also ergiebt die Formel 1)

$$4)\qquad \lim P = S.$$

Mithin ist bewiesen:

Der Umfang eines der gegebenen Kurve eingeschriebenen Polygones konvergiert nach einer bestimmten Grenze, wenn alle

Seiten des Polygones nach null konvergieren, vorausgesetzt, dass die Kurve an jeder Stelle eine bestimmte Tangente besitzt, deren Richtung sich stetig ändert. Diese Grenze ist unabhängig von dem Gesetze, nach welchem man die Polygonseiten beliebig verkleinert.

Wie bei den ebenen Kurven heisst diese Grenze S, deren Existenz auf diese Weise bewiesen ist, die *Länge* des Bogens CD.

Bezeichnen wir mit s die Länge des Bogens zwischen dem festem Anfangspunkte C und dem variabelen Punkte M. Ist dann Y die Ordinate des Punktes m der Kurve cd, dessen Abscisse $Op = x$ der Abscisse des Punktes M gleich ist, so ist nach dem vorigen der Bogen s gleich der Fläche $cgpm$. Diese Fläche hat aber das Differential Ydx oder

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx,$$

also ist

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

oder

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}. \tag{5}$$

258. Aus dieser Gleichung folgt, *dass die Grenze des Verhältnisses eines unendlich kleinen Kurvenbogens zu seiner Sehne gleich 1 wird,* wie schon im § 189 für die ebenen Kurven bewiesen wurde. Ist nämlich c die Sehne eines Bogens MM', welcher unendlich klein wird, und s die Bogenlänge, gerechnet von einem willkürlichen festen Punkte bis zum Punkte M, so ist die Länge des Bogens MM' mit Δs zu bezeichnen, und es wird:

$$\frac{\Delta s}{c} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}},$$

folglich:

$$\lim\frac{\Delta s}{c} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \frac{ds}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = 1.$$

Auf Grund dieser Eigenschaft lässt sich wie früher der Ausdruck für das Bogendifferential leicht bilden, wenn man an Stelle rechtwinkliger Koordinaten irgend welche Variabelen einführt. Hat man z. B. schiefwinklige Koordinaten und bezeichnet man mit α, β, γ die Winkel, welche von den Axen Oy und Oz, Oz und Ox, Ox und Oy gebildet werden, so ist, um das Differential eines Kurvenbogens s zu erhalten, zu setzen:

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim \frac{c}{\Delta x}$$

$$= \lim \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2+2\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta z}{\Delta x}\cos\alpha+2\frac{\Delta z}{\Delta x}\cos\beta+2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cos\gamma},$$

oder:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\cos\alpha+2\frac{dz}{dx}\cos\beta+2\frac{dy}{dx}\cos\gamma},$$

also:

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2+2\,dy\,dz\cos\alpha+2\,dz\,dx\cos\beta+2\,dx\,dy\cos\gamma}.$$

259. Im räumlichen Polarkoordinatensystem ist jeder Punkt des Raumes durch einen Radiusvektor r, welcher stets im absoluten Sinne genommen wird, und durch zwei Winkel θ und ψ definiert. Der Winkel θ, enthalten zwischen 0 und 180°, wird gebildet vom Radiusvektor und einer festen Axe Oz; der Winkel ψ kann von 0 bis 360° variieren; er liegt in der Ebene xOy, die senkrecht zu Oz ist, und wird gebildet von einer festen Axe Ox, die in der xy-Ebene liegt, und von der Projektion des Radius r auf diese Ebene. Bezeichnet man mit x, y, z die drei rechtwinkligen Koordinaten, welche mit dem Polarsysteme verbunden sind, indem sie zu den Axen Ox, Oy, Oz gehören, so ist

$$x = r\sin\theta\cos\psi, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad z = r\cos\theta,$$

also

$$dx = dr\sin\theta\cos\psi + r\cos\theta\cos\psi\,d\theta - r\sin\theta\sin\psi\,d\psi,$$
$$dy = dr\sin\theta\sin\psi + r\cos\theta\sin\psi\,d\theta + r\sin\theta\cos\psi\,d\psi,$$
$$dz = dr\cos\theta - r\sin\theta\,d\theta.$$

Erhebt man diese Gleichungen ins Quadrat und addiert sie, so folgt nach Ausziehung der Quadratwurzel

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\psi^2}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich auch leicht direkt bilden. Denn in dem Polarsysteme werden die Punkte des Raumes durch den Schnitt dreier Flächensysteme bestimmt, nämlich *erstens:* der konzentrischen Kugeln, für welche r allgemein den Radius bezeichnet; *zweitens* der Rotationskegel mit der Axe Oz, für welche θ der erzeugende Winkel ist; *drittens* der Ebenen, welche durch die Axe Oz gehen, und für welche ψ die Neigung zur festen Ebene zOx angiebt. Betrachten wir nun ein krummliniges Parallelepiped, bei welchem zwei gegenüberliegende Eckpunkte mit den Endpunkten des Bogens Δs einer gegebenen Kurve zusammenfallen, und das durch die Kugel mit den Radien r und $r + \Delta r$, durch die Kegel mit den Winkeln θ und $\theta + \Delta\theta$, endlich durch die Ebenen mit den Winkeln ψ und $\psi + \Delta\psi$ bestimmt ist. Die Basis dieses Parallelepipedes ist auf der Kugel mit dem Radius r ein Rechteck, das von vier Kreisbogen gebildet wird. Zwei gegenüberliegende Seiten sind Bogen grösster Kreise und haben die Länge $r\Delta\theta$, die beiden anderen Seiten haben die Länge $r \sin\theta\, \Delta\psi$, und $r\sin(\theta + \Delta\theta)\,\Delta\psi$, endlich projiziert sich der Bogen Δs auf die Kugel längs einer Diagonalen γ dieses Rechteckes. Die drei Kreisbogen $r\Delta\theta$, $r\sin\theta\,\Delta\psi$, γ unterscheiden sich von ihren Sehnen nur um Grössen, die im Verhältnis zu diesen Längen unendlich klein werden. Ferner bilden die beiden ersten Sehnen einen Winkel mit einander, der unendlich wenig von einem rechten abweicht; folglich ist

$$\gamma^2 = r^2\Delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\Delta\psi^2,$$

wenn man Grössen, die im Verhältnis zu γ^2 unendlich klein sind, vernachlässigt. Desgleichen unterscheiden sich Δs und γ von ihren Sehnen um Grössen, die im Verhältnis zu diesen Bogen unendlich klein sind, und der Winkel, den Δr mit der Sehne des Bogens γ bildet, differiert unendlich wenig von einem rechten; also ist

$$\Delta s^2 = \gamma^2 + \Delta r^2$$

mit Vernachlässigung von Grössen, die im Verhältnis zu Δs^2 unendlich klein sind. Die beiden Gleichungen ergeben also

$$\frac{\Delta s^2}{\Delta\theta^2} + \varepsilon = \frac{\Delta r^2}{\Delta\theta^2} + r^2 \sin^2\theta \frac{\Delta\psi^2}{\Delta\theta^2} + r^2,$$

wobei ε eine unendlich kleine Grösse wird; geht man zur Grenze über, so wird

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2 \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{d\theta^2} + r^2,$$

oder

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\psi^2 + r^2 d\theta^2,$$

wie oben gefunden wurde.

Formeln für die Richtungskosinus der Tangente.

260. Die Winkel α, β, γ, welche die Tangente in dem einen oder andern Sinne ihrer Richtung mit den positiven Koordinatenaxen eines rechtwinkligen Systemes bildet, sind nach § 251 proportional den Differentialen

$$dx, \quad dy, \quad dz;$$

bezeichnet nun s die Bogenlänge der Kurve von einem festen Anfangspunkte bis zum Punkte M (x, y, z), so ist die Summe $dx^2 + dy^2 + dz^2$ gleich ds^2, und die Relation

$$\frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz}$$

giebt, da

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ist:

$$1) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

oder

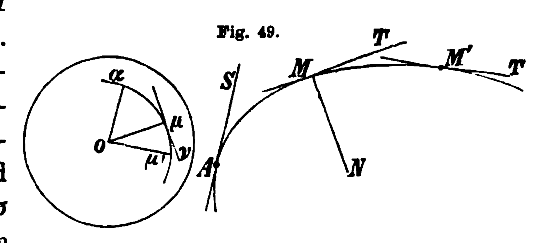
$$2) \qquad dx = ds\cos\alpha, \quad dy = ds\cos\beta, \quad dz = ds\cos\gamma.$$

Hier ist $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ und das Vorzeichen unbestimmt. Nimmt man nach einander das positive und dann das negative Zeichen, so erhält man zwei Systeme von Gleichungen, die sich auf die beiden entgegengesetzten Richtungen der Kurve beziehen.

Der Krümmungsradius.

261. Der Bogen AM einer Kurve werde von einem beweglichen Punkte in der Richtung von A nach M durchlaufen; als Richtung der Tangente in jedem Punkte fixieren wir die Grenzlage der Sekante, welche von diesem Punkte zu den darauf folgenden führt. Aus dem Centrum einer Kugel, deren Radius gleich der Längeneinheit und deren Mittelpunkt ein beliebiger Punkt o ist, ziehen wir nun Radien parallel zu den Richtungen der Tangenten, die in den verschiedenen Punkten des Bogens AM konstruiert sind. Der Ort der Endpunkte dieser Radien ist eine sphärische Kurve, und die Länge $\alpha\mu = \sigma$ derselben, die dem Bogen $AM = s$ der gegebenen Kurve entspricht, heisst die absolute *Krümmung* des Bogens AM.

Fig. 49.



Ist der Anfangspunkt A des Bogens AM fest, der Endpunkt M beweglich, so sind s und σ variabele Grössen. Das Differential $d\sigma$ der Krümmung wird der *Kontingenzwinkel* der Kurve im Punkte M genannt.

Ist AM eine ebene Kurve, so ist $\alpha\mu$ der Bogen eines grössten Kreises, durch welchen der Winkel zwischen den Tangenten in den Endpunkten des Bogens AM gemessen wird. Die obigen Definitionen decken sich also bei ebenen Kurven mit den im § 192 gegebenen.

Erteilt man nun dem Bogen s den unendlich kleinen Zuwachs $\Delta s = MM'$, so bekommt die Krümmung σ das Inkrement $\Delta\sigma = \mu\mu'$. Der Winkel i, den die Tangenten MT, $M'T'$ mit einander bilden, wird gleich $\mu o \mu'$ oder gleich dem Bogen des grössten Kreises $\mu\mu'$; folglich ist

$$\frac{i}{\Delta\sigma} = \frac{\text{Kreisbogen } \mu\mu'}{\text{Kurvenbogen } \mu\mu'} = \frac{\text{Kreisbogen } \mu\mu'}{\text{Sehne } \mu\mu'} \cdot \frac{\text{Sehne } \mu\mu'}{\text{Kurvenbogen } \mu\mu'}.$$

Die Quotienten auf der rechten Seite werden aber beide gleich 1 und folglich ist

$$\lim \frac{i}{\Delta \sigma} = 1.$$

Dies besagt: *Das Verhältnis zwischen dem Winkel, den die Tangenten in den Endpunkten eines unendlich kleinen Bogens bilden, und der Krümmung dieses Bogens hat den Grenzwert 1.*

Wie bei den ebenen Kurven nennen wir *mittleres Krümmungsmass eines Kurvenbogens* das Verhältnis der absoluten Krümmung zur Bogenlänge. Demgemäss wird das *Krümmungsmass* oder schlechtweg die *Krümmung* der Kurve in einem Punkte M der Grenzwert der mittleren Krümmung eines unendlich kleinen Bogens, dessen einer Endpunkt M ist. *Krümmungsradius* ist der Radius eines Kreises, dessen Krümmung gleich der der Kurve im Punkte M ist.

Nach diesen Definitionen wird also die Krümmung der Kurve AM im Punkte M:

$$\lim \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} = \frac{d\sigma}{ds},$$

und der Krümmungsradius $R = \frac{ds}{d\sigma}$ wie bei den ebenen Kurven. Die Differentiale ds und $d\sigma$ sind immer mit gleichem Zeichen zu nehmen.

262. Die Kurve AM sei auf drei rechtwinklige Axen bezogen und der Anfangspunkt O derselben sei der Mittelpunkt der mit dem Radius 1 konstruierten Kugel. Mit x, y, z bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes M, mit α, β, γ die Winkel, welche die Richtung MT der Tangente mit den positiven Koordinatenaxen bildet. Die Koordinaten des Punktes μ der sphärischen Kurve werden dann

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma,$$

und folglich wird das Differential $d\sigma$ des Bogens dieser Kurve

$$1) \qquad d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}.$$

Man kann noch einen andern Ausdruck für $d\sigma$ bilden. Differentiiert man die Gleichung



$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds},$$

ohne die unabhängige Variabel zu fixieren, so wird

$$d\cos\alpha = \frac{d^2x}{ds} - \frac{d^2s\,dx}{ds^2},$$

also

$$(d\cos\alpha)^2 = \left(\frac{d^2x}{ds}\right)^2 - \frac{2\,dx\,d^2x\,d^2s}{ds^3} + \left(\frac{d^2s\,dx}{ds^2}\right)^2.$$

Ersetzt man hier x erst durch y, sodann durch z, so erhält man die Ausdrücke für $(d\cos\beta)^2$ und $(d\cos\gamma)^2$; und demnach wird

$$d\sigma^2 = \frac{1}{ds^2}\left\{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2\right\} - 2\frac{d^2s}{ds^3}\left\{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z\right\}$$
$$+ \frac{(d^2s)^2}{ds^4}\left\{dx^2 + dy^2 + dz^2\right\}.$$

Die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

ergiebt aber durch Differentiation

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s,$$

und nach Substitution dieser Werte erhält man:

$$2)\qquad d\sigma = \frac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}{ds}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit ds, und ersetzt dann ds^2 und $ds\,d^2s$ durch ihre Werte als Funktionen der Koordinaten, so wird:

$$d\sigma = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - (dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2},$$

was sich auch in der Form schreiben lässt:

$$3)\qquad d\sigma = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

Hier ist die unabhängige Variabele nicht näher bezeichnet. Wählt man aber den Bogen s als diese Variabele, so wird d^2s null und die Gleichung 2) bekommt die einfachere Form:

$$d\sigma = \frac{1}{ds}\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}.$$

Nach der Gleichung 3) erhält der Krümmungsradius R oder $\frac{ds}{d\sigma}$ als Funktion der Koordinaten den Wert:

$$4)\quad R = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}.$$

Diese Formel gilt, wie auch die unabhängige Variabele definiert sein mag.

Der analytische Ausdruck für das Bogenelement $d\sigma$ lehrt, dass die geometrischen Definitionen des § 261 nur dann Geltung haben, wenn nicht nur die ersten Differentiale dx, dy, dz der gegebenen Kurven und also auch die Neigungswinkel α, β, γ der Tangente stetige Funktionen der unabhängigen Variabelen sind, sondern wenn auch überall die zweiten Differentialquotienten d^2x, d^2y, d^2z eindeutig bestimmte Werte haben.

Die Hauptnormale in einem Punkte einer Raumkurve.

263. Wir betrachten eine Raumkurve AM und die zugehörige sphärische Kurve $\alpha\mu$. (Fig. in § 261.) Durch den Punkt μ dieser letzteren Kurve legen wir die Tangente $\mu\nu$, und durch den entsprechenden Punkt M der gegebenen Kurve die Gerade MN parallel zu $\mu\nu$. Die Gerade MN heisst dann die *Hauptnormale* der Kurve AM im Punkte M.

Sind φ, ψ, χ die Winkel, welche die Richtung MN oder $\mu\nu$ mit den positiven Koordinatenaxen bildet, so wird, da $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Koordinaten des Punktes μ sind (§ 260):

$$1)\quad \cos\varphi = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma},\quad \cos\psi = \frac{d\cos\beta}{d\sigma},\quad \cos\chi = \frac{d\cos\gamma}{d\sigma},$$

oder:

$$2)\quad \cos\varphi = R\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad \cos\psi = R\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad \cos\chi = R\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

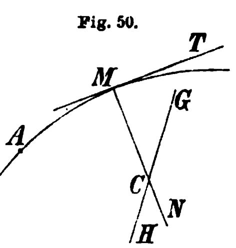
Wählt man den Bogen s als unabhängige Variabele, so kann man schreiben:

$$3)\quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{R}\cos\varphi,\quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{R}\cos\psi,\quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{1}{R}\cos\chi.$$

Der Krümmungsmittelpunkt eines Punktes der Raumkurve.

264. Wenn man in einem Punkte M der Raumkurve AM die Tangente MT und die Hauptnormale MN zieht und den Kreis in der Ebene NMT konstruiert, dessen Radius der Krümmungsradius ist und der die Tangente MT in M derart berührt, dass er mit den benachbarten Kurvenpunkten auf der nämlichen Seite der durch MT senkrecht zu NMT gelegten Ebene liegt, so wird das Centrum C dieses Kreises, welches auf der Hauptnormale MN liegt, der *Krümmungsmittelpunkt* des Punktes M genannt. Die Richtung MC ist die *Richtung des Krümmungsradius*. Errichtet man im Punkte C die Gerade GH senkrecht zu NMT, so heisst dieselbe die *Krümmungsaxe*.

Fig. 50.



Lehrsatz. *Die zu einem bestimmten Kurvenpunkte gehörige Krümmungsaxe ist die Grenzlage des Schnittes der Normalebene mit einer unendlich benachbarten Normalebene.*

Denn die Gleichung der Normalebene wird:

1) $(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma = 0.$

Diese Gleichung bezeichnen wir kurz mit $V = 0$. Die Normalebene in einem zweiten Kurvenpunkte wird erhalten, wenn man in der Gleichung 1) die Grössen

$$x, y, z, \quad \cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma$$

durch

$$x + \Delta x, \ y + \Delta y, \ z + \Delta z, \ \cos\alpha + \Delta\cos\alpha, \ \cos\beta + \Delta\cos\beta,$$
$$\cos\gamma + \Delta\cos\gamma$$

ersetzt und die so gebildete Gleichung werde durch $V + \Delta V = 0$ dargestellt. Bezeichnet t die Variabele, die man als unabhängige betrachtet, so wird die Schnittgerade der beiden Normalebenen durch die Gleichungen

$$V = 0, \ \frac{\Delta V}{\Delta t} = 0$$

definiert. Mithin wird die Grenze, nach welcher diese Schnittgerade konvergiert, wenn der zweite Kurvenpunkt dem ersten

unendlich nahe rückt, die Gerade, welche durch die Gleichungen

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dt} = 0, \quad \text{oder} \quad V = 0, \; dV = 0$$

definiert ist. Die eine dieser Gleichungen ist die Gleichung 1), die andere ergiebt sich, wenn man diese differentiiert, wobei ξ, η, ζ wie Konstante anzusehen sind; dies ergiebt:

$$(\xi - x)\, d\cos\alpha + (\eta - y)\, d\cos\beta + (\zeta - z)\, d\cos\gamma \\ - (dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma) = 0,$$

oder wenn man die Formeln im § 260 und § 263 beachtet:

$$2) \quad (\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\cos\psi + (\zeta - z)\cos\chi = R.$$

Diese Gleichung stellt eine Ebene dar, die senkrecht zur Hauptnormale ist und deren Entfernung vom Punkte M gleich R oder MC ist. Zum Beweise des ausgesprochenen Lehrsatzes muss man also nur noch zeigen, dass die zu M unendlich benachbarten Kurvenpunkte zwischen der Ebene (2) und der zu ihr parallelen im Punkte M sich befinden. Diese letztere Ebene ist durch die Gleichung

$$(\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\cos\psi + (\zeta - z)\cos\chi = 0$$

bestimmt. Ersetzt man ξ, η, ζ durch die Koordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ eines zu M benachbarten Kurvenpunktes, und wählt man jetzt ds als konstantes Differential, so hat man nach der Taylorschen Gleichung:

$$\Delta x = dx + \frac{1}{2} d^2x + R_3 = ds\cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{ds^2}{R}\cos\varphi + R_3,$$

wobei R_3 eine unendlich kleine Grösse dritter Ordnung wird; analoge Ausdrücke ergeben sich für Δy und Δz; substituiert man diese Werte in die Gleichung der Ebene, so erhält man den positiven Wert

$$\frac{ds^2}{2R} + \varepsilon,$$

wobei ε eine unendlich kleine Grösse dritter Ordnung ist. Desgleichen erhält man auch eine positive Grösse, nämlich $+ R$, wenn man an Stelle von ξ, η, ζ in der nämlichen Ebenengleichung die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene 2)

einsetzt. Folglich liegen die Punkte dieser Ebene und die zu M unendlich benachbarten Kurvenpunkte auf derselben Seite der durch MT senkrecht zur Hauptnormale errichteten Ebene.

In den besonderen Punkten, für welche $R = \infty$ wird, liegt der Krümmungsmittelpunkt und die Krümmungsaxe unendlich weit.

Für die Koordinaten x_1, y_1, z_1 des Krümmungsmittelpunktes ergeben sich demnach die Gleichungen:

$$3)\quad x_1 - x = R\cos\varphi,\quad y_1 - y = R\cos\psi,\quad z_1 - z = R\cos\psi,$$

oder

$$x_1 - x = R^2\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad y_1 - y = R^2\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad z_1 - z = R^2\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Diese Untersuchung bestätigt zugleich, dass durch die Gleichungen 1) oder 2) im § 263, wenn in denselben ds und $d\sigma$ positiv gewählt wird, die Kosinus der Winkel definiert sind, welche die Hauptnormale, und zwar in der Richtung vom Kurvenpunkte zum Krümmungsmittelpunkte mit den positiven Koordinatenaxen bildet.

Die Kosinus der Richtung der Krümmungsaxe.

265. Bezeichnen wir mit λ, μ, ν die Winkel, welche die eine oder die andere der beiden Richtungen der Krümmungsaxe mit den positiven Koordinatenaxen bildet, so bestehen, da diese Axe senkrecht zur Tangente und senkrecht zur Hauptnormale ist, und da auch diese letzteren zu einander senkrecht stehen, zwischen den Kosinus der neun Winkel

$$\alpha, \beta, \gamma;\quad \varphi, \psi, \chi;\quad \lambda, \mu, \nu$$

die bekannten Relationen, nämlich:

$$1)\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,\quad \cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1,$$
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1;$$

$$2)\quad \cos^2\alpha + \cos^2\varphi + \cos^2\lambda = 1,\quad \cos^2\beta + \cos^2\psi + \cos^2\mu = 1,$$
$$\cos^2\gamma + \cos^2\chi + \cos^2\nu = 1;$$

$$3)\quad \begin{cases} \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi = 0, \\ \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0, \\ \cos\varphi\cos\lambda + \cos\psi\cos\mu + \cos\chi\cos\nu = 0; \end{cases}$$

$$
4)\quad \begin{cases}
\cos\alpha\cos\beta+\cos\varphi\cos\psi+\cos\lambda\cos\mu=0,\\
\cos\alpha\cos\gamma+\cos\varphi\cos\chi+\cos\lambda\cos\nu=0,\\
\cos\beta\cos\gamma+\cos\psi\cos\chi+\cos\mu\cos\nu=0;
\end{cases}
$$

$$
5)\quad \begin{cases}
\cos\lambda=\pm(\cos\beta\cos\chi-\cos\gamma\cos\psi),\\
\cos\mu=\pm(\cos\gamma\cos\varphi-\cos\alpha\cos\chi),\\
\cos\nu=\pm(\cos\alpha\cos\psi-\cos\beta\cos\varphi);\\[1ex]
\cos\varphi=\pm(\cos\mu\cos\gamma-\cos\nu\cos\beta),\\
\cos\psi=\pm(\cos\nu\cos\alpha-\cos\lambda\cos\gamma),\\
\cos\chi=\pm(\cos\lambda\cos\beta-\cos\mu\cos\alpha);\\[1ex]
\cos\alpha=\pm(\cos\psi\cos\nu-\cos\chi\cos\mu),\\
\cos\beta=\pm(\cos\chi\cos\lambda-\cos\varphi\cos\nu),\\
\cos\gamma=\pm(\cos\varphi\cos\mu-\cos\psi\cos\lambda);
\end{cases}
$$

$$
6)\quad \cos\lambda(\cos\beta\cos\chi-\cos\gamma\cos\psi)+\cos\mu(\cos\gamma\cos\varphi-\cos\alpha\cos\chi)
+\cos\nu(\cos\alpha\cos\psi-\cos\beta\cos\varphi)=\pm 1.
$$

In den zehn Gleichungen 5) und 6) müssen entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen gewählt werden. Dieselben beziehen sich auf die eine oder die andere Richtung der Krümmungsaxe.

In den vorhergehenden Paragraphen sind die Ausdrücke für die Kosinus der Winkel α, β, γ und φ, ψ, χ als Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten gegeben. Die drei ersten Gleichungen 5) lassen auch die Kosinus der Winkel λ, μ, ν in derselben Weise ausdrücken. Die erste dieser Gleichungen lässt sich, ohne dass die unabhängige Variabele fixiert wird, schreiben:

$$
\cos\lambda=\pm\frac{1}{ds\,d\sigma}\left(dy\,d\frac{dz}{ds}-dz\,d\frac{dy}{ds}\right)=\pm R\,\frac{dy\,d^2z-dz\,d^2y}{ds^3},
$$

und durch Vertauschung der Buchstaben erhält man das Gleichungssystem:

$$
7)\quad \begin{cases}
\cos\lambda=\pm R\,\dfrac{dy\,d^2z-dz\,d^2y}{ds^3},\\[2ex]
\cos\mu=\pm R\,\dfrac{dz\,d^2x-dx\,d^2z}{ds^3},\\[2ex]
\cos\nu=\pm R\,\dfrac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{ds^3}.
\end{cases}
$$

Die Differenz zwischen einem Kurvenbogen und seiner Sehne.

266. Einen sehr bemerkenswerten Ausdruck für die Differenz zwischen einem Kurvenbogen und seiner Sehne erhält man, wenn man die Krümmungsradien in den Endpunkten des Bogens einführt. Diese Rechnung möge hier Platz finden als eine interessante Anwendung der gewonnenen Resultate.

Es sei s die Länge des Bogens, gerechnet von einem willkürlichen Anfangspunkt, x, y, z seien die rechtwinkligen Koordinaten des Endpunktes; die Grösse s werde als unabhängige Variabele genommen, R bezeichne den Krümmungsradius im Endpunkt. Dann ist

$$1)\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

$$2)\qquad \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2=\frac{1}{R^2}.$$

Durch Differentiation der Gleichung 1) folgt:

$$3)\qquad \frac{dx}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\,\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\,\frac{d^2z}{ds^2}=0.$$

Differentiiert man diese Gleichung, so erhält man in Berücksichtigung der Gleichung 2):

$$4)\qquad \frac{dx}{ds}\,\frac{d^3x}{ds^3}+\frac{dy}{ds}\,\frac{d^3y}{ds^3}+\frac{dz}{ds}\,\frac{d^3z}{ds^3}=-\frac{1}{R^2};$$

ferner ergiebt die Gleichung 2):

$$5)\qquad \frac{d^2x}{ds^2}\,\frac{d^3x}{ds^3}+\frac{d^2y}{ds^2}\,\frac{d^3y}{ds^3}+\frac{d^2z}{ds^2}\,\frac{d^3z}{ds^3}=\frac{1}{2}\,\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}$$

und endlich die Gleichung 4) auf Grund der Gleichung 5):

$$6)\qquad \frac{dx}{ds}\,\frac{d^4x}{ds^4}+\frac{dy}{ds}\,\frac{d^4y}{ds^4}+\frac{dz}{ds}\,\frac{d^4z}{ds^4}=-\frac{3}{2}\,\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}.$$

Sind Δx, Δy, Δz die Inkremente von x, y, z, wenn s um Δs wächst, so hat man nach der Taylorschen Entwickelung:

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{dx}{ds} + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds^2}\Delta s + \frac{1}{6}\frac{d^3x}{ds^3}\Delta s^2 + \frac{1}{24}\frac{d^4x}{ds^4}\Delta s^3 + \varepsilon_4,$$

wobei ε_4 eine Grösse bezeichnet, die mit Δs von vierter Ordnung unendlich klein wird. Erhebt man diese Gleichung ins Quadrat, so erhält man

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\Delta s + \left[\frac{1}{3}\frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{1}{4}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2\right]\Delta s^2$$
$$+ \left[\frac{1}{12}\frac{dx}{ds}\frac{d^4x}{ds^4} + \frac{1}{6}\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3}\right]\Delta s^3 + \varepsilon_4;$$

ε_4 ist auch noch eine unendlich kleine Grösse vierter Ordnung. Hieraus gewinnt man die Werte von $\left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2$ und $\left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)^2$, wenn man y und z an Stelle von x schreibt; addiert man alsdann diese drei Gleichungen, so folgt auf Grund der früheren Gleichungen:

$$\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta s^2} = 1 - \frac{1}{12}\cdot\frac{\Delta s^2}{R^2} - \frac{1}{24}\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}\cdot\Delta s^3 + \varepsilon_4.$$

Zieht man gemäss der Binomialformel die Quadratwurzel aus, so wird

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta s} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\frac{\Delta s^2}{R^2} + \frac{1}{24}\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}\Delta s^3 + \varepsilon_4\right) + \cdots$$

oder

$$7)\quad \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta s} = 1 - \frac{1}{24}\frac{\Delta s^2}{R^2} - \frac{1}{48}\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}\Delta s^3 + \varepsilon_4;$$

ε_4 bedeutet immer noch eine unendlich kleine Grösse vierter Ordnung, wenn Δs unendlich klein wird. Diese letzte Gleichung kann noch auf eine andere Weise geschrieben werden. R bezeichnet den Krümmungsradius im Endpunkte des Bogens s, also im Anfangspunkte von Δs; mit R_1 werde der Krümmungsradius im Endpunkte des Bogens Δs bezeichnet. Die Differenz der Grössen

$$\frac{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R^2}}{\Delta s} \quad \text{und} \quad \frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}$$

wird mit Δs unendlich klein, und substituiert man die erste derselben in die Gleichung 7) an Stelle der zweiten, so wird

dadurch nur die unendlich kleine Grösse ε_4 geändert. Es ist demnach

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta s} = 1 - \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\Delta s^2}{48} + \varepsilon_4.$$

Multipliziert man endlich beide Seiten mit Δs, so wird

$$8) \quad \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta s - \frac{1}{48}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_1^2}\right)\Delta s^3 + \varepsilon_5;$$

ε_5 wird von der fünften Ordnung unendlich klein.

Die Differenz zwischen einem unendlich kleinen Bogen Δs und seiner Sehne ist also gleich

$$\frac{1}{48}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_1^2}\right)\Delta s^3$$

bis auf eine unendlich kleine Grösse fünfter Ordnung, wobei R und R_1 die Krümmungsradien in den Endpunkten von Δs bedeuten.

Wir wenden die Gleichung 8) auf den Bogen eines Kreises vom Radius 1 an. Ist $\Delta s = 2a$, so ist

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = 2 \sin a$$

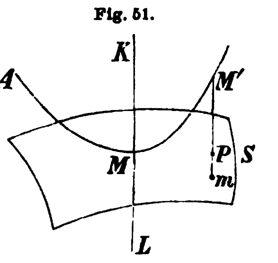
und die Formel 8) giebt:

$$\sin a = a - \frac{a^3}{6} + \varepsilon_5.$$

Die Ordnung der Berührung zwischen einer Kurve und einer Fläche. Die in einem Kurvenpunkte oskulierenden Flächen.

267. Es sei S irgend eine Fläche, AM eine Kurve, welche durch den Punkt M der Fläche S geht, KL die Normale in M an diese Fläche. Auf der Kurve wählen wir einen Punkt M' unendlich benachbart zu M, dessen Entfernung von der Normalen KL als unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachtet wird; endlich ziehen wir die Gerade $M'm$ parallel zu KT, welche die Fläche S in m trifft. Wenn nun die Länge $M'm$ unendlich klein von der Ordnung $k + 1$ wird, so werden wir sagen, dass

Fig. 51.



im Punkte M eine Berührung k^{ter} Ordnung zwischen der Fläche und der Kurve stattfindet.

Damit die Ordnung der Berührung nicht null wird, d. h. damit überhaupt eine Berührung zwischen Fläche und Kurve vorhanden ist, muss die Tangente der Kurve im Punkte M in der Tangentenebene der Fläche gelegen sein. Denn bezeichnen wir mit x, y, z die Koordinaten des Punktes M in Bezug auf drei rechtwinklige Axen, mit $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ die des Punktes M', und mit $x + \Delta' x$, $y + \Delta' y$, $z + \Delta' z$ die des Punktes m, ferner mit γ den Winkel, den die Tangente der Kurve mit der z-Axe bildet, und mit $dz = p\,dx + q\,dy$ den Wert von dz, welcher der Fläche S angehört, so ist für diese Fläche

$$\Delta' z = p \Delta' x + q \Delta' y + \varepsilon';$$

ε' ist eine unendlich kleine Grösse von höherer als der ersten Ordnung. Lässt man die z-Axe mit der Normalen KL zusammenfallen, so wird $p = 0$, $q = 0$. Folglich wird $\Delta' z$ oder Pm unendlich klein von höherer als der ersten Ordnung. Andererseits ist $M'm$ die Summe oder Differenz der Strecken $M'P = \Delta z$ und Pm. Damit also die Ordnung der unendlich kleinen Grösse $M'm$ grösser sei als 1, muss Δz von höherer als der ersten Ordnung unendlich klein werden. Bezeichnet aber γ den Winkel zwischen der Tangente der Kurve und der z-Axe, so ist

$$\Delta z = \operatorname{cotg} \gamma \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \varepsilon,$$

wobei ε eine unendlich kleine Grösse von höherer als der ersten Ordnung bedeutet. Mithin muss $\operatorname{cotg} \gamma = 0$ sein, d. h. die Tangente der Kurve muss in der Tangentialebene der Fläche liegen.

Ist eine Kurve C gegeben, und betrachtet man eine Familie von Flächen, die durch eine Gleichung, in welcher $n + 1$ willkürliche Parameter enthalten sind, definiert ist, so kann man im allgemeinen diese $n + 1$ Parameter derart bestimmen, dass in einem gegebenen Punkte C der Kurve eine Berührung n^{ter} Ordnung stattfindet. Die auf diese Weise bestimmte Fläche heisst unter den Flächen der betrachteten Familie, die durch denselben Punkt gehen, die *oskulierende*.

Wir wollen im folgenden die *oskulierende Ebene* und die *oskulierende Kugel* behandeln.

Die oskulierende Ebene.

268. Da die Gleichung einer Ebene nur drei willkürliche Parameter enthält, so ist die in einem Punkte der Kurve oskulierende Ebene (auch Schmiegungsebene genannt) diejenige, welche daselbst eine *Berührung zweiter Ordnung* hat. Indessen ist zu bemerken, dass für gewisse besondere Punkte der Kurve die Ordnung der Berührung auch grösser als zwei werden kann. Es sei im rechtwinkligen Koordinatensysteme

$$a\xi + b\eta + c\zeta - p = 0$$

die Gleichung der Ebene S; mit a, b, c bezeichnen wir die Kosinus der Winkel, welche das vom Anfangspunkte des Koordinatensystemes auf die Ebene gefällte Lot mit den positiven Axen bildet. Ist δ die Entfernung $M'P$ des Punktes M' $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ der Kurve von der Ebene S, so ist

Fig. 52.

$$\pm\,\delta = a(x + \Delta x) + b(y + \Delta y) + c(z + \Delta z) - p$$

und wir haben die Konstanten a, b, c, p, von denen drei willkürlich sind, da $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, so zu bestimmen, dass δ unendlich klein von dritter Ordnung wird. Die unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist die Entfernung des Punktes M' von der Normalen KL der Ebene, oder auch jede andere unendlich kleine Grösse, deren Verhältnis zu dieser Entfernung einen endlichen Grenzwert hat. Nach der Taylorschen Entwickelung wird nun, welches auch die unabhängige Variabele sein mag, die wir mit t bezeichnen wollen:

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2 + R_3,$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2}\Delta t^2 + R'_3,$$

$$\Delta z = \frac{dz}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}\Delta t^2 + R''_3,$$

R_3, R'_3, R''_3 bezeichnen unendlich kleine Grössen dritter Ordnung. Substituiert man diese Werte in die Gleichung für $\pm\delta$, so wird

$$\pm\delta = (ax + by + cz - p) + \left(a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt}\right)\Delta t$$
$$+ \left(a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{\Delta t^2}{2} + (aR_3 + bR'_3 + cR''_3);$$

damit dieser Ausdruck zum mindesten eine unendlich kleine Grösse dritter Ordnung werde, ist es notwendig und hinreichend, dass die Gleichungen bestehen:

$$1)\quad \begin{cases} ax + by + cz - p = 0, & \qquad ax + by + cz - p = 0, \\ a\dfrac{dx}{dt} + b\dfrac{dy}{dt} + c\dfrac{dz}{dt} = 0, & \text{oder} \quad a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0, \\ a\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{d^2y}{dt^2} + c\dfrac{d^2z}{dt^2} = 0, & \qquad a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen drückt aus, dass die Ebene durch den Punkt M geht. Sie bestimmt die Grösse p, wenn a, b, c bekannt sind. Die anderen beiden Gleichungen ergeben:

$$2)\quad \frac{a}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{b}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{c}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Die Nenner in diesen Verhältnissen sind proportional den Kosinus der Winkel λ, μ, ν, welche die eine oder die andere Richtung der Krümmungsaxe mit den positiven Koordinatenaxen bildet (§ 265); also ist

$$a = \cos\lambda, \quad b = \cos\mu, \quad c = \cos\nu.$$

Folglich ist die Oskulationsebene nichts anderes als die Ebene des Krümmungskreises, d. h. die Ebene, welche durch die Tangente und die Hauptnormale geht. Bei einer ebenen Kurve ist sie die Ebene, in welcher die Kurve liegt.

Verschwinden die drei Nenner in den Gleichungen 2) gleichzeitig für einen Punkt, so ist derselbe ein singulärer; alle Tangentenebenen haben daselbst eine Berührung zweiter Ordnung.

269. Genügen die Konstanten a, b, c, p nur den beiden ersten der Gleichungen 1), so hat die Ebene S im Punkte M mit der Kurve nur eine Berührung erster Ordnung; sie berührt

nur einfach und enthält noch einen unbestimmten Parameter. Wir wollen nun zwei Sätze beweisen, die bemerkenswert sind.

Lehrsatz I. *Die Oskulationsebene in einem Punkte* M *einer Kurve ist die Grenze, nach welcher jede Ebene konvergiert, die durch die Tangente des Punktes* M *und einen anderen Kurvenpunkt* M' *gelegt wird, wenn dieser dem Punkte* M *unendlich nahe rückt.*

Solange die Ebene, um welche es sich handelt, ihre Grenzlage noch nicht erlangt hat, hat sie im Punkte M eine einfache Berührung erster Ordnung mit der Kurve. Ihre Gleichung ist

$$1)\qquad a(\xi - x) + b(\eta - y) + c(\zeta - z) = 0,$$

und gemäss der Annahme, dass sie die Tangente enthält, ist

$$2)\qquad a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0.$$

Da ferner die Ebene durch einen Kurvenpunkt M' gehen soll, dessen Koordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ sind, so ist auch

$$3)\qquad a\,\Delta x + b\,\Delta y + c\,\Delta z = 0.$$

Bezeichnen wir wieder mit t die unabhängige Variabele, so ist

$$\Delta x = \Delta t\,\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}\,\Delta t^2 \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t+\theta\Delta t},$$

$$\Delta y = \Delta t\,\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\,\Delta t^2 \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_{t+\theta'\Delta t},$$

$$\Delta z = \Delta t\,\frac{dz}{dt} + \frac{1}{2}\,\Delta t^2 \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{t+\theta''\Delta t}.$$

Die letzten Glieder, die Reste der Taylorschen Entwickelung, bezeichnen die Werte der zweiten Differentialquotienten, gebildet für mittlere Werte im Innern des Intervalles von t bis $t + \Delta t$.

Die Bedingung wird demnach, auf Grund der Gleichung 2):

$$a\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t+\theta\Delta t} + b\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_{t+\theta'\Delta t} + c\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{t+\theta''\Delta t} = 0.$$

Geht man zur Grenze über, so wird $\Delta t = 0$, und da die zweiten Differentialquotienten als stetige Funktionen vorausgesetzt sind, so wird die Bedingung

$$4)\qquad a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0.$$

Die Werte von a, b, c, welche aus den Gleichungen 2) und 4) folgen, sind dieselben, welche die Oskulationsebene bestimmen.

Bemerkung. Die Koordinaten x, y, z sind im § 268 als rechtwinklig vorausgesetzt; man erkennt aber aus diesem Lehrsatze, dass die Gleichung der Oskulationsebene dieselbe Form auch bei schiefwinkligen Axen behält.

270. Lehrsatz II. *Die Oskulationsebene in einem Punkte* M *einer Kurve ist die Grenze, nach welcher eine Ebene konvergiert, die durch den Punkt* M *und zwei andere Kurvenpunkte* M′ M″ *gelegt ist, wenn diese letzteren unendlich nahe an* M *rücken.*

Ist wiederum t die unabhängige Variabele, und sind die Koordinaten der Kurvenpunkte durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

definiert, werden ferner die Werte der Variabelen, welche den Punkten M, M', M'' entsprechen, mit t, $t + h_1$, $t + h_2$ bezeichnet, so ist die Bedingung, dass die Ebene

$$a\xi + b\eta + c\zeta - p = 0$$

durch den Punkt M geht:

$$a\varphi(t) + b\psi(t) + c\chi(t) - p = 0.$$

Bezeichnen wir den Ausdruck links mit $F(t)$, so werden die Bedingungen, dass die Ebene die drei Punkte M, M', M'' enthält:

$$F(t) = 0, \quad F(t + h_1) = 0, \quad F(t + h_2) = 0.$$

Lässt man die beiden Grössen h_1 und h_2 in willkürlicher Weise stetig nach null konvergieren, so reduziert sich dieses System nach § 58 auf

$$F(t) = 0, \quad F'(t) = 0, \quad F''(t) = 0.$$

Zur Bestimmung der Konstanten a, b, c, p erhält man also die Relationen:

$$\begin{aligned} a x + b y + c z - p &= 0, \\ a\,dx + b\,dy + c\,dz &= 0, \\ a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z &= 0, \end{aligned}$$

wodurch die Oskulationsebene definiert ist.

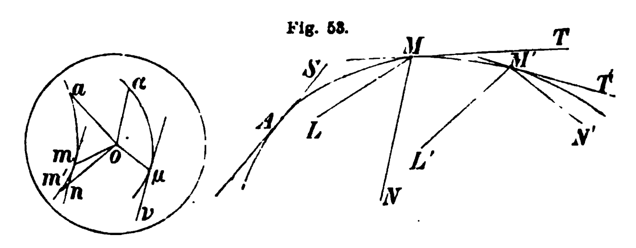
Bemerkung. Man definiert auch von vornherein die Oskulationsebene vermittelst einer der beiden zuletzt bewiesenen Lehrsätze. Die Hauptnormale kann dann definiert werden als die Schnittlinie der Normalebene mit der oskulierenden.

Die Torsion oder zweite Krümmung der Raumkurven.

271. Die Änderung der Tangentenrichtung beim Übergange von einem Kurvenpunkt zu einem andern hat uns zu dem Begriffe der Krümmung geführt. Bei den Raumkurven aber hat man noch eine andere Eigentümlichkeit zu betrachten, *die Torsion oder zweite Krümmung,* von welchen der Name *Kurven doppelter Krümmung* herrührt. Die Torsion eines Kurvenbogens ergiebt sich aus der Änderung in der Stellung der Oskulationsebene, oder der Krümmungsaxe, beim Übergange von dem einen Ende des Bogens zum andern. Zu ihrer präzisen Definition müssen wir dieselben Betrachtungen wie bei der ersten Krümmung anwenden.

Es sei AM ein Kurvenbogen, MT die Richtung der Tangente in M, MN die der Hauptnormalen und ML die

Fig. 53.



eine oder andere der beiden Richtungen des Lotes auf der Oskulationsebene, welches wir die Axe derselben nennen. Die Richtung der Tangente ist hierbei in jedem Punkte des Bogens AM ebenso bestimmt, wie im § 261. Wir konstruieren eine Kugel mit beliebigem Mittelpunkt O, deren Radius gleich der Einheit ist, und ziehen die Radien derselben, welche parallel sind den Tangenten in den verschiedenen Punkten des Bogens AM; die Endpunkte derselben bestimmen auf der Kugel die Kurve $\alpha\mu$, deren Länge die erste absolute Krümmung des Bogens AM misst. Sodann ziehen wir durch

den Mittelpunkt O derselben Kugel die Durchmesser, welche den Axen der Oskulationsebenen in den verschiedenen Punkten des Bogens AM parallel sind. Die Endpunkte dieser Durchmesser werden auf der Kugel zwei symmetrische Kurvenbogen bestimmen. Ist am einer dieser Bogen, so heisst die Länge τ desselben die *absolute Torsion* oder zweite Krümmung des Bogens AM.

Ist der Endpunkt A des Bogens AM fest und M beweglich, so wird die Krümmung τ variabel. Das Differential $d\tau$ heisst der *Torsionswinkel* im Punkte M oder der *Kontingenswinkel in Bezug auf die zweite Krümmung.*

Ist $MM' = \Delta s$ ein Zuwachs des Bogens s, welcher unendlich klein wird, und j der Winkel, den die Oskulationsebene des Punktes M mit der Oskulationsebene in M' bildet, so bestimmen die Endpunkte der Radien Om, Om', parallel zu den Axen dieser Ebenen, auf der sphärischen Kurve den Bogen $\Delta\tau$, der nach unserer Definition die Torsion des Bogens MM' ist. Nach dem bei der ersten Krümmung im § 261 angewandten Verfahren kann man beweisen, dass

$$\lim \frac{j}{\Delta\tau} = 1$$

wird; d. h. das Verhältnis des Winkels der Oskulationsebenen in den Endpunkten eines Bogens zur Torsion dieses Bogens hat, wenn der Bogen unendlich klein wird, die Einheit zur Grenze.

Mittlere Torsion eines Kurvenbogens ist das Verhältnis der absoluten Torsion zur Bogenlänge. Endlich nennen wir Mass der Torsion oder der zweiten Krümmung, oder auch schlechtweg *Torsion der Kurve in einem bestimmten Punkte* die Grenze, nach welcher die mittlere Torsion eines unendlich kleinen Kurvenbogens konvergiert, der diesen Punkt zum Anfang hat. Demnach hat die Torsion im Punkte M der Kurve AM den Wert:

$$\lim \frac{\Delta\tau}{\Delta s} \quad \text{oder} \quad \frac{d\tau}{ds}.$$

Auch diese zweite Krümmung kann man der Krümmung eines Kreises gleichsetzen. Demnach nennt man *Torsionsradius*

den Radius eines Kreises, dessen Krümmung gleich der Torsion der Kurve in dem betrachteten Punkte ist. Für den Wert T derselben erhält man

$$T = \frac{ds}{d\tau}$$

und das Differential $d\tau$ hat hier dasselbe Zeichen wie ds.

272. Die Kurve AM sei auf drei rechtwinklige Axen bezogen und der Mittelpunkt O der Kugel in den Anfangspunkt dieses Koordinatensystems gelegt. x, y, z bezeichnen die Koordinaten des Punktes M, λ, μ, ν die Winkel, welche eine der Richtungen ML oder Om der Axe der Oskulationsebene mit den positiven Koordinatenaxen bildet. Die Koordinaten des Punktes m sind dann

$$\cos\lambda, \quad \cos\mu, \quad \cos\nu,$$

und folglich wird das Differential $d\tau$ des Bogens τ:

$$d\tau = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}.$$

Die Kosinus der Winkel λ, μ, ν sind als Funktionen der Koordinaten bekannt (§ 265); man kann demnach $d\tau$ und T als Funktion dieser Grössen berechnen, was später geschehen soll.

273. Ich will hier einen Satz einschalten, den ich schon vor längerer Zeit bekannt gemacht habe, und der von grosser Bedeutung in der Theorie der Raumkurven ist. Derselbe besteht einfach darin, dass die Tangenten in den entsprechenden Punkten m und μ der beiden sphärischen Kurven, welche wir eingeführt haben, parallel sind.

Indem wir die Bezeichnungen der früheren Paragraphen beibehalten, haben wir die beiden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{aligned} &\cos\alpha d\cos\alpha + \cos\beta d\cos\beta + \cos\gamma d\cos\gamma = 0,\\ &\cos\lambda d\cos\alpha + \cos\mu d\cos\beta + \cos\nu d\cos\gamma = 0. \end{aligned}$$

Denn da die Grössen $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$ proportional sind zu $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$, so drücken die Gleichungen 1) aus, dass die Hauptnormale zur Tangente und zur Axe der Oskulationsebene senkrecht steht. Beachtet man die zweite dieser Gleichungen und differentiiert man die folgenden:

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

so erhält man:

$$2)\quad \begin{aligned} \cos\alpha\, d\cos\lambda + \cos\beta\, d\cos\mu + \cos\gamma\, d\cos\nu = 0,\\ \cos\lambda\, d\cos\lambda + \cos\mu\, d\cos\mu + \cos\nu\, d\cos\nu = 0. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Differentiale

$$3)\qquad d\cos\alpha,\quad d\cos\beta,\quad d\cos\gamma$$

in den Gleichungen 1) sind aber genau dieselben, wie die Koeffizienten der Differentiale

$$4)\qquad d\cos\lambda,\quad d\cos\mu,\quad d\cos\nu$$

in den Gleichungen 2); folglich sind die Differentiale 3) und 4) einander proportional, d. h. man hat:

$$5)\qquad \frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha} = \frac{d\cos\mu}{d\cos\beta} = \frac{d\cos\nu}{d\cos\gamma}.$$

Diese Gleichungen beweisen die ausgesprochene Eigenschaft: denn die Kosinus der Winkel, welche die Tangente im Punkte m der zweiten sphärischen Kurve mit den Axen bildet, sind proportional den Differentialen der Koordinaten, d. h. den Differentialen 4); und ebenso sind die Kosinus der Winkel, welche die Tangente im Punkte μ der ersten Kurve bildet, proportional den Differentialen 3). Hieraus folgt, dass diese beiden Tangenten parallel sind.

Aber indem man die Punkte a und α zu Anfangspunkten der sphärischen Kurven wählt, können die Tangenten in entsprechenden Punkten die nämliche Richtung oder die entgegengesetzte haben. Die sphärische Kurve, welche sich auf die Axen der Oskulationsebenen bezieht, setzt sich nach unserer Konstruktion aus zwei symmetrischen Teilen zusammen, welche den beiden Richtungen dieser Axen entsprechen. Solange man also nur den einen oder den anderen Teil der Kurve am berücksichtigt, können die Richtungen der Tangenten in m und μ gleich oder entgegengesetzt sein. Wir wollen nun annehmen, dass man die Kurve am derart konstruiert hat, dass die Tangenten in m und μ die nämliche Richtung

haben, dieselbe, welche zugleich Richtung der Hauptnormalen im Punkte M ist. Alsdann ergiebt, auf Grund der Gleichungen 2) des § 260, die obige Formel:

$$6)\qquad \begin{cases} d\cos\lambda = \cos\varphi\, d\tau, \\ d\cos\mu = \cos\psi\, d\tau, \\ d\cos\nu = \cos\chi\, d\tau. \end{cases}$$

Zusammenstellung und Vervollständigung der Hauptformeln für Raumkurven.

274. Wir wollen hier noch die verschiedenen Resultate, welche wir in den vorigen Paragraphen abgeleitet haben, zusammenstellen.

Wir bezeichneten mit

x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten,

α, β, γ die Winkel, welche die Richtung der Tangente, genommen in der Richtung der positiv wachsenden unabhängigen Variabelen, mit den positiven Koordinatenaxen bildet,

φ, ψ, χ die Winkel, welche die Hauptnormale mit denselben Axen bildet,

λ, μ, ν die Winkel, welche die entsprechende Richtung der Axe der Oskulationsebene mit den positiven Koordinatenaxen bildet,

$ds, d\sigma, d\tau$ das Differential des Bogens, den Kontingenzwinkel und den Torsionswinkel.

Alsdann hat man:

$$1)\quad dx = ds\cos\alpha,\qquad dy = ds\cos\beta,\qquad dz = ds\cos\gamma,\qquad (ds>0),$$

$$2)\quad d\cos\alpha = \cos\varphi\, d\sigma,\quad d\cos\beta = \cos\psi\, d\sigma,\quad d\cos\gamma = \cos\chi\, d\sigma,\qquad (d\sigma>0),$$

$$3)\quad d\cos\lambda = \cos\varphi\, d\tau,\quad d\cos\mu = \cos\psi\, d\tau,\quad d\cos\nu = \cos\chi\, d\tau,\qquad (d\tau>0),$$

und die Richtung der Axe der Oskulationsebene ist nun bestimmt, wie im vorigen Paragraphen angegeben wurde.

Differentiiert man die Gleichung

$$\cos^2\varphi = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\lambda,$$

so folgt:

$$\cos\varphi d\cos\varphi = -\cos\alpha d\cos\alpha - \cos\lambda d\cos\lambda,$$

und benutzt man die Gleichungen 2) und 3), so wird:

$$d\cos\varphi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau.$$

Durch Vertauschung der Buchstaben erhält man ein neues System von Gleichungen:

$$4)\qquad \begin{cases} d\cos\varphi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau, \\ d\cos\psi = -\cos\beta\, d\sigma - \cos\mu\, d\tau, \\ d\cos\chi = -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau. \end{cases}$$

Die Gleichungen 2), 3), 4) drücken die Differentiale der neun Kosinus als Funktionen derselben und der Differentiale ds, $d\sigma$, $d\tau$ aus. Andererseits hat man

$$5)\qquad ds = R\, d\sigma = T\, d\tau.$$

Aus den Gleichungen 4) folgt noch:

$$\sqrt{(d\cos\varphi)^2 + (d\cos\psi)^2 + (d\cos\chi)^2} = \sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}.$$

Dieser Ausdruck ist das Differential des Bogens einer dritten sphärischen Kurve, welche entsteht, wenn man durch das Centrum der Kugel die Radien zieht, welche den Hauptnormalen der gegebenen Kurve parallel sind.

275. Als Beispiel für die Anwendung dieser Formeln wollen wir die Berechnung des Torsionsradius T als Funktion der rechtwinkligen Koordinaten ausführen. Wir benutzen die Gleichungen 7) in § 265, nämlich:

$$\frac{ds^3}{R}\cos\lambda = \pm(dy\, d^2z - dz\, d^2y),$$

$$\frac{ds^3}{R}\cos\mu = \pm(dz\, d^2x - dx\, d^2z),$$

$$\frac{ds^3}{R}\cos\nu = \pm(dx\, d^2y - dy\, d^2x).$$

Differentiiert man diese Gleichungen, indem man die Formeln 3) und 5) des vorigen Paragraphen beachtet, so findet man:

$$d\left(\frac{ds^3}{R}\right)\cos\lambda + \frac{ds^4}{RT}\cos\varphi = \pm(dy\, d^3z - dz\, d^3y),$$

$$d\left(\frac{ds^3}{R}\right)\cos\mu + \frac{ds^4}{RT}\cos\psi = \pm(dz\, d^3x - dx\, d^3z),$$

$$d\left(\frac{ds^3}{R}\right)\cos\nu + \frac{ds^4}{RT}\cos\chi = \pm(dx\, d^3y - dy\, d^3x),$$

und addiert man diese Gleichungen, nachdem man dieselben bezüglich multipliziert hat, mit den drei folgenden (§ 263):

$$\frac{ds^2}{R}\cos\varphi = d^2x - \frac{d^2s}{ds}\,dx,$$

$$\frac{ds^2}{R}\cos\psi = d^2y - \frac{d^2s}{ds}\,dy,$$

$$\frac{ds^2}{R}\cos\chi = d^2z - \frac{d^2s}{ds}\,dz,$$

so folgt:

$$\frac{ds^6}{R^2T} = \pm\left[(dy\, d^3z - dz\, d^3y)\, d^2x + (dz\, d^3x - dx\, d^3z)\, d^2y + (dx\, d^3y - dy\, d^3x)\, d^2z\right].$$

Ersetzt man nun $\frac{ds^6}{R^2}$ durch seinen Wert aus der Gleichung 4) des § 262, so wird

$$T = \pm\frac{(dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2 + (dz\, d^2x - dx\, d^2z)^2 + (dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2}{(dy\, d^3z - dz\, d^3y)\, d^2x + (dz\, d^3x - dx\, d^3z)\, d^2y + (dx\, d^3y - dy\, d^3x)\, d^2z}.$$

Der Wert von T ist wesentlich positiv; diese letzte Formel bestimmt demnach das Vorzeichen, welches man in den Gleichungen 5), 6), 7) des § 265 an Stelle des zweideutigen Zeichens $\pm$ zu setzen hat, wenn man sich erinnert, dass die Richtung der Axe der Oskulationsebene durch die im § 273 gemachte Annahme fixiert ist. Auch ist zu bemerken, dass sich der Torsionsradius als eine rationale Funktion der Differentiale darstellt.

276. Wenn man den Nenner dieses Ausdruckes für T null setzt bei allen Werten der Variabelen, so erhält man die Bedingung dafür, dass die Kurve eine ebene ist. Macht man x zur unabhängigen Variabelen, setzt also $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, so wird:

$$T = \pm \frac{(dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2 + dx^2\,(d^2z)^2 + dx^2\,(d^2y)^2}{dx\,(d^3y\, d^2z - d^2y\, d^3z)}$$

und die Bedingung wird:

$$d^3y\, d^2z - d^2y\, d^3z = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich in der Form schreiben:

$$d\,\frac{d^2z}{d^2y} = 0,$$

sie drückt also aus, dass das Verhältnis $\frac{d^2z}{d^2y}$ gleich einer Konstanten B ist; also hat man

$$d^2z = B d^2y \quad \text{oder} \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{B\, d^2y}{dx^2},$$

und folglich können $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{B\,dy}{dx}$ nur um eine Konstante differieren; es ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{B\,dy}{dx} + A$$

und hieraus folgt

$$z = By + Ax + C,$$

wobei C eine neue Konstante ist. Diese Gleichung stellt eine Ebene dar, in welcher die Kurve liegt.

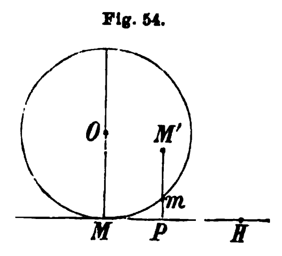
Die oskulierende Kugel.

277. Die Gleichung einer Kugel enthält vier willkürliche Parameter: die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius. In jedem Punkte einer Kurve kann man demnach eine Berührung der dritten Ordnung zwischen der Kurve und einer Kugel herbeiführen, selbstverständlich unter der Voraussetzung, dass die vier ersten Ableitungen der Koordinaten bestimmte Werte haben. Diese Kugel heisst die *oskulierende* oder die *Schmiegungskugel.*

Durch einen Punkt M der gegebenen Kurve legen wir eine Kugel, deren Mittelpunkt wir mit O bezeichnen. Auf der Kurve nehmen wir einen Punkt M' unendlich benachbart zu M und betrachten die Ebene, welche durch den Punkt M' und den Radius MO geht. Dieselbe schneidet die Kugel in

einem grössten Kreise und die Tangentenebene der Kugel im Punkte M längs einer Geraden MH, welche den grössten Kreis berührt. Wir fällen das Lot $M'P$ auf MH und bezeichnen mit m den Punkt, wo dasselbe die Kreisperipherie durchschneidet. Nach der allgemeinen Definition im § 267 wird die Kugel O die oskulierende im Punkte M, wenn die Strecke $M'm$ unendlich klein von der vierten Ordnung wird, wobei die Linie MP oder jede andere Strecke, deren Verhältnis zu MP endlich bleibt, als unendlich klein von erster Ordnung betrachtet wird. Es ist:

Fig. 54.



$$M'm = M'P - mP,$$

und $mP = \frac{\overline{Mm}^2}{2MO}$ wird unendlich klein von zweiter Ordnung; hieraus folgt schon, dass $M'P$ jedenfalls selbst von zweiter Ordnung unendlich klein werden muss, was mit dem im § 267 Gesagten übereinstimmt. Bezeichnen wir mit r den Radius der Kugel, mit s den Bogen, der in M endet und von irgend einem Kurvenpunkte an gemessen ist, mit Δs den Bogen MM', so hat man

$$mP = \frac{\overline{Mm}^2}{2r} = \frac{\overline{MP}^2 + \overline{mP}^2}{2r} = \frac{\overline{MM'}^2 - \overline{M'P}^2 + \overline{mP}^2}{2r},$$

oder

$$mP = \frac{\Delta s^2}{2r} - \frac{(\Delta s - MM')(\Delta s + MM') + \overline{M'P}^2 - \overline{mP}^2}{2r}.$$

Die Differenz zwischen dem Bogen Δs und seiner Sehne wird aber eine unendlich kleine Grösse dritter Ordnung (§ 266); $\overline{M'P}^2$ und $\overline{mP}^2$ werden unendlich kleine Grössen vierter Ordnung, folglich ist die Differenz der beiden Grössen

$$mP, \quad \frac{\Delta s^2}{2r}$$

unendlich klein von vierter Ordnung. Mithin ist die oskulierende Kugel diejenige, für welche

$$M'P - \frac{\Delta s^2}{2r}$$

eine unendlich kleine Grösse vierter Ordnung wird. Denn es folgt umgekehrt: wird $M'P - \frac{\Delta s^2}{2r}$ von vierter Ordnung unendlich klein, so wird $M'P$ von zweiter Orduung unendlich klein, also nach der obigen Formel $mP - \frac{\Delta s^2}{2r}$, und folglich auch die Differenz $M'P - mP$ von vierter Ordnung.

Bezeichnen wir mit x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Mittelpunktes der Kugel in Bezug auf drei rechtwinklige Axen; mit x, y, z die Koordinaten des Punktes M, mit $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ die des Punktes M', so ist die Gleichung der Kugel

$$(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2 = r^2,$$

und die der Tangentenebene im Punkte M:

$$(x - x_0)(\xi - x) + (y - y_0)(\eta - y) + (z - z_0)(\zeta - z) = 0.$$

Da der Kugelmittelpuukt und der Punkt M auf der nämlichen Seite der Tangentenebene liegen, so erhält man Werte mit gleichem Zeichen, wenn die Koordinaten ξ, η, ζ in der vorstehenden Gleichung durch die Koordinaten des einen oder anderen dieser Punkte ersetzt werden. Die Substitution der Koordinaten des Mittelpunktes ergiebt $-r^2$; folglich wird auch die Substitution der Koordinaten des Punktes M' einen negativen Wert ergeben. Demnach wird die Entfernung $M'P$ des Punktes M' von der Tangentenebene

$$M'P = \frac{(x_0 - x)\,\Delta x + (y_0 - y)\,\Delta y + (z_0 - z)\,\Delta z}{r},$$

und folglich hat man:

$$M'P \cdot r - \frac{1}{2}\Delta s^2 = (x_0 - x)\,\Delta x + (y_0 - y)\,\Delta y + (z_0 - z)\,\Delta z - \frac{1}{2}\Delta s^2.$$

Dies ist die Differenz, die eine unendlich kleine Grösse vierter Ordnung werden muss. Nun ist

$$x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3x}{dt^3}\Delta t^3 + \cdots,$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3y}{dt^3}\Delta t^3 + \cdots,$$

und

$$\Delta z = \frac{dz}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3y}{dt^3}\Delta t^3 + \cdots,$$

$$\Delta s = \frac{ds}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2 s}{dt^2}\Delta t^2 + \cdots,$$

also

$$\Delta s^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \Delta t^2 + \frac{ds}{dt}\frac{d^2 s}{dt^2}\Delta t^3 + \cdots$$

Um die gewünschte Bedingung zu erfüllen, hat man diese Werte in die obige Gleichung einzusetzen und die Summe der unendlich kleinen Grössen erster, zweiter und dritter Ordnung einzeln gleich null zu setzen. So erhält man die Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} (x_0 - x)\,dx + (y_0 - y)\,dy + (z_0 - z)\,dz = 0, \\ (x_0 - x)\,d^2x + (y_0 - y)\,d^2y + (z_0 - z)\,d^2z - ds^2 = 0, \\ (x_0 - x)\,d^3x + (y_0 - y)\,d^3y + (z_0 - z)\,d^3z - 3\,ds\,d^2s = 0, \end{cases}$$

durch welche die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Mittelpunktes der oskulierenden Kugel bestimmt sind. Der Radius r ist dann durch die Gleichung

$$2)\qquad (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2 - r^2 = 0$$

gegeben. Die erste der Gleichungen 1) erhält man, indem man die Gleichung 2) differentiiert unter der Annahme, dass x_0, y_0, z_0, r konstant sind. Ebenso erhält man die beiden letzten Gleichungen 1), indem man die erste zweimal nach einander differentiiert.

278. Dieser Bemerkung gemäss können die Gleichungen 1) und 2) kurz mit

$$V = 0,\; dV = 0,\; d^2V = 0,\; d^3V = 0$$

bezeichnet werden. Sind nur die drei ersten erfüllt, so hat die Kugel mit der Kurve nur eine Berührung zweiter Ordnung, und es bleibt eine willkürliche Konstante. Die Bedingungen sagen aus, dass der Mittelpunkt der Kugel auf der Krümmungsaxe liegt. Sind nur die beiden ersten Gleichungen erfüllt, so hat die Kugel nur eine Berührung erster Ordnung mit der Kurve, aber es bleiben zwei Konstanten in ihrer Gleichung willkürliche. Die Mittelpunkte aller dieser Kugeln liegen in der Normalebene des Berührungspunktes. Ist endlich nur die erste Bedingung allein erfüllt, so findet in dem

gemeinsamen Punkte keine Berührung mehr statt, und es bleiben drei Konstanten willkürlich.

In jedem dieser drei Fälle kann man der Kugel noch die Bedingung auferlegen, durch einen Kurvenpunkt $M'(x+\Delta x$ $y+\Delta y, z+\Delta z)$ hindurchzugehen, was die Gleichung

$$V+\Delta V=0$$

liefert. Wenn nun die i ersten Gleichungen der obigen vier erfüllt sind $(i=1,2,3)$ und es bezeichnet t die unabhängige Variabele, so kann die neue Bedingung in der Form

$$\frac{1}{i!}\left(\frac{d^iV}{dt^i}+\varepsilon\right)=0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^iV}{dt^i}+\varepsilon=0$$

dargestellt werden, wobei ε mit Δt null wird. Sie reduziert sich demnach auf

$$\frac{d^iV}{dt^i}=0 \quad \text{oder} \quad d^iV=0,$$

wenn der Punkt M' mit dem Punkte M beliebig nahe zusammenrückt. Dies besagt: *Jede Kugel, welche im Punkte* M *eine Berührung* i^ter^ *Ordnung mit der Kurve besitzt, kann als die Grenze einer Kugel betrachtet werden, die daselbst eine Berührung* i − 1ter *Ordnung hat und durch einen anderen Kurvenpunkt* M' *geht, welcher unendlich nahe an* M *heranrückt.*

279. Wir geben hier noch zwei Lehrsätze, welche bemerkenswert sind.

Lehrsatz I. *Die in einem Punkte* M *der Kurve oskulierende Kugel ist die Grenze der Kugel, welche durch den Punkt* M *und drei andere Kurvenpunkte geht, die unendlich nahe an* M *heranrücken.*

Ist die Kurve durch die Gleichungen

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)$$

definiert, und sind t, $t+h_1$, $t+h_2$, $t+h_3$ die Werte von t, welche den vier betrachteten Punkten entsprechen, so werden, indem man

$$[\varphi(t)-a]^2+[\psi(t)-b]^2+[\chi(t)-c]^2-r^2=V$$

setzt, die Gleichungen zur Bestimmung der Kugelgrenze, wie im § 270:

$$V=0,\quad dV=0,\quad d^2V=0,\quad d^3V=0$$

und diese bestimmen die oskulierende Kugel.

280. Lehrsatz II. *Der Mittelpunkt der oskulierenden Kugel des Punktes* M *ist die Grenze, nach welcher der Schnittpunkt der Krümmungsaxe des Punktes* M *mit der Normalebene eines anderen Kurvenpunktes konvergiert, wenn dieser unendlich benachbart zu* M *wird. Der Mittelpunkt ist auch die Grenze des Schnittpunktes der Normalebene des Punktes* M *mit den Normalebenen zweier anderer Kurvenpunkte, die unendlich benachbart werden zu* M.

Denn wenn man x_0, y_0, z_0 als variabele Koordinaten in den Gleichungen 1) des § 277 betrachtet, so ist die erste derselben die Normalebene des Punktes M, und das System der ersten beiden Gleichungen bestimmt nach § 264 die Krümmungsaxe. Bezeichnen wir mit $F=0$, $dF=0$ diese beiden Gleichungen, so hat die Normalebene in einem zu M benachbarten Punkte die Gleichung $F+\Delta F=0$; und indem man diese zu den beiden vorigen hinzufügt, erhält man die Gleichungen des Schnittpunktes. Nun kann aber diese letzte Gleichung vermittelst der vorigen auf die Form $\left(\frac{d^2F}{dt^2}\right)_{t+\theta\Delta t}=0$ gebracht werden, wobei t die unabhängige Variabele ist, und der Ausdruck links für einen mittleren Wert $t+\theta\Delta t$ zu bilden ist. Konvergiert Δt nach 0, so wird die Bedingung schliesslich $\frac{d^2F}{dt^2}=0$ oder $d^2F=0$, womit der erste Teil des ausgesprochenen Satzes bewiesen ist.

Der zweite Teil wird durch eine Überlegung bewiesen, welche der im vorigen Paragraphen angewandten vollkommen analog ist.

Die Koordinaten des Mittelpunktes und der Radius der oskulierenden Kugel.

281. Die Koordinaten des Mittelpunktes sind bestimmt durch die Gleichung der Normalebene zusammen mit den beiden Gleichungen, welche aus dieser durch zweimalige Differentiation nach der unabhängigen Variabelen hervorgehen, als deren Funktionen die Koordinaten der Kurve auftreten. Bevor man eine dieser Differentiationen ausführt, kann man die

Gleichung, um deren Differentiation es sich handelt, mit einer beliebigen Funktion der Koordinaten multiplizieren. Denn bezeichnet man die Gleichung mit $V = 0$ und ersetzt man sie durch $MV = 0$, so erhält man durch Differentiation $MdV + VdM = 0$, und dies ist, weil $V = 0$ ist, äquivalent mit $dV = 0$. Indem wir alle früheren Bezeichnungen beibehalten (§ 274), wird die Gleichung der Normalebene:

$$1)\quad (x_0 - x)\cos\alpha + (y_0 - y)\cos\beta + (z_0 - z)\cos\gamma = 0.$$

Differentiiert man dieselbe, indem x_0, y_0, z_0 als Konstante behandelt werden, so folgt nach den Gleichungen 2) und 5) des § 274:

$$2)\quad (x_0 - x)\cos\varphi + (y_0 - y)\cos\psi + (z_0 - z)\cos\chi = R$$

und durch nochmalige Differentiation:

$$3)\quad (x_0 - x)\cos\lambda + (y_0 - y)\cos\mu + (z_0 - z)\cos\nu = -\frac{TdR}{ds}.$$

Addiert man nun diese drei Gleichungen, nachdem man sie vorher jedesmal bezüglich mit $\cos\alpha$, $\cos\varphi$, $\cos\lambda$, sodann mit $\cos\beta$, $\cos\psi$, $\cos\mu$, endlich mit $\cos\gamma$, $\cos\chi$, $\cos\nu$ multipliziert hat, so folgt:

$$4)\quad \begin{cases} x_0 - x = R\cos\varphi - \dfrac{TdR}{ds}\cos\lambda, \\ y_0 - y = R\cos\psi - \dfrac{TdR}{ds}\cos\mu, \\ z_0 - z = R\cos\chi - \dfrac{TdR}{ds}\cos\nu. \end{cases}$$

Quadriert und addiert man diese Gleichungen, so erhält man für das Quadrat des Kugelradius den einfachen Ausdruck

$$5)\quad r^2 = R^2 + \frac{T^2dR^2}{ds^2}.$$

Der Mittelpunkt der oskulierenden Kugel liegt auf der Krümmungsaxe und die Gleichung 3) lehrt, dass seine Entfernung von der Ebene des Krümmungskreises gleich dem absoluten Werte von $\frac{TdR}{ds}$, oder nach Gleichung 5) gleich $\sqrt{r^2 - R^2}$ ist; hieraus folgt:

Der Krümmungskreis in einem Punkte der Kurve ist der Schnitt der Oskulationsebene mit der oskulierenden Kugel.

282. Diese Eigenschaft führt zu einer Folgerung, die wir entwickeln wollen. Die im Punkte M der Kurve oskulierende Kugel ist die Grenze der Kugeln, die durch M und drei andere Kurvenpunkte M', M'', M''' gehen, welche zu M unendlich benachbart werden; desgleichen ist die oskulierende Ebene die Grenze der Ebenen, die durch M und durch die beiden Punkte M', M'' gehen. Hieraus folgt, dass der Krümmungskreis die Grenze der Kreise ist, die durch M und zwei andere unendlich benachbarte Punkte M', M'' gehen. Projizieren wir nun die Kurve und den Kreis auf irgend eine Ebene, und sind m, m', m'' die Projektionen von M, M', M'', so wird der Kreis in eine Ellipse projiziert, die eine Berührung zweiter Ordnung in m mit der Projektion der Kurve besitzt; projiziert man insbesondere die Raumkurve auf die Ebene des Krümmungskreises selbst, so wird derselbe Kreis auch Krümmungskreis für die Projektion.

Einhüllende Flächen.

283. Bezeichnen wir mit $f(x, y, z, \alpha)$ eine Funktion der vier Variabelen x, y, z, α, deren Wert eindeutig bestimmt ist, wenn man die Werte x, y, z, α fixiert hat. Wenn x, y, z irgend welche Koordinaten bedeuten und α einen variabelen Parameter, so stellt die Gleichung

$$1) \qquad f(x, y, z, \alpha) = 0$$

ein Flächensystem dar; jedem Werte von α entspricht eine besondere Fläche. Hat man nun α einen bestimmten Wert gegeben, und erteilt man alsdann dem Parameter den neuen Wert $\alpha + \Delta\alpha$, so erhält man eine zweite Fläche mit der Gleichung:

$$f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0,$$

welche die erste nach einer bestimmten Kurve schneiden wird. Man kann als zweite Gleichung dieser Kurve auch

$$\frac{f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0$$

an Stelle der vorigen wählen. Lässt man nun $\Delta\alpha$ nach null konvergieren, so wird die Schnittlinie einer gewissen Grenze zustreben, für welche man ausser der Gleichung 1) die Gleichung

$$2) \qquad \frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

erhält. Auf jeder der durch die Gleichung 1) dargestellten Flächen befindet sich solch eine Kurve. Der geometrische Ort aller dieser Kurven ist eine Fläche, deren Gleichung durch Elimination von α zwischen den Gleichungen 1) und 2) gewonnen wird. Diese Fläche heisst die *Einhüllende* (Enveloppe) des Flächensystemes 1) und diese Flächen heissen ihrerseits die Eingehüllten. Die veränderliche Kurve, welche durch die Gleichungen 1) und 2) dargestellt ist, hat Monge die *Charakteristik der Einhüllenden* genannt.

284. Lehrsatz I. *Die Einhüllende berührt die Flächen des Systemes in jedem Punkte einer Charakteristik.*

Ist $M(x, y, z)$ ein gemeinsamer Punkt, so hat man, um den Beweis zu führen, dass Einhüllende und Eingehüllte die nämliche Tangentenebene in M besitzen, nur zu zeigen, dass wenn man x und y als die unabhängigen Variabelen betrachtet, der Wert des totalen Differentiales dz im Punkte M für beide Flächen der gleiche wird.

Die Eingehüllte ist durch die Gleichung 1) dargestellt, wobei α einen bestimmten Wert hat, der Wert von dz für diese Fläche ist also gegeben durch die Gleichung:

$$3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

Dieselbe Gleichung 1) kann auch als Gleichung der Einhüllenden angesehen werden, wenn man α nicht mehr als konstant, sondern als eine Funktion von x, y, z betrachtet, die durch die Gleichung 2) definiert ist. Um also den Wert von dz zu erhalten, welcher der Einhüllenden entspricht, hat man die Gleichung 1), mit Berücksichtigung, dass α variabel ist, zu differentiieren. Dann erhält man:

$$4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0.$$

Da aber die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ null ist, so reduziert sich die Gleichung 4) auf 3); der Wert von α muss hier aus

der Gleichung 2) genommen werden. Da dieser Wert für die gemeinsamen Punkte der Einhüllenden und der Eingehüllten genau der nämliche ist, welchen die Eingehüllte besitzt, so giebt die Gleichung 3) für beide Flächen denselben Wert von dz, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Bemerkung. Die Gleichung $f(x, y, z, \alpha) = 0$ kann, wenn die Koordinaten x, y, z eines Punktes M in dieselbe eingesetzt werden, mehrere Werte α liefern; unter diesen ist aber, wenn M zugleich ein Punkt der Einhüllenden ist, jedenfalls einer (mehrfach zählend) vorhanden, der auch der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ genügt. Die auf diese Weise bestimmte Fläche des Systemes wird von der Einhüllenden tangiert, während die anderen Flächen des Systemes, die etwa noch durch den Punkt M gehen, die Charakteristik daselbst schneiden. Ein Flächensystem kann eine Einhüllende nur dann besitzen, wenn α von höheren als dem ersten Grade in der Gleichung vorkommt, d. h. geometrisch, wenn durch jeden Punkt des Raumes mehrere Flächen des Systemes, zum mindesten zwei, hindurchgehen.

Der Beweis der Berührung zwischen einhüllenden und eingehüllten Flächen wird ungültig, wenn in einem gemeinsamen Punkte x, y, z die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ sämtlich null werden. Denn in diesem Falle lässt sich das totale Differential dz weder für die eine noch für die andere Fläche aus den Gleichungen 3) und 4) unmittelbar berechnen. Punkte, in denen diese Besonderheit eintritt, sind *singuläre* Punkte auf den Flächen des Systemes und bedürfen, wenn sie zugleich auf der Einhüllenden liegen, jedesmal einer besonderen Untersuchung.

285. Wir betrachten drei Flächen des Systemes, welche den Werten $\alpha, \alpha + h_1, \alpha + h_2$ entsprechen. Dieselben schneiden sich in gewissen Punkten $m, m' \ldots$, deren Koordinaten bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$5)\quad f(x,y,z,\alpha) = 0,\ f(x,y,z,\alpha + h_1) = 0,\ f(x,y,z,\alpha + h_2) = 0.$$

Wenn die Grössen h_1 und h_2 nach null konvergieren, so reduziert sich dieses System, wie man aus der im § 215 gegebenen Methode erkennt, auf

$$6)\quad f(x,y,z,\alpha) = 0,\quad \frac{\partial f(x,y,z,\alpha)}{\partial \alpha} = 0,\quad \frac{\partial^2 f(x,y,z,\alpha)}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Man erkennt, dass die aus diesen Gleichungen bestimmten M, M'... auch die Grenzen sind, nach denen die Schnittpunkte der Charakteristik

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0,$$

und der Fläche

$$f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0$$

konvergieren, wenn $\Delta\alpha$ null wird.

Man hat also auf jeder Charakteristik einen oder mehrere Punkte M, M'..., und der Ort aller dieser Punkte bildet eine Kurve, deren Gleichung sich vermittelst der Elimination von α aus den Gleichungen 6) ergiebt. Monge hat dieselbe die *Rückkehrkurve* (arête de rebroussement) der Enveloppe genannt.

286. Lehrsatz II. *Alle Charakteristiken berühren die Rückkehrkurve.* Zum Beweise dieses Satzes muss man zeigen, dass in jedem Punkte, welcher einer Charakteristik und der Rückkehrkurve zugleich angehört, die Werte von dy und dz für beide Kurven die nämlichen sind, wenn man x als die unabhängige Variabele betrachtet. Die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$ bezeichnen wir der Kürze halber mit f' und f'', dann sind die Gleichungen einer Charakteristik

$$7) \qquad f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad f'(x, y, z, \alpha) = 0,$$

und differentiiert man dieselben unter der Annahme, dass α konstant ist, so erhält man:

$$8) \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0, \\ \frac{\partial f'}{\partial x} dx + \frac{\partial f'}{\partial y} dy + \frac{\partial f'}{\partial z} dz = 0, \end{cases}$$

welche dy und dz in jedem Punkte der Kurve bestimmen.

Die Gleichungen 7) können auch als die Gleichungen der Rückkehrkurve betrachtet werden, wenn man α als eine Funktion von x, y, z betrachtet, die durch die Gleichung

$$9) \qquad f''(x, y, z, \alpha) = 0$$

definiert ist. Differentiiert man aber die Gleichungen 7) unter dieser Annahme, so erhält man die nämlichen Gleichungen 8),

denn die Terme $\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,d\alpha$ und $\frac{\partial f'}{\partial \alpha}\,d\alpha$ oder $f'd\alpha$ und $f''d\alpha$, welche durch die Variation von α auftreten, sind nach den Bedingungen des Problemes null. Da nun α den nämlichen Wert hat für die gemeinsamen Punkte einer Charakteristik und der Rückkehrkurve, so ergeben die Gleichungen 8) für beide Kurven die gleichen Werte für dy und dz.

Bemerkung. Der Beweis gilt nur für die Punkte, für welche die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ nicht zugleich null sind. Auch ist zu bemerken, dass eine eigentliche Rückkehrkurve nur dann zu stande kommt, wenn die Gleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0$ den Parameter α noch enthält. Ist also $f(x, y, z, \alpha)$ eine ganze rationale Funktion in α, so muss sie α zum mindesten in der dritten Potenz enthalten.

Abwickelbare Flächen.

287. Wir werden jede Fläche eine *abwickelbare* oder *developpabele* nennen, welche die Einhüllende einer beweglichen Ebene ist, d. h. eines ebenen Systemes, welches von einem variabelen Parameter abhängt.

Sind a, b, c, p gegebene Funktionen des variabelen Parameters, a', b', c', p' ihre Ableitungen, so ist die Gleichung der beweglichen Ebene

$$1)\qquad ax + by + cz - p = 0,$$

und man erhält die Einhüllende durch Elimination des Parameters aus dieser Gleichung und der folgenden:

$$2)\qquad a'x + b'y + c'z - p' = 0.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen eine Charakteristik und diese Charakteristik ist hier eine Gerade. Da sie die Rückkehrkurve der Einhüllenden berührt, so erkennt man: *eine abwickelbare Fläche ist der geometrische Ort der Tangenten einer Raumkurve.*

Die Rückkehrkurve der abwickelbaren Fläche kann sich auf einen Punkt zusammenziehen. Dies tritt ein, wenn die Funktionen a, b, c, p des Parameters mit einander durch eine lineare Gleichung verknüpft sind:

$$3)\qquad ax_0 + by_0 + cz_0 - p = 0,$$

in welcher x_0, y_0, z_0 Konstante sind. In diesem Falle werden die Gleichungen 1) und 2):

$$4)\qquad \begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \\ a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + c'(z - z_0) = 0, \end{aligned}$$

und die abwickelbare Fläche ist ein Kegel, welcher den Punkt x_0, y_0, z_0 zur Spitze hat. Setzt man endlich

$$x_0 = mz_0, \quad y_0 = nz_0,$$

wobei m und n Konstante sind, und lässt man z_0 unendlich werden, so reduziert sich die Gleichung 3) auf die Form:

$$5)\qquad am + bn + c = 0.$$

Die Gleichungen 1) und 3) können dann in der Form

$$6)\qquad \begin{aligned} a(x - mz) + b(y - nz) - p = 0, \\ a'(x - mz) + b'(y - nz) - p' = 0 \end{aligned}$$

dargestellt werden, und bestimmen eine Cylinderfläche. Hier hat sich die Rückkehrkurve auf einen Punkt im unendlichen zusammengezogen.

288. *Die bewegliche Ebene, deren Einhüllende eine developpabele Fläche ist, ist zugleich die Oskulationsebene der Rückkehrkurve dieser Fläche.* Denn bezeichnen wir mit x, y, z die Koordinaten eines Punktes dieser Rückkehrkurve, und sind a'', b'', c'' die zweiten Ableitungen der Funktionen a, b, c, so hat man

$$\begin{aligned} ax + by + cz - p = 0, \\ a'x + b'y + c'z - p' = 0, \\ a''x + b''y + c''z - p'' = 0. \end{aligned}$$

Alle Grössen, welche hier auftreten, sind Funktionen eines Parameters; durch die Gleichungen ist die Kurve definiert, wenn der Parameter eliminiert wird. Differentiiert man zur Berechnung des ersten und zweiten Differentialquotienten der Koordinaten die Gleichungen nach diesem Parameter, so folgt aus den ersten beiden, unter Berücksichtigung der zweiten und dritten Gleichung:

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$
$$a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz = 0,$$

und differentiiert man die erste derselben mit Berücksichtigung der zweiten, so hat man

$$a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0.$$

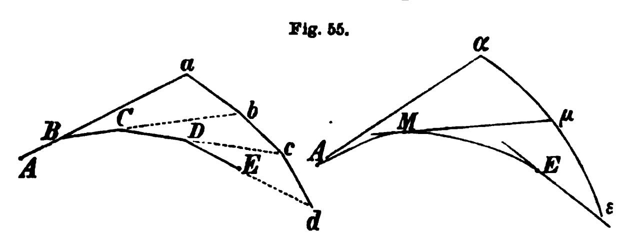
Die Gleichungen:

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0 \quad \text{und} \quad a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0$$

zeigen (§ 268), dass a, b, c proportional sind den Kosinus der Winkel, welche die Axe der Oskulationsebene der Rückkehrkurve mit den Koordinatenaxen bildet; also ist diese Oskulationsebene die bewegliche Ebene selbst.

289. Betrachten wir eine beliebige abwickelbare Fläche: es sei A ein Punkt der Rückkehrkurve, von dem an wir den Bogen s der Kurve messen, und E der Punkt, welcher der Länge $s = S$ entspricht. Dem Bogen S schreiben wir ein Polygon $ABCDE$ mit n Seiten ein, deren Richtungen bezüglich AB, BC, CD ... sind. Indem wir allgemein mit s die Länge

Fig. 55.



des Kurvenbogens vom Punkte A bis zu irgend einem Eckpunkte des Polygones bezeichnen, verlängern wir die Seite, welche in dieser Ecke endigt, um eine Grösse $t = \varphi(s)$, wobei φ eine beliebige Funktion bedeutet. Wir verbinden endlich jeden der Punkte a, b, c, ... welche die Endpunkte der verlängerten Seiten AB, BC, CD ... sind. Auf diese Weise erhält man eine Polyederfläche, die aus $n - 1$ Dreiecksflächen besteht, und die durch ein Polygon, welches dem Bogen S eingeschrieben ist, durch die beiden äussersten Seiten desselben und die gebrochene Linie a, b, c, d begrenzt ist. Lässt man nun die Dreiecke Ddc, Ccb, ... um die Seiten Dc, Cb ... sich drehen, so kann man alle diese Dreiecke in die Ebene ABC

des ersten bringen; auf diese Weise erhält man den Prozess, welchen man die *Abwickelung der Polyederfläche* nennt. Bei dieser Abwickelung bleiben die Längen t und die Längen der gebrochenen Linien $ABCDE$, $abcd$ ungeändert.

Nehmen wir nun an, dass die Zahl n der Seiten unbegrenzt wächst, und dass jede derselben nach null konvergiert, so hat die Linie $ABCDE$ zur Grenze den Bogen S, und die Polyederfläche fällt immer mehr mit einem Teil der developpabelen Fläche zusammen, der begrenzt ist durch den Bogen AE der Rückkehrkurve, durch die Tangenten $A\alpha$, $E\varepsilon$ in den Endpunkten, und durch eine bestimmte Kurve $\alpha\varepsilon$, definiert durch die Gleichung

$$t = \varphi(s),$$

wobei s den Bogen AM der Rückkehrkurve und t die Länge $M\mu$ der Tangente in M zwischen dem Berührungspunkte und der Kurve $\alpha\varepsilon$ bedeutet.

Andererseits konvergiert auch die Abwickelung der Polyederfläche nach einer bestimmten Grenze, und diese Grenze nennen wir die *Abwickelung* des betrachteten Teiles der developpabelen Fläche. Insbesondere ist die ebene Kurve, welche die Grenze des Polygones $abcd$ bei der Abwickelung der Polyederfläche bildet, die Abwickelung oder Transformierte der auf der developpabelen Fläche gelegenen Kurve $\alpha\varepsilon$. Es ist leicht ersichtlich, dass die Ebene ABC zur Grenze die Oskulationsebene der Rückkehrkurve im Punkte A hat, welche zugleich die developpabele Fläche berührt. Die Abwickelung ist also auf der Tangentenebene des Punktes A vollzogen worden. Endlich bemerken wir noch, dass die Gleichung $t = \varphi(s)$, welche wir für die Kurve $\alpha\varepsilon$ angenommen haben, auch nach der Abwickelung fortbesteht. Überhaupt bleiben alle Längen, von Geraden oder Kurven, auf der abwickelbaren Fläche durch die Abwickelung ungeändert.

Die Polarfläche. Der Ort der Mittelpunkte der oskulierenden Kugeln.

290. Im § 264 wurde bewiesen, dass die Krümmungsaxe oder Polargerade eines Kurvenpunktes x, y, z die Gleichungen hat:

$$V=0, \quad dV=0,$$

wenn $V=0$ die Gleichung der Normalebene ist; ferner wurde im § 275 gezeigt, dass die Koordinaten des Mittelpunktes der oskulierenden Kugel durch die drei Gleichungen bestimmt sind:

$$V=0, \quad dV=0, \; d^2V=0.$$

Hieraus folgt, dass die Normalebenen einer Kurve von einer developpabelen Fläche eingehüllt werden, deren Charakteristiken die Krümmungsaxen sind und deren Rückkehrkurve von den Mittelpunkten der oskulierenden Kugeln gebildet wird. Diese developpabele Fläche heisst die *Polarfläche.* Auf dieser Polarfläche liegen auch die Krümmungsmittelpunkte der Kurve.

291. Die Werte der Koordinaten x_0, y_0, z_0 der Mittelpunkte der oskulierenden Kugeln sind nach § 281:

$$1) \qquad \begin{cases} x_0 = x + R\cos\varphi - \dfrac{TdR}{ds}\cos\lambda, \\ y_0 = y + R\cos\psi - \dfrac{TdR}{ds}\cos\mu, \\ z_0 = z + R\cos\chi - \dfrac{TdR}{ds}\cos\nu, \end{cases}$$

und ferner ist für den Radius r derselben

$$2) \qquad r^2 = R^2 + \frac{T^2 dR^2}{ds^2}.$$

Differentiiert man die Gleichungen 1) und 2), indem man die Formeln im § 274 benutzt, und setzt man

$$3) \qquad ds_0 = \pm\left(\frac{R\,ds}{T} + d\,\frac{TdR}{ds}\right),$$

indem man ds_0 das Vorzeichen von ds erteilt, so folgt

$$4) \qquad dx_0 = \mp\, ds_0\cos\lambda, \; dy_0 = \mp\, ds_0\cos\mu, \; dz_0 = \mp\, ds_0\cos\nu,$$

und

$$5) \qquad r\,dr = \mp\,\frac{TdR}{ds}\,ds_0.$$

Die Gleichungen 4) beweisen: *erstens,* dass ds_0 das Differential des Bogens der Rückkehrkurve der Polarfläche ist, *zweitens,* dass die Tangente dieser Kurve die Krümmungsaxe

oder Polargerade ist, was eine Bestätigung des früher schon erhaltenen Resultates bildet. Man sieht aber auch, dass ds_0 null sein kann, und dann reduziert sich die Rückkehrkurve auf einen Punkt. Die Formeln 4) und 5) zeigen alsdann, dass x_0, y_0, z_0, r Konstante sind. Die nämliche Kugel oskuliert alsdann die Kurve in jedem Punkte; dieselbe liegt also ganz auf dieser Kugel.

Hieraus schliesst man, wenn eine Kurve eine sphärische ist und auf einer Kugel vom Radius a liegt, so ist, gemäss der Gleichung 2):

$$6) \qquad \frac{R^2 + T^2 dR^2}{ds^2} = a^2.$$

Aber umgekehrt, wenn diese Gleichung, in welcher a eine Konstante ist, stattfindet, so ist die Kurve noch nicht notwendig eine sphärische; denn es folgt nur aus dieser Gleichung, dass

$$r = a \quad \text{oder} \quad dr = 0$$

ist. Dies aber findet nach Gleichung 5) nicht nur statt, wenn $ds_0 = 0$ ist, sondern auch wenn $dR = 0$ ist. Ist $dR = 0$, so hat man $ds_0 = \pm \frac{R\,ds}{T}$, und ds_0 kann nicht null sein, ausser in dem Falle, wo $T = \infty$ ist. Ist $T = \infty$, so ist die Kurve eben, und da ihr Krümmungsradius konstant ist, so ist sie ein Kreis (§ 194).

Ist nun $dR = 0$ oder $R =$ const. und ist T nicht unendlich, so ist nach Gleichung 2) $r = R$ und die Gleichungen 1) verglichen mit den Gleichungen 3) des § 264 zeigen, dass der Mittelpunkt der oskulierenden Kugel mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammenfällt. Es besteht also der Satz:

Ist der Krümmungsradius einer Raumkurve konstant, so fällt der Ort der Krümmungsmittelpunkte mit der Rückkehrkurve der developpabelen Fläche zusammen, die von den Normalebenen der Kurve gebildet wird.

292. Bezeichnen wir mit $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; $\varphi_0, \psi_0, \chi_0$; λ_0, μ_0, ν_0; R_0, T_0 die Grössen, welche den Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ analog sind und sich auf diese Rückkehrkurve beziehen, und sehen wir

dabei von den ebenen Kurven, d. h. von dem Falle $T = \infty$ ab, so können wir die Gleichungen 4) folgendermassen schreiben:

$$7)\quad \cos\alpha_0 = \mp \cos\lambda,\ \cos\beta_0 = \mp \cos\mu,\ \cos\gamma_0 = \mp \cos\nu.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen ergiebt:

$$\frac{ds_0}{R_0}\cos\varphi_0 = \mp \frac{ds}{T}\cos\varphi,\quad \frac{ds_0}{R_0}\cos\psi_0 = \mp \frac{ds}{T}\cos\psi,\quad \frac{ds_0}{R_0}\cos\chi_0 = \mp \frac{ds}{T}\cos\chi,$$

also:

$$8)\qquad \frac{ds_0}{R_0} = \frac{ds}{T} \quad \text{oder} \quad d\sigma_0 = d\tau,$$

und

$$9)\quad \cos\varphi_0 = \mp \cos\varphi,\ \cos\psi_0 = \mp \cos\psi,\ \cos\chi_0 = \mp \cos\chi.$$

Die Differentiation der Gleichungen 9) giebt folglich, wenn man die Gleichungen 7) und 8) beachtet:

$$\frac{ds_0}{T_0}\cos\lambda_0 = \mp \frac{ds}{R}\cos\alpha,\quad \frac{ds_0}{T_0}\cos\mu_0 = \mp \frac{ds}{R}\cos\beta,\quad \frac{ds_0}{T_0}\cos\nu_0 = \mp \frac{ds}{R}\cos\gamma,$$

also

$$10)\qquad \frac{ds_0}{T_0} = \frac{ds}{R} \quad \text{oder} \quad d\tau_0 = d\sigma,$$

und

$$11)\quad \cos\lambda_0 = \mp \cos\alpha,\ \cos\mu_0 = \mp \cos\beta,\ \cos\nu_0 = \mp \cos\gamma.$$

Vergleicht man also die gegebene Kurve mit der Rückkehrkurve der Polarfläche, so sieht man, dass für beide Kurven die Richtung der Hauptnormalen die nämliche ist, und dass die Tangente einer Kurve parallel ist der Axe der Oskulationsebene der anderen. Zugleich drücken die Gleichungen 8) und 10) aus, dass die erste absolute Krümmung einer jeden Kurve der zweiten absoluten Krümmung der anderen gleich ist. Das zweideutige Zeichen $\mp$ kann in jeder der Formeln 7), 9), 11) durch das Plus- oder Minuszeichen ersetzt werden. Endlich bemerken wir noch, dass die Gleichung 3) die Form erhält:

$$12)\qquad \pm ds_0 = \frac{R\,ds_0}{R_0} + d\frac{R_0\,dR}{ds_0} = R\,d\sigma_0 + d\frac{dR}{d\sigma_0}.$$

293. Wir betrachten in der xy-Ebene die bewegliche Gerade, deren Gleichung

$$13)\qquad \xi \sin\sigma_0 - \eta \cos\sigma_0 = R$$

ist. Die Enveloppe derselben wird durch diese Gleichung zusammen mit der Gleichung

$$14)\qquad \xi \cos\sigma_0 + \eta \sin\sigma_0 = \frac{dR}{d\sigma_0}$$

bestimmt; aus diesen beiden folgt:

$$15)\qquad \begin{cases} \xi = + R\sin\sigma_0 + \dfrac{dR}{d\sigma_0}\cos\sigma_0, \\ \eta = - R\cos\sigma_0 + \dfrac{dR}{d\sigma_0}\sin\sigma_0. \end{cases}$$

Differentiiert man dieselben, so wird

$$d\xi = \left(R\,d\sigma_0 + d\frac{dR}{d\sigma_0}\right)\cos\sigma_0,$$

$$d\eta = \left(R\,d\sigma_0 + d\frac{dR}{d\sigma_0}\right)\sin\sigma_0,$$

und dies ergiebt, auf Grund der Gleichung 12):

$$16)\qquad d\xi = \pm\, ds_0 \cos\sigma_0, \quad d\eta = \pm\, ds_0 \sin\sigma_0.$$

Diese Formeln sagen aus, dass für die betrachtete ebene Enveloppe Bogenlänge und Krümmung dieselben sind, wie für die Rückkehrkurve der Polarfläche.

Führt man nun in die Gleichungen 1), welche den Mittelpunkt der oskulierenden Kugel bestimmen, die Grössen ξ, η und die Winkel $\varphi_0, \psi_0, \chi_0, \lambda_0, \mu_0, \nu_0$ ein, die sich auf die Rückkehrkurve beziehen, so erhält man

$$17)\qquad \begin{cases} x_0 = x \pm \xi(\cos\sigma_0\cos\alpha_0 - \sin\sigma_0\cos\varphi_0) \pm \eta(\sin\sigma_0\cos\alpha_0 + \cos\sigma_0 \cos \ldots \\ y_0 = y \pm \xi(\cos\sigma_0\cos\beta_0 - \sin\sigma_0\cos\psi_0) \pm \eta(\sin\sigma_0\cos\beta_0 + \cos\sigma_0 \cos \ldots \\ z_0 = z \pm \xi(\cos\sigma_0\cos\gamma_0 - \sin\sigma_0\cos\chi_0) \pm \eta(\sin\sigma_0\cos\gamma_0 + \cos\sigma_0 \cos \ldots \end{cases}$$

Das zweideutige Zeichen $\pm$ in den Gleichungen 16) und 17) ist immer durch $+$ oder durch $-$ zu ersetzen.

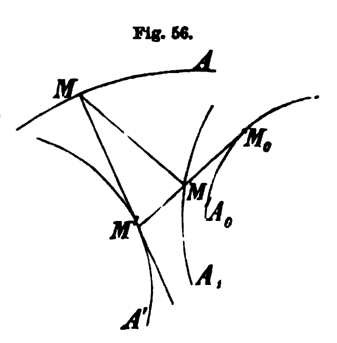
Die Gleichungen 17) liefern unmittelbar die Lösung der Aufgabe, eine Kurve zu bestimmen, für welche der Ort der oskulierenden Kugeln gegeben ist. In diesem Falle sind alle Grössen mit dem Index null, die sich auf die gegebene Kurve beziehen, bekannte Funktionen derselben unabhängigen

Variabelen. Die Gleichungen 16) bestimmen ξ und η durch ihre Differentiale, und alsdann ergeben die Gleichungen 17) die Koordinaten x, y, z der gesuchten Kurve.

Allgemeine Theorie der Evoluten und Evolventen.

294. Wenn eine ebene oder räumliche Kurve AM beschrieben wird durch den einen Endpunkt eines Fadens, der auf einer zweiten Kurve $A'M'$ aufgerollt war, und mit seinem zweiten Ende auf dieser Kurve befestigt ist, und welcher derart abgewickelt wird, dass er stets gespannt bleibt, so heisst die Kurve $A'M'$ eine *Evolute* der Kurve AM. Umgekehrt heisst AM eine *Evolvente* der Kurve $A'M'$.

Fig. 56.



295. Bestimmung der Evoluten einer gegebenen Kurve. Wir bezeichnen die Elemente der gegebenen Kurve wie im § 274, die analogen Grössen für die zweite Kurve mit gestrichenen Buchstaben.

Setzt man

$$1) \qquad u = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2},$$

so sind die Bedingungen dafür, dass $A'M'$ eine Evolute von AM ist:

$$2) \quad x' - x = u \cos\alpha', \quad y' - y = u \cos\beta', \quad z' - z = u \cos\gamma'$$

und

$$3) \qquad ds' = du.$$

Differentiiert man die erste Gleichung 2), und benutzt man dabei die Formeln des § 274, so folgt

$$ds' \cos\alpha' - ds \cos\alpha = \frac{u\,ds'}{R'} \cos\varphi' + du \cos\alpha',$$

oder wegen Gleichung 3):

$$ds \cos\alpha = -\frac{u\,du}{R'} \cos\varphi',$$

ebenso:

$$ds \cos\beta = -\frac{u\,du}{R'}\cos\psi',$$

$$ds \cos\gamma = -\frac{u\,du}{R'}\cos\chi'.$$

Diese drei Gleichungen ergeben

4) $$ds = \frac{u\,du}{R'},$$

ferner

5) $\cos\varphi' = -\cos\alpha, \quad \cos\psi' = -\cos\beta, \quad \cos\chi' = -\cos\gamma.$

Dies besagt: Die Hauptnormale im Punkte M' der Evolute ist parallel der Tangente im entsprechenden Punkte M der Evolvente. Die Tangenten der beiden Kurven stehen also senkrecht, und es ist:

6) $$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

Differentiiert man diese Gleichung mit Benutzung der bereits erwähnten Formeln in § 274, so findet man:

$$\frac{ds}{R}(\cos\varphi\cos\alpha' + \cos\psi\cos\beta' + \cos\chi\cos\gamma')$$
$$+ \frac{ds'}{R'}(\cos\varphi'\cos\alpha + \cos\psi'\cos\beta + \cos\chi'\cos\gamma) = 0,$$

also nach den Gleichungen 3), 4), 5):

7) $$\cos\varphi\cos\alpha' + \cos\psi\cos\beta' + \cos\chi\cos\gamma' = \frac{R}{u}.$$

Es ist nun auch:

8) $$\cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos\beta' + \cos\nu\cos\gamma' = \sqrt{1-\frac{R^2}{u^2}},$$

denn es ergiebt sich eine Identität, wenn man die Gleichungen 6), 7), 8) quadriert und addiert. Addiert man die nämlichen Gleichungen, nachdem man sie zuvor mit $\cos\alpha$, $\cos\varphi$, $\cos\lambda$, sodann mit $\cos\beta$, $\cos\psi$, $\cos\mu$, endlich mit $\cos\gamma$, $\cos\chi$, $\cos\nu$ multipliziert hat, so folgt:

9) $$\begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{R}{u}\cos\varphi + \sqrt{1-\dfrac{R^2}{u^2}}\cos\lambda, \\ \cos\beta' = \dfrac{R}{u}\cos\psi + \sqrt{1-\dfrac{R^2}{u^2}}\cos\mu, \\ \cos\gamma' = \dfrac{R}{u}\cos\chi + \sqrt{1-\dfrac{R^2}{u^2}}\cos\nu, \end{cases}$$

und die Gleichungen 2) werden also:

$$
10) \quad \begin{cases} x' = x + R\cos\varphi + \sqrt{u^2 - R^2}\cos\lambda, \\ y' = y + R\cos\psi + \sqrt{u^2 - R^2}\cos\mu, \\ z' = z + R\cos\chi + \sqrt{u^2 - R^2}\cos\nu. \end{cases}
$$

Alle auf die Kurve AM bezüglichen Grössen sind als Funktionen einer gewissen unabhängigen Variabelen bekannt; wenn man also noch den Ausdruck u als Funktion derselben Variabelen bestimmen kann, so liefern die Gleichungen 10) eine vollständige explicite Darstellung der Evolute.

Um u zu finden, genügt es aber die Gleichung 7) zu differentiieren. Dies ergiebt:

$$
\frac{ds'}{R'}(\cos\varphi\cos\varphi' + \cos\psi\cos\psi' + \cos\chi\cos\chi')
$$

$$
-\frac{ds}{R}(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')
$$

$$
-\frac{ds}{T}(\cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos\beta' + \cos\nu\cos\gamma') = d\frac{R}{u},
$$

oder auf Grund der früheren Formeln:

$$
11) \qquad d\frac{R}{u} + d\tau\sqrt{1 - \frac{R^2}{u^2}} = 0.
$$

Dies ist die Gleichung, durch welche u bestimmt wird. Ist die gegebene Kurve eine doppelt gekrümmte, so ist $d\tau$ nicht null, und es wird

$$
\frac{-d\frac{R}{u}}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{u^2}}} = d\tau.
$$

Die linke Seite ist das Differential eines Bogens, dessen Kosinus gleich $\frac{R}{u}$ ist, man hat also, wenn g eine willkürliche Konstante bezeichnet:

$$
\arccos\frac{R}{u} = \tau + g,
$$

oder

$$
12) \qquad \frac{R}{u} = \cos(\tau + g), \quad u = \frac{R}{\cos(\tau + g)}.
$$

Ist die gegebene Kurve eben, so reduziert sich die Gleichung 11) auf

$$d\,\frac{R}{u} = 0,$$

und man hat

$$13)\qquad \frac{R}{u} = \cos g, \quad u = \frac{R}{\cos g},$$

wenn g eine willkürliche Konstante bezeichnet. Diese Formel ist also in der allgemeinen Gleichung 12) enthalten, wenn man dort $\tau = 0$ setzt.

Führt man den Wert von u in die Gleichungen 10) ein, so erhält man:

$$14)\qquad \begin{cases} x' = x + R\cos\varphi + R\,\mathrm{tang}\,(\tau + g)\cos\lambda, \\ y' = y + R\cos\psi + R\,\mathrm{tang}\,(\tau + g)\cos\mu, \\ z' = z + R\cos\chi + R\,\mathrm{tang}\,(\tau + g)\cos\nu. \end{cases}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind bekannte Funktionen der unabhängigen Variabelen; sie enthalten indessen die Grösse τ, den Bogen der sphärischen Kurve, welche die zweite Krümmung der gegebenen misst, und die Bestimmung von τ als Funktion der unabhängigen Variabelen erfordert in den meisten Fällen eine Integration. Die Gleichungen enthalten eine willkürliche Konstante; daraus erkennt man, dass die gegebene Kurve unendlich viele Evoluten hat.

296. Bezeichnet man mit x_1, y_1, z_1 die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes M_1, der zum Punkte M gehört, und ist A_1M_1 der Ort dieser Mittelpunkte, so ist § 264

$$15)\qquad x_1 = x + R\cos\varphi, \quad y_1 = y + R\cos\psi, \quad z_1 = z + R\cos\chi.$$

Welchen Wert man auch der Konstanten g beilegen mag, die Werte x', y', z' können niemals mit x_1, y_1, z_1 zusammenfallen, wenn τ nicht null ist. Mithin ist bei den doppelt gekrümmten Kurven der Ort der Krümmungsmittelpunkte niemals zugleich eine Evolute. Die Gleichungen 14) und 15) ergeben:

$$16)\qquad \frac{x_1 - x'}{\cos\lambda} = \frac{y_1 - y'}{\cos\mu} = \frac{z_1 - z'}{\cos\nu},$$

und dies beweist, dass die Punkte M' der Evoluten auf den Krümmungsaxen M_0M_1 der gegebenen Kurve liegen. Hieraus

folgt, dass alle Evoluten auf der Polarfläche liegen, welche also der geometrische Ort derselben ist.

Sämtliche Evoluten, welche durch die Gleichungen 14) dargestellt sind, sind doppelt gekrümmte Kurven, mit Ausnahme derjenigen, die, im Falle dass $\tau = 0$ ist, zu $g = 0$ gehört. Denn die Differentiation der Gleichungen 5) ergiebt (§ 274):

$$d\sigma' \cos\alpha' + d\tau' \cos\lambda' = d\sigma \cos\varphi,$$

$$d\sigma' \cos\beta' + d\tau' \cos\mu' = d\sigma \cos\psi,$$

$$d\sigma' \cos\gamma' + d\tau' \cos\nu' = d\sigma \cos\chi,$$

also

$$d\sigma'^2 + d\tau'^2 = d\sigma^2.$$

Soll die Kurve eben sein, so muss $d\tau' = 0$, und folglich $d\sigma' = d\sigma$ sein, und es ist

$$\cos\alpha' = \cos\varphi, \quad \cos\beta' = \cos\psi, \quad \cos\gamma' = \cos\chi.$$

Nach den Gleichungen 7) oder 8) wird demnach

$$u = R.$$

Diese Gleichung findet aber gemäss der Gleichung 12) nur dann statt, wenn die Kurve AM eben ist, und sie entspricht dem Werte $g = 0$. Im Falle $\tau = 0$, $g = 0$ fällt der Punkt M' mit dem Krümmungsmittelpunkte zusammen; also bestehen die Sätze:

1. *Die unendlich vielen Evoluten einer räumlichen Kurve sind selbst alle doppelt gekrümmt.*

2. *Eine ebene Kurve besitzt unter allen ihren unendlich vielen Evoluten eine einzige, die auch eben ist, nämlich die Kurve ihrer Krümmungsmittelpunkte.*

297. Die Abwickelung der Polarfläche. Auf der Polarfläche haben wir ausser der Rückkehrkurve (dem Orte der Mittelpunkte oskulierender Kugeln) noch das System der Evoluten und den Ort der Krümmungsmittelpunkte. Subtrahiert man von den Koordinaten x', y', z' und x_1, y_1, z_1, welche durch die Gleichungen 14) und 15) gegeben sind, die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Centrums der oskulierenden Kugel (§ 290), so erhält man:

$$x' - x_0 = \left[R \operatorname{tang}(\tau + g) + \frac{dR}{d\tau}\right] \cos\lambda,$$

$$y' - y_0 = \left[R \operatorname{tang}(\tau + g) + \frac{dR}{d\tau}\right] \cos\mu,$$

$$z' - z_0 = \left[R \operatorname{tang}(\tau + g) + \frac{dR}{d\tau}\right] \cos\nu,$$

und

$$x_1 - x_0 = \frac{dR}{d\tau} \cos\lambda,$$

$$y_1 - y_0 = \frac{dR}{d\tau} \cos\mu,$$

$$z_1 - z_0 = \frac{dR}{d\tau} \cos\nu.$$

Indem wir aber nur die Grössen einführen wollen, die sich auf die Rückkehrkurve beziehen, ersetzen wir $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ durch $\cos\alpha_0$, $\cos\beta_0$, $\cos\gamma_0$, und zwar was gestattet ist, mit dem nämlichen Zeichen; ferner $d\tau$ durch $d\sigma_0$ und τ selbst durch σ_0. Ferner setze ich:

$$R = -X \sin\sigma_0 + Y \cos\sigma_0,$$

$$\frac{dR}{d\sigma_0} = -X \cos\sigma_0 - Y \sin\sigma_0,$$

und die neuen Variabelen X und Y sind als Funktionen der zu der Rückkehrkurve gehörigen Grössen durch die Gleichungen

$$17) \qquad dX = ds_0 \cos\sigma_0, \quad dY = ds_0 \sin\sigma_0$$

definiert (§ 293). Alsdann werden die obigen Gleichungen:

$$18) \quad \frac{x' - x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{y' - y_0}{\cos\beta_0} = \frac{z' - z_0}{\cos\gamma_0} = \frac{-X\cos g + Y \sin g}{\cos(\sigma_0 + g)},$$

$$19) \quad \frac{x_1 - x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{y_1 - y_0}{\cos\beta_0} = \frac{z_1 - z_0}{\cos\gamma_0} = -(X\cos\sigma_0 + Y\sin\sigma_0).$$

Nun nehmen wir an, dass zur Ebene x, y eine Tangentenebene der Polarfläche gewählt ist, und führen die Abwickelung dieser Fläche in diese Ebene aus. Wir behalten dieselben Buchstaben bei, um die verschiedenen Grössen auch nach der Abwickelung zu bezeichnen. Da die Punkte M_0, M_1, M'

immer auf einer Geraden liegen, und ihre gegenseitigen Abstände unveränderlich sind, ebenso wie die Bogen s_0 und σ_0, so bestehen die Formeln 18) und 19) ohne Änderung fort. Aber nach der Abwickelung werden z_0, z_1, z' null; die Rückkehrkurve ist eine ebene Kurve geworden und $d\sigma_0$ kann an Stelle von $d\alpha_0$ gewählt werden; man kann selbst $\alpha_0 = \sigma_0$ annehmen, auf Grund der willkürlichen Grösse g, welche mit σ_0 verbunden ist. Demnach hat man

$$\cos\alpha_0 = \cos\sigma_0, \quad \cos\beta_0 = \sin\sigma_0, \quad \cos\gamma_0 = 0.$$

Weiter zeigen die Gleichungen 17), dass dX und dY nichts anderes sind als dx_0 und dy_0, man kann also

$$X = x_0, \quad Y = y_0$$

setzen, da der Koordinatenanfangspunkt willkürlich ist. Demnach erhalten die Transformierten der Evoluten die Gleichungen:

$$20) \qquad \frac{x' - x_0}{\cos\sigma_0} = \frac{y' - y_0}{\sin\sigma_0} = \frac{-x_0\cos g + y_0\sin g}{\cos(\sigma_0 + g)},$$

und die Transformierte der Kurve der Krümmungsmittelpunkte wird:

$$21) \qquad \frac{x_1 - x_0}{\cos\sigma_0} = \frac{y_1 - y_0}{\sin\sigma_0} = -(x_0\cos\sigma_0 + y_0\sin\sigma_0).$$

Man kann aus den Gleichungen 20) x_0, y_0, σ_0 eliminieren; diese Elimination ergiebt

$$22) \qquad x'\cos g - y'\sin g = 0,$$

und hieraus folgt der Satz:

Lehrsatz I. *Die Evoluten einer beliebigen Kurve transformieren sich bei der Abwickelung der Polarfläche in gerade Linien, welche durch einen festen Punkt* F *gehen.*

Da die Längen der Kurvenbogen sich bei der Abwickelung nicht ändern, so kann man hinzufügen, dass die Evoluten auf der Polarfläche die kürzesten Linien zwischen zwei Punkten sind; sie sind also, wie man sagt, *geodätische* Linien. Die Gleichung 21) enthält die beiden Gleichungen:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)\,\mathrm{tang}\,\sigma_0, \quad y_1 = -x_1\cot g\,\sigma_0.$$

Die erste stellt die Tangente im Punkte x_0, y_0 der Abwickelung der Rückkehrkurve dar; die zweite Gleichung das

Lot, welches vom Punkte F, dem Koordinatenanfangspunkte, auf diese Tangente gefällt ist. Man hat demnach den andern Satz:

Lehrsatz II. *Der Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Raumkurve wird, nach der Abwickelung der Polarfläche, Ort der Fusspunkte aller Lote, die von dem gemeinsamen Punkte der Evoluten auf die Tangenten der transformierten Rückkehrkurve gefällt sind.*

298. Die besonderen Fälle, dass die gegebene Kurve sphärisch oder eben ist, sind noch hervorzuheben. Im ersten Falle ist die Polarfläche ein Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt, auf welcher sich die Kurve befindet, und alle unsere Formeln bleiben gültig. Ist die Kurve eben, so wird die Polarfläche ein Cylinder, dessen senkrechter Schnitt die ebene Evolute bildet. Man kann hier $\cos\lambda = 0$, $\cos\mu = 0$, $\cos\nu = 1$ und $z_1 = 0$ setzen. Dann hat man nach den Gleichungen 14) im § 296

$$x' = x_1, \quad y' = y_1, \quad z' = R\,\text{tang}.$$

Da der Anfangspunkt des Bogens s_1 unbestimmt ist, so kann man $R = s_1$ annehmen. Nach der Abwickelung der Polarfläche wird s_1 eine geradlinige Abscisse, und die Transformierten der Evoluten sind gerade Linien, welche die Gleichung haben

$$z' = s_1\,\text{tang}\,g.$$

Die Evoluten, deren Tangenten einen konstanten Winkel mit den Erzeugenden der Polarfläche bilden, sind *Schraubenlinien* auf diesem Cylinder.

299. Bestimmung der Evolventen einer gegebenen Kurve. Die Gleichungen des Problemes sind, wie im § 295:

$$x' - x = u\cos\alpha', \quad y' - y = u\cos\beta', \quad z' - z = u\cos\gamma',$$

$$ds' = du,$$

aber die Lösung ist viel leichter, als die des umgekehrten Problemes, denn hier sind $x', y', z', \alpha', \beta', \gamma', s'$ gegebene Funktionen der nämlichen Variabelen, und man erhält unmittelbar die Werte von x, y, z. Es wird nämlich

$$u = s' + g,$$

wobei g eine willkürliche Konstante ist, und die obigen Gleichungen werden demnach

$$x = x' - (s' + g)\cos\alpha', \quad y = y' - (s' + g)\cos\beta',$$
$$z = z' - (s' + g)\cos\gamma'.$$

Man sieht, dass jede Kurve, mag sie eine ebene oder räumliche sein, unendlich viele Evolventen hat. Die einzige Schwierigkeit dieses Problemes besteht in der Bestimmung des Bogens s', dessen Differential im allgemeinen zunächst nur gegeben ist. Die Berechnung von s' ist daher ein Problem der Integralrechnung.

Anwendung der allgemeinen Theorie auf die gewöhnliche Schraubenlinie.

300. Die rechtwinkligen Koordinaten der gewöhnlichen Schraubenlinie können durch die Gleichungen:

1) $$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = at\operatorname{cotg} i$$

dargestellt werden, wobei i einen gegebenen Winkel und a den Radius des Kreiscylinders bedeutet, auf welchem die Kurve liegt. Wir behalten alle früheren Bezeichnungen bei, die wir hier nicht zu wiederholen brauchen. Aus den Gleichungen

$$dx = -a\sin t\,dt, \quad dy = a\cos t\,dt, \quad dz = a\,dt\operatorname{cotg} i$$

folgt:

2) $$ds = \frac{a\,dt}{\sin i}$$

und

3) $$\cos\alpha = -\sin i\sin t, \quad \cos\beta = \sin i\cos t, \quad \cos\gamma = \cos i.$$

Die letzte besagt:

Die Tangente der Schraubenlinie bildet mit der Axe des Cylinders den konstanten Winkel i.

Die Differentiation der Gleichungen 3) ergiebt:

$$\cos\varphi\,d\sigma = -\sin i\cos t\,dt, \quad \cos\psi\,d\sigma = -\sin i\sin t\,dt, \quad \cos\chi\,d\sigma = 0,$$

also:

4) $$d\sigma = \sin i\,dt,$$

und

5) $\cos\varphi = -\cos t, \quad \cos\psi = -\sin t, \quad \cos\chi = 0,$

ferner vermittelst der Gleichungen 2) und 4):

6) $$R = \frac{a}{\sin^2 i}.$$

Die Gleichungen 5) und 6) lehren:

Die Hauptnormale oder die Richtung des Krümmungsradius ist senkrecht zur Axe des Cylinders, und der Radius der ersten Krümmung der Schraubenlinie ist konstant.

Die Differentiation der Gleichungen 5) ergiebt:

$$\cos\alpha\, d\sigma + \cos\lambda\, d\tau = -\sin t\, dt,$$
$$\cos\beta\, d\sigma + \cos\mu\, d\tau = \cos t\, dt,$$
$$\cos\gamma\, d\sigma + \cos\nu\, d\tau = 0,$$

oder, auf Grund der Gleichungen 3) und 4)

$$\cos\lambda\, d\tau = -\cos^2 i \sin t\, dt, \quad \cos\mu\, d\tau = \cos^2 i \cos t\, dt,$$
$$\cos\nu\, d\tau = -\cos i \sin i\, dt.$$

Hieraus folgt:

7) $$d\tau = \cos i\, dt$$

und

8) $\cos\lambda = -\cos i \sin t, \quad \cos\mu = \cos i \cos t, \quad \cos\nu = -\sin i,$

ferner nach den Gleichungen 2) und 7)

9) $$T = \frac{a}{\sin i \cos i}.$$

Die Oskulationsebene bildet einen konstanten Winkel mit der Ebene, die zur Cylinderaxe senkrecht ist, und der Radius der zweiten Krümmung ist konstant.

Der Mittelpunkt der oskulierenden Kugel fällt mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammen; die Koordinaten sind:

10) $$\begin{cases} x_1 = x + R\cos\varphi = -a\,\mathrm{cotg}^2 i \cos t, \\ y_1 = y + R\cos\psi = -a\,\mathrm{cotg}^2 i \sin t, \\ z_1 = z + R\cos\chi = \quad a t \cos i. \end{cases}$$

Die Rückkehrkurve der Polarfläche ist also eine Schraubenlinie, die auf einem Cylinder liegt, welcher die nämliche Axe wie der Cylinder der gegebenen Schraubenlinie hat, und dessen Radius gleich $a\,\mathrm{cotg}^2 i$ ist.

Die Gleichung der Normalebene ist

$$-\sin i \sin t\,(x - a\cos t) + \sin i \cos t\,(y - a\sin t) + \cos i\,(z - at\,\mathrm{cotg}\,i) = 0,$$

oder

$$\text{11)} \qquad -x\sin t + y\cos t + z\,\mathrm{cotg}\,i = a\,t\,\mathrm{cotg}^2 i.$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach t ist:

$$\text{12)} \qquad -x\cos t - y\sin t = a\,\mathrm{cotg}^2 i.$$

Man erhält also die Gleichung der Polarfläche, wenn man t zwischen den Gleichungen 11) und 12) eliminiert. Diese Fläche wird eine *abwickelbare Schraubenfläche.* Ihr Schnitt mit der Basis des Cylinders hat die beiden Gleichungen

$$\text{13)} \qquad \begin{aligned} -x\sin t + y\cos t &= at\,\mathrm{cotg}^2 i, \\ -x\cos t - y\sin t &= a\,\mathrm{cotg}^2 i, \end{aligned}$$

und folglich ist nach § 244 diese Kurve die Evolvente eines Kreises mit dem Radius $a\,\mathrm{cotg}^2 i$.

Da endlich die Gleichung 7) liefert:

$$\tau = t\cos i + \text{konst},$$

so sind die Evoluten der Schraubenlinie durch die Gleichungen dargestellt:

$$\text{14)} \quad \begin{cases} x = -a\,\mathrm{cotg}^2 i\cos t - \dfrac{a\cos i}{\sin^2 i}\sin t\,\mathrm{tang}\,(t\cos i + g), \\[2ex] y = -a\,\mathrm{cotg}^2 i\sin t + \dfrac{a\cos i}{\sin^2 i}\cos t\,\mathrm{tang}\,(t\cos i + g), \\[2ex] z = at\,\mathrm{cotg}\,i - \dfrac{a}{\sin i}\,\mathrm{tang}\,(t\cos i + g), \end{cases}$$

wobei g eine willkürliche Konstante bezeichnet. Endlich hat man, weil

$$s = \frac{at}{\sin i} + \text{konst}$$

ist, für die Evolventen:

$$\text{15)} \quad \begin{cases} x = a\cos t + \left(\dfrac{at}{\sin i} + g\right)\sin i\sin t, \\[2ex] y = a\sin t - \left(\dfrac{at}{\sin i} + g\right)\sin i\cos t, \\[1ex] z = -g\cos i. \end{cases}$$

Die Evolventen der Schraubenlinie sind Evolventen eines Kreises, was mit den im § 298 erhaltenen Resultate übereinstimmt.

301. Bei der Schraubenlinie sind, wie wir gesehen haben, die beiden Krümmungen konstant. Es ist auch leicht zu beweisen, dass sie die einzige Kurve ist, die diese Eigenschaft besitzt.

Denn betrachten wir eine Kurve, bei welcher die Radien R und T der beiden Krümmungen konstant sind; nach den Formeln 2) und 3) des § 274 hat man:

$$Rd\cos\alpha - Td\cos\lambda = 0,$$
$$Rd\cos\beta - Td\cos\mu = 0,$$
$$Rd\cos\gamma - Td\cos\nu = 0,$$

folglich sind die Differenzen:

$$R\cos\alpha - T\cos\lambda, \quad R\cos\beta - T\cos\mu, \quad R\cos\gamma - T\cos\nu$$

konstant; und da die Summe ihrer Quadrate gleich $R^2 + T^2$ ist, so kann man setzen:

$$R\cos\alpha - T\cos\lambda = \sqrt{R^2+T^2}\cos a,$$
$$R\cos\beta - T\cos\mu = \sqrt{R^2+T^2}\cos b,$$
$$R\cos\gamma - T\cos\nu = \sqrt{R^2+T^2}\cos c,$$

wobei a, b, c die Winkel bezeichnen, die eine feste willkürliche Gerade mit den Koordinatenaxen bildet. Man kann die z-Axe mit dieser Geraden zusammenfallen lassen und also setzen:

$$1) \qquad \begin{cases} R\cos\alpha - T\cos\lambda = 0, \\ R\cos\beta - T\cos\mu = 0, \\ R\cos\gamma - T\cos\nu = \sqrt{R^2+T^2}. \end{cases}$$

Subtrahieren wir die ersten beiden dieser Gleichungen, nachdem wir sie zuvor mit $\cos\psi$ und $\cos\varphi$ multipliziert haben, subtrahieren wir ferner die erste und dritte, nachdem sie mit $\cos\chi$ und $\cos\varphi$ multipliziert sind, und endlich die zweite und dritte, nachdem sie mit $\cos\chi$ und $\cos\varphi$ multipliziert sind, so folgt nach den Gleichungen im § 265:

$$2)\quad \begin{cases} T\cos\alpha + R\cos\lambda = +\sqrt{R^2+T^2}\cos\psi, \\ T\cos\beta + R\cos\mu = -\sqrt{R^2+T^2}\cos\varphi, \\ T\cos\gamma + R\cos\nu = 0; \end{cases}$$

diese Gleichungen geben zusammen mit den früheren:

$$3)\ \cos\alpha = -\frac{T}{\sqrt{R^2+T^2}}\cos\psi,\ \cos\beta = \frac{+T}{\sqrt{R^2+T^2}}\cos\varphi,\ \cos\gamma = \frac{R}{\sqrt{R^2+T^2}}.$$

Dabei ist zu bemerken, dass die bisherige Rechnung nur voraussetzt, dass das Verhältnis $\frac{R}{T}$ der beiden Krümmungen konstant ist. Die letzte der Gleichungen 3) lehrt nun, dass die Tangente der Kurve mit der z-Axe einen konstanten Winkel bildet, und liefert also den Satz:

Wenn die beiden Krümmungen einer Kurve unter einander ein konstantes Verhältnis haben, so ist die Kurve eine Schraubenlinie auf einem Cylinder, dessen Basis eine beliebige Kurve ist.

Aus den Gleichungen 3) folgt:

$$\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi = 0,$$

und hieraus folgt, dass $\cos\gamma\cos\chi = 0$ ist. Also ist $\cos\chi = 0$. Mithin kann man schreiben:

$$\cos\psi = \sin\varphi$$

und

$$4)\quad \begin{aligned} \cos\alpha &= +\sin\gamma\sin\varphi, \\ \cos\beta &= -\sin\gamma\cos\varphi. \end{aligned}$$

Differentiiert man die erste dieser Gleichungen, so wird

$$\frac{ds}{R}\cos\varphi = \sin\gamma\cos\varphi\, d\varphi \quad \text{oder} \quad ds = R\sin\gamma\, d\varphi,$$

und die Gleichungen 4) geben:

$$\frac{dx}{ds} = \sin\gamma\sin\varphi,\quad \frac{dy}{ds} = -\sin\gamma\cos\varphi,$$

und ferner hat man:

$$\frac{dz}{ds} = \cos\gamma,$$

also

$$dx = R\sin^2\gamma\sin\varphi\, d\varphi,\ dy = -R\sin^2\gamma\cos\varphi\, d\varphi,$$
$$dz = R\sin\gamma\cos\gamma\, d\varphi.$$

Wir haben bisher nur das Verhältnis von T zu R konstant angenommen. Ist der Radius R selbst konstant, so unterscheiden sich die Koordinaten von den Grössen

$$-R\sin^2\gamma\cos\varphi,\quad -R\sin^2\gamma\sin\varphi,\quad R\varphi\sin\gamma\cos\gamma$$

nur um Konstante; und da der Anfangspunkt der Koordinaten willkürlich ist, so kann man setzen:

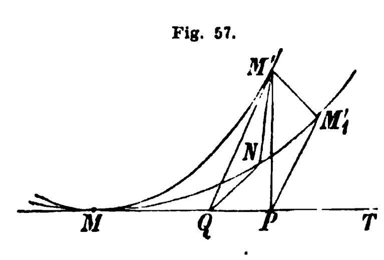
$$5)\quad x=-R\sin^2\gamma\cos\varphi,\quad y=-R\sin^2\gamma\sin\varphi,\quad z=R\varphi\sin\gamma\cos\gamma.$$

Diese Gleichungen definieren in der That die gewöhnliche Schraubenlinie, bei welcher der Krümmungsradius gleich R und der Radius des Cylinders gleich $R\sin^2\gamma$ ist.

Die Ordnung der Berührung zweier Kurven. Oskulierende Kurven.

302. Wir betrachten zwei Kurven MM', MM'_1, welche im Punkte M die gemeinsame Tangente MT besitzen. Auf der Kurve MM' wählen wir einen Punkt M', der unendlich benachbart wird zu M, und legen durch denselben die Ebene $M'PM'_1$ senkrecht zur Tangente MT; M'_1 und P seien die Punkte, in denen diese Ebene die Kurve MM'_1 und die Tangente MT schneidet. Wir werden nun sagen, dass die beiden Kurven MM', MM'_1 im Punkte M eine Berührung n^{ter} Ordnung haben, falls die Entfernung MM'_1 unendlich klein von $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung wird, wenn PM die unendlich kleine Grösse erster Ordnung bedeutet.

Fig. 57.



Es ist klar, dass man bei der Bestimmung der Ordnung der Berührung an Stelle der unendlich kleinen Grössen MP und $M'M'_1$ auch zwei andere unendlich kleine Grössen einführen kann, deren Verhältnisse zu den ersten beiden endlich bleiben. Legt man z. B. durch den Punkt M' eine Ebene $M'QN$, die parallel ist zu einer festen Ebene, die aber nicht zur Tangente MT parallel ist, und sind N und Q die Punkte, in denen diese Ebene die Kurve MM'_1 und

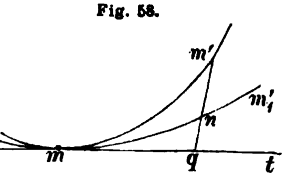
die Tangente MT schneidet, so kann man MQ als die unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachten, und $M'N$ als die für die Berührung charakteristische Grösse. Denn wenn wir die Sehne NM'_1 ziehen, so konvergieren die Winkel N und M'_1 im Dreiecke $NM'M'_1$ nach endlichen Grenzen. Diese Grenzen sind die Winkel, welche die Tangente MT mit den Geraden bildet, die bezüglich in den beiden Ebenen gelegen sind, welche nicht parallel zu MT sind. Hieraus folgt, dass das Verhältnis der Seiten $M'M'_1$ und $M'N$ des Dreieckes $M'M'_1N$ nach einer endlichen Grenze konvergiert. Andererseits werden $M'P$ und QP unendlich klein im Verhältnis zu MP; denn es ist

$$M'P = MP \operatorname{tang} M'MP,$$

und der Winkel $M'MP$ wird unendlich klein; ferner ist das Verhältnis QP zu $M'P$ die Kotangente des Winkels $M'QP$, der eine endliche Grenze hat; hieraus folgt, dass das Verhältnis von MQ zu MP zur Grenze die Einheit hat.

Wir projizieren nun die Figur auf eine Ebene senkrecht zur Ebene $M'NQ$ und es seien mm', mn, mq die Projektionen der Kurven MM', MN und der Tangente MQ. Da die Gerade MT nicht senkrecht zur Projektionsebene ist, so hat die Grenze des Verhältnisses $\frac{MQ}{mq}$ einen endlichen Wert; das Verhältnis der Grössen $M'N$, $m'n$ hat auch eine endliche Grenze, falls $M'N$ nicht einen unendlich kleinen Winkel mit der Axe der Projektionsebene bildet; in letzterem Falle wird $\frac{m'n}{M'N}$ unendlich klein.

Fig. 58.



Hieraus folgt: Wenn zwei gegebene Kurven in einem Punkte M eine Berührung n^{ter} Ordnung haben, so haben auch die Projektionen derselben auf eine Ebene, die nicht senkrecht zur gemeinsamen Tangente des Berührungspunktes ist, eine Berührung, deren Ordnung mindestens gleich n ist. Die Ordnung ist nicht grösser als n, falls $M'N$ nicht einen unendlich kleinen Winkel mit der Axe der Projektionsebene bildet, und da dieser Umstand nicht bei zwei Projektions-

ebenen eintreten kann, die einander nicht parallel sind, so hat man den Satz:

Damit zwei Kurven in einem gegebenen Punkte eine Berührung von der Ordnung n *haben, ist notwendig und hinreichend, dass ihre Projektionen auf zwei nicht parallele Ebenen eine Berührung haben, deren Ordnung mindestens gleich* n *ist.*

Wir haben nur orthogonale Projektionen betrachtet; indessen ist leicht einzusehen, dass der Satz auch für schiefe Projektionen bestehen bleibt. Vermittelst dieses Satzes kann man die Bedingungen der Berührung von doppelt gekrümmten Kurven nach der Methode des § 211 ausdrücken, die sich auf ebene Kurven bezieht.

303. *Oskulierende Kurve* in einem Punkte einer gegebenen Kurve heisst diejenige, welche unter den Kurven einer gegebenen Art daselbst die grösstmögliche Berührung mit der gegebenen hat. Hängt die gegebene Kurvenart von $2n$ oder von $2n+1$ willkürlichen Parametern ab, so kann man zwischen den Projektionen der beiden Kurven auf zwei nicht parallelen Ebenen eine Berührung der Ordnung $n-1$ herbeiführen. Die Kurven selbst haben alsdann eine Berührung von der Ordnung $n-1$. Ist die Zahl der Parameter $2n+1$, so bleibt einer unter ihnen unbestimmt. Man kann also über denselben derart verfügen, dass er noch einer neuen Bedingung genügt; aber er genügt im allgemeinen nicht, um die Ordnung der Berührung um eine Einheit zu erhöhen.

Der oskulierende Kreis in einem Punkte einer Raumkurve und seine Identität mit dem Krümmungskreis.

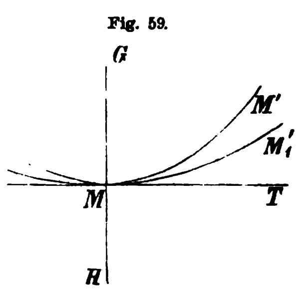
304. Die Gleichungen eines Kreises im Raum enthalten sechs willkürliche Grössen, nämlich die Koordinaten des Mittelpunktes, den Radius, und zwei der Winkel, welche die Axe des Kreises mit den Koordinatenaxen bildet. Es ist also hier $2n=6$, $n-1=2$. Also ist die Berührung einer Kurve mit dem sie oskulierenden Kreise von zweiter Ordnung. Im § 282 wurde gezeigt, dass die Projektionen einer Kurve und ihres Krümmungskreises auf eine beliebige Ebene eine Berührung

zweiter Ordnung besitzen; folglich haben auch die beiden Kurven dieselbe Berührung, der oskulierende Kreis ist also der Krümmungskreis.

Die Berührung von Flächen.

305. Wir betrachten zwei Flächen, die durch einen Punkt M gehen und dort die nämliche Tangentenebene besitzen. Durch die gemeinsame Normale GH legen wir eine Ebene, welche die Flächen in den Kurven MM', MM'_1 schneidet, die im Punkte M die nämliche Tangente MT haben. Die Ordnung n der Berührung dieser Kurven kann mit der Normalebene GHT variieren. Wenn nun für alle Normalebenen die Ordnung der Berührung der Schnittkurven niemals kleiner ist als n, und auch nicht in allen Normalebenen grösser ist als n, so sagt man, dass die beiden Flächen eine Berührung n^{ter} Ordnung haben.

Fig. 59.



Es sei die z-Axe parallel zur Normalen GH, die beiden anderen Axen sind alsdann parallel zur Tangentenebene; bezeichnet man mit x und y die Koordinaten des Punktes M, mit z und z' die Ordinaten der Flächen, die den Abscissen

$$x + \Delta x = x + \varrho \cos \omega, \quad y + \Delta y = y + \varrho \sin \omega$$

entsprechen, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Berührung n^{ter} Ordnung, dass die Differenz

$$Z - Z'$$

mindestens unendlich klein von der Ordnung $n + 1$ wird im Verhältnis zu ϱ, welches auch der Wert des Winkels ω sein mag. Sind aber z und z' die Werte von Z und Z', welche dem Werte $\varrho = 0$ entsprechen, so hat man:

$$Z = z + dz + \frac{1}{2} d^2 z + \cdots \frac{1}{n!} d^n z + R_{n+1},$$

$$Z' = z' + dz' + \frac{1}{2} d^2 z' + \cdots \frac{1}{n!} d^n z' + R'_{n+1}.$$

Die Bedingungen der Berührung n^{ter} Ordnung sind also:

$$z' = z, \quad dz' = dz, \quad d^2z' = d^2z, \ldots d^nz' = d^nz,$$

und die Werte von dx und dy sind hier $\varrho \cos \omega$ und $\varrho \sin \omega$.

Da aber diese Bedingungen unabhängig vom Werte ω stattfinden sollen, so erkennt man, dass die für die Berührung n^{ter} Ordnung notwendigen und hinreichenden Bedingungen darin bestehen, dass für den Punkt M die Ordinaten z der beiden Flächen, sowie sämtliche partielle Ableitungen, bis einschliesslich derer n^{ter} Ordnung, einander bezüglich gleich sind. Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen ist

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dieser Schluss gilt unabhängig von dem Koordinatensysteme, auf welches die Flächen bezogen sind. Denn, wenn man eine Transformation des Koordinatensystemes ausführt, so stellt sich bei jeder Fläche jede partielle Ableitung μ^{ter} Ordnung der neuen Ordinate z in Bezug auf die neuen Abscissen durch eine Funktion dar, welche die partiellen Ableitungen der ursprünglichen Grösse z in Bezug auf die alten Abscissen, bis zur μ^{ten} Ordnung inklusive, enthält. Mithin bleiben die Gleichungen zwischen den partiellen Ableitungen auch in Bezug auf das neue System bestehen. Man muss nur beachten, dass wenn die z-Axe des neuen Systemes parallel der Tangentenebene wird, die partiellen Ableitungen erster Ordnung unendlich und daher die Formeln illusorisch werden.

306. Wenn man eine bestimmte Fläche und ausserdem ein Flächensystem betrachtet, in dessen Gleichung k willkürliche Grössen enthalten sind, so kann man *oskulierende Fläche* in diesem Systeme diejenige nennen, welche in einem gegebenen Punkte der gegebenen Fläche eine Berührung von möglichst hoher Ordnung mit der letzteren besitzt. Doch führt diese Betrachtung nicht zu einem wesentlichen Resultate. Die oskulierende Fläche, wie wir sie definiert haben, wird mit der gegebenen eine Berührung besitzen, deren Ordnung n die grösste ganze Zahl ist, welche der Bedingung

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \text{ oder } < k$$

genügt; und dabei werden meistens in der Gleichung der oskulierenden Fläche noch willkürliche Grössen unbestimmt bleiben.

Im Falle der Ebene hat man $k = 3$ und $n = 1$; die oskulierende Ebene hat eine Berührung erster Ordnung und ist nichts anderes als die Tangentenebene. Im Falle der Kugel hat man $k = 4$ und $n = 1$; hier bleibt aber eine willkürliche Grösse unbenutzt, und es ist ersichtlich, dass für eine Fläche eine bestimmte oskulierende Kugel nicht vorhanden ist.*

---

* Geometrische Beweise der in diesem Kapitel enthaltenen Sätze findet man bei Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung; 2. Auflage bearbeitet von Natani. Leipzig 1881.

Zehntes Kapitel.

Die Kurven auf den Flächen und die Flächenfamilien.

Formel für den Krümmungsradius der auf einer gegebenen Fläche gelegenen Kurve.

307. Wir bezeichnen mit x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten der gegebenen Fläche und setzen:

$$1)\qquad dz = p\,dx + q\,dy \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$2)\qquad \begin{matrix} dp = r\,dx + s\,dy \\ dq = s\,dx + t\,dy \end{matrix} \quad \left(r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Nimmt man x und y als unabhängige Variabele, so hat man hiernach

$$d^2 z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

Wir betrachten nun eine Kurve AM, die auf der Fläche liegt; $M(x, y, z)$ sei ein Punkt dieser Kurve, MT die Tangente in M, MN die Hauptnormale, die zugleich Richtung des Krümmungsradius ist, IK die Normale im Punkte M der Fläche. Wir bezeichnen ferner mit α, β, γ die Winkel, welche die Richtung MT der Tangente mit den positiven Koordinatenaxen bildet; mit φ, ψ, χ die Winkel, welche die Richtung der Hauptnormalen MN mit denselben Axen bildet; mit R den Krümmungsradius der Kurve im Punkte M, mit σ die totale Krümmung des Bogens AM, gemessen von einem beliebigen Anfangspunkte A. Dann ist $d\sigma$ der Kontingenzwinkel und $R\,d\sigma$ bezeichnet das Differential des Bogens AM. Man hat also (§§ 260 und 263):

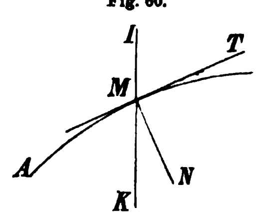


Fig. 60.

3) $dx = R\,d\sigma \cos\alpha,\; dy = R\,d\sigma\cos\beta,\; dz = R\,d\sigma\cos\gamma$

und

4) $d\cos\alpha = d\sigma\cos\varphi,\; d\cos\beta = d\sigma\cos\psi,\; d\cos\gamma = d\sigma\cos\chi.$

Nun haben gemäss der Gleichung 1) die Winkel, welche mit den positiven Koordinatenaxen eine der beiden Richtungen der Normalen IK bildet, die Kosinus

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

wobei die Wurzel $\sqrt{1+p^2+q^2}$ mit irgend einem Vorzeichen zu nehmen ist.

Ist dieses Vorzeichen willkürlich fixiert, so ist die Richtung der Normalen dem Sinne nach bestimmt; es sei MK diese Richtung. Bezeichnen wir endlich mit θ den zwischen 0 und π enthaltenen Winkel, den die Richtungen MN und MK mit einander bilden, so ist

$$\cos\theta = \frac{\cos\chi - p\cos\varphi - q\cos\psi}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

also auf Grund der Gleichungen 4)

$$d\sigma\cos\theta = \frac{d\cos\gamma - p\,d\cos\alpha - q\,d\cos\beta}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{5}$$

Substituiert man in die Gleichungen 1) und 2) die Werte von dx, dy, dz, welche aus den Gleichungen 3) folgen, so erhält man

$$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta, \tag{6}$$

und

$$\begin{cases} dp = R\,d\sigma\,(r\cos\alpha + s\cos\beta), \\ dq = R\,d\sigma\,(s\cos\alpha + t\cos\beta). \end{cases} \tag{7}$$

Die Differentiation der Gleichung 6) giebt ferner

$$d\cos\gamma = (p\,d\cos\alpha + q\,d\cos\beta) + (dp\cos\alpha + dq\cos\beta),$$

oder nach den Gleichungen 7):

$$d\cos\gamma - p\,d\cos\alpha - q\,d\cos\beta = R\,d\sigma\,(r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta). \tag{8}$$

Die Gleichung 5) verwandelt sich also in die folgende:

$$\frac{R}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}. \tag{9}$$

Sie drückt den Krümmungsradius der Kurve AM als Funktion der Grössen aus, die sich auf die Fläche beziehen, und der Winkel, durch welche die Richtung der Tangente und der Hauptnormale der Kurve bestimmt sind. Der Radius R ist eine positive Grösse; das Zeichen $\cos\theta$ wird also immer das der rechten Seite der Gleichung 9).

Anmerkung. Ist $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer Fläche und konstruiert man in einem Punkte x, y, z die Flächennormale, so kann man die beiden Richtungen dieser Normale im allgemeinen dadurch unterscheiden, dass für die Punkte auf der einen Richtung die Funktion $f(x, y, z)$ einen positiven, für die Punkte der anderen einen negativen Wert erhält. Denn es ist die Gleichung der Normalen

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

bezeichnet man also die Koordinaten eines auf der Normalen gelegenen Punktes mit $x + h$, $y + k$, $z + l$, so bestehen die Relationen:

$$k\frac{\partial f}{\partial x} = h\frac{\partial f}{\partial y}, \quad l\frac{\partial f}{\partial x} = h\frac{\partial f}{\partial z},$$

und es wird:

$$f(x+h, y+k, z+l) = \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots\right)$$

$$= \frac{h}{\frac{\partial f}{\partial x}}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots\right),$$

d. h. der Wert der Funktion ändert sein Zeichen, je nach dem Vorzeichen von h. Ist die Gleichung in der expliciten Form gegeben:

$$z - f(x, y) = 0,$$

so ist

$$z + l - f(x + h, y + k) = -\frac{h}{p}\left[1 + p^2 + q^2\right] + \cdots$$

Demnach kann man die eine Richtung der Normalen und dementsprechend die eine Flächenseite als die positive, die andere als die negative bezeichnen, je nach dem Vorzeichen des Wertes $f(x + h, y + k, z + l)$.

Betrachtet man diejenige Richtung der Normalen, die nach der positiven Seite verläuft, so erhalten die Kosinus der Winkel, die diese Richtung mit den positiven Koordinatenaxen bildet, einen bestimmten unzweideutigen Wert, und demgemäss muss auch das Vorzeichen von $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ unzweideutig bestimmt sein.

Setzt man

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

wobei das Vorzeichen auf der rechten Seite noch fraglich ist, α, β, γ aber die fixierte Richtung bezeichnen, so wird die Gleichung der Normalen:

$$\frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y}{\cos\beta} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma},$$

und bestimmt man auf der angenommenen Richtung der Normalen den Punkt $x+h$, $y+k$, $z+l$, so haben in der Gleichung

$$\frac{h}{\cos\alpha} = \frac{k}{\cos\beta} = \frac{l}{\cos\gamma}$$

die Verhältnisse einen positiven Wert. Es wird nun

$$z+l-f(x+h,\, y+k) = (l-hp-kq)+\cdots = \frac{h}{\cos\alpha}(\cos\gamma - p\cos\alpha - q\cos\beta)$$

$$= \frac{h}{\cos\alpha}\left(\frac{1+p^2+q^2}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = \pm\frac{h}{\cos\alpha}\sqrt{1+p^2+q^2}\ldots$$

Soll also der Ausdruck positiv werden, so hat man der Quadratwurzel das positive Zeichen zu geben; mithin ist bewiesen: Giebt man in den Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

der Quadratwurzel das positive Zeichen, so fixiert man damit diejenige Richtung der Normalen, welche in jedem Punkte nach der positiven Flächenseite gerichtet ist, das heisst nach derjenigen, für welche die Funktion $z - f(x, y)$ positiv wird.

Dasselbe findet statt bei der allgemeineren Flächengleichung $f(x, y, z) = 0$, wenn man setzt:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{+\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{+\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{+\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Einer besonderen Untersuchung bedürfen jedesmal die Punkte, in denen diese partiellen Ableitungen sämtlich gleich 0 sind, oder p und q unbestimmt werden.

Der Satz von Meunier.

308. Betrachten wir jetzt den Normalschnitt der Fläche, welcher erhalten wird, wenn man dieselbe durch die Ebene der Linien MT, MK schneidet. Ist R_0 der Krümmungsradius im Punkte M dieses Schnittes, so wird der Winkel θ hier 0 oder π. Die Gleichung 9) ergiebt

$$\frac{R_0}{\pm 1} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

und folglich ist:

$$R = \pm R_0 \cos\theta. \tag{10}$$

Das zweideutige Zeichen $\pm$ kann durch Plus oder Minus ersetzt werden, je nachdem θ kleiner oder grösser ist als $\frac{\pi}{2}$.

Die Gleichung 10) enthält das wichtige Theorem von Meunier, welches aussagt:

Der Krümmungsradius einer beliebigen auf einer Fläche gelegenen Kurve ist in jedem Punkte gleich dem Produkte aus dem Krümmungsradius desjenigen Normalschnittes, der die Tangente der Kurve enthält, und dem Kosinus des Winkels, den diese Schnittebene mit der Oskulationsebene der Kurve bildet.

Dieser Satz führt unmittelbar zu der bemerkenswerten Folgerung:

Konstruiert man eine Kugel, deren Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt eines Normalschnittes und deren Radius der Krümmungsradius desselben ist, so schneiden sämtliche Ebenen, welche man durch die Tangente dieses Normalschnittes hindurchlegt, die Kugel in Kreisen, welche die Krümmungskreise für sämtliche durch diese Ebenen gebildeten schiefen Schnitte sind.

Nach dem Theorem von Meunier erfordert also die Untersuchung der Krümmung der verschiedenen Kurven, welche man auf einer Fläche durch einen gegebenen Punkt ziehen

kann, und die eine bestimmte Richtung und eine bestimmte Oskulationsebene besitzen, nur die Untersuchung der Krümmung der Normalschnitte.

Die Krümmungsradien der Normalschnitte und die beiden Hauptschnitte.

309. Wir sahen, dass der Krümmungsradius R eines Normalschnittes im Punkte M einer Fläche durch die Gleichung gegeben ist:

$$1)\qquad \frac{R}{\pm 1} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

wobei das Zeichen der Quadratwurzel willkürlich gewählt werden kann; das zweideutige Zeichen des Nenners auf der linken Seite muss dann so bestimmt werden, dass R einen positiven Wert erhält. Dieser Nenner ± 1 ist aber der Kosinus des Winkels, den die Richtung MN des Radius mit der Richtung MK der Flächennormalen bildet, welche letztere durch das Vorzeichen von $\sqrt{1+p^2+q^2}$ fixiert ist. Dieser Winkel ist gleich 0 oder π, folglich muss das zweideutige Zeichen $\pm$ durch Plus ersetzt werden, wenn der Radius R nach MK gerichtet ist, und durch Minus, wenn die Richtung von R der Richtung von MK entgegengesetzt ist. Setzt man also fest, dass der Krümmungsradius R positiv sein soll in dem ersten Falle und negativ in dem zweiten, so hat man die einheitliche Formel

$$2)\qquad R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

welche die Krümmungsradien der Normalschnitte im Punkte M nach Grösse und Richtung bestimmt.

Die Krümmungsradien der verschiedenen Normalschnitte in einem Flächenpunkte sind alle auf der nämlichen Geraden gelegen und werden sämtlich von einem gemeinsamen Anfangspunkte an gemessen. Wir befolgen also eine allgemeine geometrische Regel, wenn wir diese Radien als positiv oder als negativ betrachten, je nachdem sie in dem einen oder anderen Sinne gerichtet sind.

310. Der Vergleich aller möglichen Radien in einem Punkte wird sehr erleichtert, wenn wir den Koordinaten-Anfangspunkt in den Punkt M der Fläche legen, und eine der Axen, z. B. die z-Axe, mit der Richtung MK der Normalen zusammenfallen lassen. Die Axen der Koordinaten x und y liegen alsdann in der Tangentenebene, und man hat

Fig. 61.

$$p = 0, \quad q = 0,$$

ferner

$$\cos\gamma = 0, \quad \cos\beta = \sin\alpha.$$

Die Wurzel $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ reduziert sich auf ± 1, aber da es uns freisteht, das Zeichen zu fixieren, so wählen wir das positive. Die Normale ist alsdann nach der positiven Seite der Fläche gerichtet.

Demnach wird die Gleichung 2):

$$3) \qquad R = \frac{1}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin^2\alpha}.$$

Der Nenner dieses Ausdruckes ist gleich

$$\frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2}\cos 2\alpha + s\sin 2\alpha.$$

Bestimmt man also einen Winkel $2\alpha_0$ zwischen 0 und π derart, dass

$$s = \frac{r-t}{2}\operatorname{tang} 2\alpha_0,$$

so wird die Gleichung 3):

$$4) \qquad R = \frac{1}{\frac{r+t}{2} + \sqrt{s^2 + \left(\frac{r-t}{2}\right)^2}\cos 2(\alpha - \alpha_0)}.$$

Die Wurzel $\sqrt{s^2 + \left(\frac{r-t}{2}\right)^2}$ hat das Vorzeichen des Quotienten $\frac{r-t}{2} : \cos 2\alpha_0$.

Man erkennt hieraus, dass der Wert von R ein Maximum oder Minimum wird für die Werte

$$\cos 2(\alpha - \alpha_0) = \mp 1,$$

welche ergiebt:

$$\alpha = \alpha_0 + i\frac{\pi}{2},$$

wenn i eine ganze Zahl ist. Da aber zwei Werte von α, die sich um ein Vielfaches von π unterscheiden, zu dem nämlichen Normalschnitt gehören, so reicht es aus, die beiden Werte

$$\alpha = \alpha_0 \quad \text{und} \quad \alpha = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$$

zu betrachten, welche zwei zu einander senkrechte Normalschnitte bestimmen. Für den einen derselben ist der Krümmungsradius R ein Minimum, für den andern ein Maximum. Diese beiden Normalschnitte heissen die *Hauptschnitte* der Fläche im Punkte M und ihre Krümmungsradien die *Hauptkrümmungsradien* der Fläche in diesem Punkte.

Dies erfordert indessen, dass s und $r - t$ nicht zugleich null sind; denn wenn $s = 0$ und $r = t$ ist, so ist der Winkel α_0 nicht mehr bestimmt. In diesem Falle reduziert sich die Gleichung 3) auf

$$R = \frac{1}{r}$$

und hieraus folgt, dass alle Normalschnitte der Fläche im Punkte M den nämlichen Krümmungsradius haben. Irgend zwei zu einander rechtwinklige Schnitte können als ein System von Hauptschnitten betrachtet werden. Die Punkte der Fläche, welche diese Eigenschaft haben, heissen *Nabelpunkte* oder *Punkte sphärischer Krümmung*.

311. Wir können noch die Diskussion der Gleichung 3) vereinfachen, wenn wir als Koordinatenebenen zx und zy die Hauptschnitte wählen, deren Existenz wir bewiesen haben. Der mit α_0 bezeichnete Winkel wird dann null und die Gleichung, welche zur Definition dieses Winkels diente, giebt dann

$$s = 0.$$

Alsdann wird die Gleichung 3)

$$R = \frac{1}{r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha},$$

oder

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha. \tag{5}$$

Sind R_1 und R_2 die Krümmungsradien der Hauptschnitte, welche durch die zx- und zy-Ebene gebildet werden, so giebt die Gleichung 5) für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$6) \qquad \frac{1}{R_1} = r, \quad \frac{1}{R_2} = t.$$

Folglich wird der allgemeine Ausdruck für $\frac{1}{R}$, die **Eulersche** Gleichung:

$$7) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2\alpha + \frac{1}{R_2} \sin^2\alpha.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ändert sich nicht, wenn man statt α den Wert $\pi - \alpha$ einsetzt; man hat also den Satz:

Zwei Normalschnitte, welche gegen einen Hauptschnitt in dem einen oder andern Sinne gleich geneigt sind, haben gleiche und gleich gerichtete Krümmungsradien.

Bezeichnet man mit R' den Wert, der aus R hervorgeht, wenn man α um $\frac{\pi}{2}$ vermehrt, so hat man

$$8) \qquad \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} \sin^2\alpha + \frac{1}{R_2} \cos^2\alpha,$$

und die Gleichungen 7) und 8) ergeben:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Die halbe Summe der Krümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ wird die *mittlere Krümmung* der Fläche im Punkte M genannt. Die Gleichung 9) liefert also den Satz:

Die mittlere Krümmung zweier zu einander senkrechten Normalschnitte ist in einem Flächenpunkte konstant und gleich der mittleren Krümmung der Fläche in diesem Punkte.

312. Wir untersuchen nun die Änderung von R, wenn man dem Winkel α successive alle Werte beilegt, welche den verschiedenen Normalschnitten entsprechen, und die zwischen 0 und π enthalten sind.

Zuerst nehmen wir an, dass die beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 von gleichem Zeichen sind; dabei kann man voraussetzen, dass sie positiv sind, denn um ihr Zeichen zu ändern, genügt es, die Richtung der positiven z-Axe zu ändern. Ferner sei

$$R_1 < R_2.$$

Die Gleichung 7) kann in der Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \sin^2 \alpha.$$

Man erkennt, dass R wächst von R_1 bis R_2, während α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, und dass es dann abnimmt von R_2 bis R_1, während α von $\frac{\pi}{2}$ bis π wächst. Die Fläche ist in der Umgebung des Berührungspunktes ganz auf der nämlichen Seite der Tangentenebene gelegen, denn sämtliche Normalschnitte sind nach derselben Seite gekrümmt.

Nehmen wir zweitens an, dass R_1 und R_2 von entgegengesetztem Zeichen sind; es sei R_1 positiv und es werde

$$R_2 = - R_1 \operatorname{tang}^2 \alpha_0$$

gesetzt, wobei α_0 ein Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ist; die Gleichung 7) wird nun

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 \sin^2 \alpha_0} (\sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha).$$

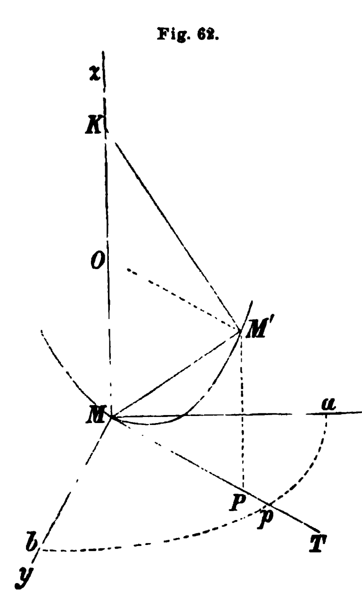
Lässt man α von 0 bis α_0 wachsen, so wächst R von R_1 bis ∞ und ändert, indem es durch den unendlichen Wert geht, sein Zeichen; wächst α weiter von α_0 bis $\frac{\pi}{2}$, so wächst R ebenfalls von $-\infty$ bis $- R_1 \operatorname{tang}^2 \alpha_0 = R_2$. Wenn α von $\frac{\pi}{2}$ bis $\pi - \alpha_0$ wächst, so nimmt R ab von R_2 bis $-\infty$ und ändert wiederum sein Zeichen beim Durchgang durch den unendlichen Wert. Endlich wenn α von $\pi - \alpha_0$ bis π wächst, so nimmt R ab von $+\infty$ bis R_1. In diesem Falle liegen die zum betrachteten Punkte benachbarten Punkte teils auf der einen, teils auf der andern Seite der Tangentenebene.

Andere Darstellung der vorigen Resultate. Die Indikatrix.

313. Die vorstehenden, von Euler zuerst aufgestellten Sätze gewinnen eine sehr anschauliche Form durch die Betrachtungsweisen, welche Charles Dupin gegeben hat. Diese elegante Methode wollen wir nun auseinander setzen.

Wir betrachten eine Fläche und beziehen dieselbe wie vorhin auf drei rechtwinklige, durch den Punkt M gelegte Axen, von denen die eine, Mz, mit der Normalen zusammenfällt, die beiden anderen, Mx und My in der Tangentenebene liegen. Es sei MM' ein Schnitt der Fläche mit der Ebene zMT, dessen Spur auf der xy-Ebene mit der x-Axe den Winkel α bildet. Wir verbinden den Punkt M mit einem unendlich benachbarten Punkte M' der Kurve MM' und legen durch den Punkt M' in der Ebene zMT die Geraden $M'O$ und $M'K$ senkrecht zu Mz und MM' bezüglich. O und K seien die Punkte, in denen dieselben die Normale Mz schneiden. Der Kreis, welcher dem rechtwinkligen Dreiecke $MM'K$ umschrieben ist, hat seinen Mittelpunkt auf der Normalen Mz, und folglich ist (§ 217) der Krümmungskreis der Kurve MM' im Punkte M seine Grenze, wenn M' sich dem Punkte M unendlich nähert. Der Durchmesser dieses Kreises ist aber

Fig. 62.



$$MK = MO + OK = MO + \frac{\overline{M'O}^2}{MO};$$

bezeichnet man also den Krümmungsradius des Normalschnittes MM' im Punkte M mit R, so ist

$$R = \frac{1}{2} \lim \frac{\overline{M'O}^2}{MO}.$$

Legt man durch den Punkt M' eine Ebene parallel zur Tangentenebene xy, so bestimmt man damit auf der Fläche eine bestimmte Kurve I, welche durch den Punkt M' geht; $M'O$ wird der Radiusvektor u des Punktes M', und die Gleichung der Ebene der Kurve I ist $z = MO$. Man kann demnach die vorige Formel folgendermassen schreiben:

$$1)\qquad R = \frac{1}{2} \lim \frac{u^2}{z},$$

sie giebt den Krümmungsradius nach Grösse und Richtung.

Bezeichnen wir nun mit h eine willkürliche Grösse von gleichem Zeichen wie z, und mit ϱ eine bestimmte Länge, so jedoch, dass das Verhältnis der unendlich kleinen Grössen

$$\frac{u^2}{\varrho^2}, \quad \frac{z}{h}$$

die Einheit zur Grenze hat. Die Länge ϱ, welche derart fixiert ist, tragen wir vom Punkte M an auf der Linie MT ab, der Spur des Normalschnittes MM'; es sei $Mp = \varrho$. Jeder Normalschnitt liefert solch einen Punkt p, ja zwei Punkte p, welche symmetrisch zum Anfangspunkt M liegen. Der geometrische Ort aller dieser Punkte p ist eine Kurve abp, die in der xy-Ebene liegt, und welche Dupin die *Indikatrix* genannt hat. Dieser Name ist durch die Eigenschaft, welche diese Kurve besitzt, gerechtfertigt. Denn da das Verhältnis der unendlich kleinen Grössen $\frac{u^2}{\varrho^2}$ und $\frac{z}{h}$ zur Grenze die Einheit hat, so giebt die Gleichung 1):

$$2)\qquad R = \frac{\varrho^2}{2h},$$

d. h. *die Krümmungsradien der verschiedenen Normalschnitte sind proportional den Quadraten der Radienvektoren der Indikatrix, welche mit den Spuren jener Schnitte in der Tangentenebene zusammenfallen.*

Da die unendlich kleine Grösse z konstant ist bei dem Übergange von einem Normalschnitt zum andern, so ist auch das Verhältnis des Radiusvektor u der variabelen

Kurve I zum Radiusvektor ϱ der Indikatrix konstant, wenn man die Grössen vernachlässigt, welche im Verhältnis zu u unendlich klein werden. Man kann also sagen, *dass die Indikatrix ähnlich ist der Kurve auf der Fläche, welche von einer Ebene aus geschnitten wird, die parallel der Tangentenebene ist und dieser unendlich benachbart wird.*

Liegt die Fläche ganz auf der einen Seite der Tangentenebene in der Umgebung des Punktes M, so giebt die Indikatrix, welche in der angegebenen Weise konstruiert ist, die Krümmungsradien aller Normalschnitte. Wenn aber der andere Fall vorliegt, so kann die Gleichung 1) nicht alle Radien liefern, ausser wenn man der unendlich kleinen Grösse z sowohl positive wie negative Werte beilegt. Man muss alsdann der Grösse h das doppelte Zeichen $\pm$ geben. Die auf diese Weise gebildete Indikatrix ist aus zwei verschiedenen Kurven zusammengesetzt, und giebt dann, wie im vorigen Falle, die Krümmungsradien aller Normalschnitte.

314. Wir suchen nun die Gleichung der Indikatrix. Indem die Koordinaten x, y, z rechtwinklig sind, setzen wir wie üblich

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

und da die Grössen z, p, q im Punkte M null sind, so hat man für einen Punkt M' der Fläche

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + R_3.$$

In dieser Gleichung sind r, s, t die Werte, welche dem Punkte M angehören, und R_3 bezeichnet den Rest der MacLaurinschen Entwickelung. Die vorstehende Gleichung ist die Gleichung der Fläche, und wenn man

$$x = u\cos\alpha, \quad y = u\sin\alpha$$

wählt, so erhält man, bei bestimmtem Werte von α, die Gleichung des Schnittes MM' zwischen den Koordinaten z und u. Führt man diese Substitution aus und dividiert mit u^2, so folgt:

$$\frac{z}{u^2} = \frac{1}{2}(r\cos^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + t\sin^2\alpha) + \frac{R_3}{u^2}.$$

Dies ist die Gleichung für das Verhältnis der unendlich kleinen Grössen z und u^2. Da dieses Verhältnis die Grenze $\frac{h}{\varrho^2}$ hat, und $\frac{R_3}{u^2}$ unendlich klein wird, so wird:

$$3)\qquad \frac{h}{\varrho^2} = \frac{1}{2}(r\cos^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + t\sin^2\alpha).$$

Dies ist die Gleichung der Indikatrix zwischen den Polarkoordinaten ϱ und α. Um zu rechtwinkligen Koordinaten zurückzukehren, hat man zu setzen

$$\varrho\cos\alpha = x,\quad \varrho\sin\alpha = y,$$

und die Gleichung 3) wird:

$$4)\qquad rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2h$$

h ist, wie wir wiederholen, eine willkürliche Länge, der man das doppelte Zeichen $\pm$ geben muss.

Ist nun $rt - s^2 > 0$, so muss man, um eine reelle Kurve zu erhalten, h dasselbe Zeichen geben, welches die Ableitungen r und t besitzen; die Indikatrix ist also eine *Ellipse;* man nennt die Fläche in solch einem Punkte *elliptisch oder positiv gekrümmt.*

Ist $rt - s^2 = 0$, so muss man ebenfalls h das Zeichen der Ableitungen r und t beilegen; die Indikatrix besteht in diesem Falle aus zwei *parallelen Geraden*, die in gleichen Abständen vom Punkte M verlaufen. Die Fläche heisst in diesem Punkte *parabolisch gekrümmt.*

Ist endlich $rt - s^2 < 0$, so muss man der Grösse h sowohl das positive, wie das negative Zeichen beilegen. Die Indikatrix besteht aus zwei *konjugierten Hyperbeln*, welche die nämlichen Asymptoten besitzen, und bei denen die transversale Axe der einen die nicht transversale für die andere ist. Die Fläche heisst in dem Punkte *hyperbolisch oder negativ* gekrümmt.

Die Gleichung 2), welche den Wert des Krümmungsradius angiebt, wird gemäss der Gleichung 3)

$$5)\qquad R = \frac{1}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin\alpha},$$

und das ist dieselbe Gleichung, die wir im § 310 auf ganz anderem Wege erhalten haben.

315. Da die Krümmungsradien der Normalschnitte in einem Flächenpunkte proportional sind den Quadraten der Radienvektoren der Indikatrix, so entspricht einer jeden Eigenschaft dieser Radien auch eine analoge der Krümmungsradien.

So hat in einer Ellipse der aus dem Mittelpunkt gezogene Radius ein Maximum und ein Minimum, und die Richtungen dieser beiden sind zu einander senkrecht. Also existieren im Falle, dass $rt - s^2 > 0$, zwei Normalschnitte der Fläche senkrecht zu einander, derart, dass der Krümmungsradius der einen am grössten, der anderen am kleinsten ist. Dies sind die Schnitte, welche wir die Hauptschnitte genannt haben. Einer der Krümmungsradien wird unendlich, wenn $rt - s^2 = 0$ ist, wobei die elliptische Indikatrix in zwei parallele Gerade ausartet. Endlich besteht auch die nämliche Eigenschaft, wenn die Indikatrix aus zwei Hyperbeln gebildet wird. In diesem Systeme hat das Quadrat des Radiusvektor zwei Minima, welche den beiden zu einander senkrechten transversalen Axen der Hyperbeln zugehören. Da aber von diesen beiden Radien der eine einem positiven, der andere einem negativen Krümmungsradius entspricht, so sieht man, dass auch hier, wie im Falle der Ellipse, ein Maximum und ein Minimum stattfindet, und dass die entsprechenden Schnitte senkrecht zu einander sind.

Bei der elliptischen Indikatrix ist die Summe der inversen Quadrate zweier senkrechter Radien konstant; dasselbe findet statt bei der hyperbolischen Indikatrix, wenn man die Differenz statt der Summe einführt. Hieraus folgt, indem man die Vorzeichen der Krümmungsradien beachtet, dass die Summe der Krümmungen zweier zu einander senkrechter Normalschnitte konstant und gleich der Summe der Hauptkrümmungen ist. Dies wurde auch schon im § 311 bewiesen.

Zwei Radienvektoren der Indikatrix, die gegen eine Hauptaxe gleich geneigt sind in verschiedenem Sinne, sind unter einander gleich. Hieraus schliesst man, dass zwei Normalschnitte, die gegen einen Hauptschnitt gleich geneigt sind, auch gleiche Krümmung haben.

Endlich erkennt man, dass die Punkte der Fläche, welche wir *Nabelpunkte* genannt haben, diejenigen sind, für welche die Indikatrix ein Kreis ist. Denn alsdann haben alle Normalschnitte die gleiche Krümmung. Bei den Flächen zweiter Ordnung sind alle Schnitte, die durch parallele Ebenen bestimmt werden, ähnliche Kurven; demnach ist die Indikatrix in jedem Punkte irgend eine der Kurven, welche durch eine zur Tangentenebene parallele Ebene ausgeschnitten wird. Die Nabelpunkte der Flächen zweiter Ordnung sind also die Punkte, in denen die Tangentenebene parallel zu einer der Ebenen ist, welche die Fläche in einem Kreise schneiden.

Ein Fall, in dem die allgemeine Theorie ungültig ist.

316. Das bemerkenswerte Gesetz, nach welchem die Krümmung der Normalschnitte in einem Flächenpunkte sich ändert, setzt das Vorhandensein einer Tangentenebene in diesem Punkte voraus, und erfordert ausserdem, dass die partiellen Ableitungen r, s, t in diesem Punkte bestimmte Werte haben, für welche der Satz vom totalen Differentiale

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

gültig ist. Letzteres ist insbesondere dann der Fall, wenn die Grössen r, s, t in der Umgebung des betrachteten Punktes stetige Funktionen der unabhängigen Variabelen sind. Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, so gilt unsere Untersuchung nicht mehr, und das Gesetz, nach welchem sich die Krümmungen der Normalschnitte ändern, kann von dem für den regulären Fall gefundenen durchaus verschieden sein. Dies soll durch ein Beispiel gezeigt werden.

Wir betrachten die Fläche, welche in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung

$$1)\qquad z = \frac{x^2 + y^2}{2f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

dargestellt ist, wobei f eine gegebene Funktion ist. Setzt man

$$x = \varrho \cos\alpha, \quad y = \varrho \sin\alpha,$$

so wird

2) $$z = \frac{\varrho^2}{2f(\operatorname{tang}\alpha)},$$

und dies ist die Gleichung eines Schnittes, der auf der Fläche durch die Ebene $y = x \operatorname{tang}\alpha$ gebildet wird; z und ϱ sind also die Koordinaten. Dieser Schnitt ist eine Parabel, deren Tangente im Koordinatenanfangspunkt in der xy-Ebene liegt. Für diesen Anfangspunkt wollen wir den allgemeinen Ausdruck der Krümmungsradien bestimmen. Gemäss der Gleichung 1) ist z eine homogene Funktion zweiten Grades in x und y; also ist nach dem Theorem für homogene Funktionen (§ 136):

$$rx^2 + 2s\,xy + ty^2 = \frac{x^2 + y^2}{f\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Ersetzt man x und y durch $\varrho \cos\alpha$ und $\varrho \sin\alpha$, dividiert man durch ϱ^2 und lässt ϱ nach null konvergieren, so wird

$$r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin^2\alpha = \frac{1}{f(\operatorname{tang}\alpha)};$$

r, s, t haben in dieser Gleichung die Werte, welche dem Koordinatenanfangspunkt entsprechen, und α ist der Winkel, den die Tangente des Normalschnittes mit der x-Axe bildet. Der Ausdruck für den Krümmungsradius (§ 310) wird also

$$R = f(\operatorname{tang}\alpha)$$

und das Gesetz seiner Änderung ist also ebenso willkürlich wie die Funktion f. Also hat derselbe auch nicht mehr, wie im regulären Falle ein einziges Maximum und ein einziges Minimum, die senkrecht zu einander sind.

Die allgemeine Theorie ist in dem vorliegenden Falle deshalb nicht anwendbar, weil für $x = 0$, $y = 0$ die partiellen Ableitungen r, s, t unbestimmt werden. Ihre Werte hängen vielmehr von der Grenze ab, nach welcher das Verhältnis $\frac{y}{x}$ konvergiert, während x und y null werden.

Die Einhüllende der Tangentenebenen einer Fläche in den verschiedenen Punkten einer Kurve. Konjugierte Tangenten. Differentialgleichung der Haupttangentenkurven.

317. Es werde eine Kurve betrachtet, die auf einer gegebenen Fläche verläuft. Die Tangentenebene der Fläche in einem Kurvenpunkte hat die Gleichung (x, y, z)

$$1)\qquad \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

Ihre Einhüllende ist eine developpabele Fläche; dieselbe ist bestimmt durch die Gleichung 1) zusammen mit der Gleichung, welche aus der Differentiation nach der unabhängigen Variabelen, von der auf der gegebenen Kurve die Grössen x, y, z, p, q abhängen, hervorgeht. Da $dz = p\,dx + q\,dy$, so ergiebt diese Differentiation

$$2)\qquad (\xi - x)\,dp + (\eta - y)\,dq = 0.$$

Um die Rückkehrkurve der developpabelen Fläche zu erhalten, muss man die Gleichung 2) nochmals differentiieren; dies ergiebt

$$3)\qquad (\xi - x)\,d^2p + (\eta - y)\,d^2q - (dx\,dp + dy\,dq) = 0.$$

Die Gleichungen 1), 2), 3) sind enthalten in der Formel:

$$4)\qquad \frac{\xi - x}{dq} = -\frac{\eta - y}{dq} = \frac{\zeta - z}{p\,dq - q\,dp} = \frac{dp\,dx + dq\,dy}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}.$$

Die Werte von ξ, η, ζ, welche aus diesen Gleichungen folgen, sind die Koordinaten des Punktes der Rückkehrkurve, welcher dem Punkt x, y, z entspricht. Die Gleichungen, welche zwischen den ersten drei Verhältnissen in der Formel 4) bestehen, sind äquivalent den Gleichungen 1) und 2); sie bestimmen die Erzeugende oder Charakteristik der developpabelen Fläche. Diese Charakteristik und die Tangente an die Kurve im Punkte (x, y, z) heissen nach Dupin *konjugierte Tangenten* der Fläche.

Bezeichnet man mit α, β, γ die Winkel, welche die Tangente der Kurve mit den Koordinaten bildet, und mit α', β', γ' die Winkel, welche die konjugierte Tangente bildet, so sind

die Kosinus der ersten proportional zu dx, dy, dz, die Kosinus der anderen proportional zu $dq, -dp, p\,dq - q\,dp$, gemäss der Formel 4), oder nach der gewöhnlichen Bezeichnung proportional zu

$$s\,dx + t\,dy, \quad -(r\,dx + s\,dy), \quad (ps - qr)\,dx + (pt - qs)\,dy.$$

Man hat also:

$$5)\quad \frac{\cos\alpha'}{s\cos\alpha + t\cos\beta} = \frac{\cos\beta'}{-(r\cos\alpha + s\cos\beta)} = \frac{\cos\gamma'}{(ps-qr)\cos\alpha + (pt-qs)\cos\beta}.$$

Dies sind die Relationen, welche zwischen den Kosinus zweier konjugierter Tangenten einer Fläche bestehen.

Verlegt man den Koordinatenanfangspunkt in einen Punkt der Fläche und macht man die Tangentenebene zur Ebene x, y, die Ebenen der beiden Hauptnormalschnitte zur zx- und zy-Ebene, so wird:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad s = 0,$$
$$\cos\gamma = 0, \quad \cos\beta = \sin\alpha,$$
$$\cos\gamma' = 0, \quad \cos\beta' = \sin\alpha',$$

und die Gleichung 5) ergiebt:

$$6)\quad \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{r}{t}.$$

Diese Gleichung drückt folgende Eigenschaft aus:

Irgend zwei konjugierte Tangenten sind parallel zweien konjugierten Durchmessern der Indikatrix.

Und hieraus folgt:

Die algebraische Summe der Krümmungsradien zweier Normalschnitte, welche zweien konjugierten Tangenten entsprechen, ist konstant.

Denn die Krümmungsradien sind proportional den Quadraten der Durchmesser der Indikatrix, und diese Quadrate haben eine konstante Summe oder Differenz.

Den Zusammenhang zwischen zwei konjugierten Durchmessern kann man auch in dem Satze aussprechen: *Geht man von einem Flächenpunkte in einer bestimmten Tangentenrichtung weiter, so beginnt die Tangentenebene sich um die konjugierte Tangente zu drehen.* Denn es ist die konjugierte Tangentenrichtung die Schnittlinie zweier benachbarter Tangentenebenen.

Aus der Gleichung 5), die man in der Form schreiben kann:

$$r \cos\alpha \cos\alpha' + s(\cos\alpha \cos\beta' + \cos\alpha' \cos\beta) + t \cos\beta \cos\beta' = 0,$$

sowie aus den geometrischen Eigenschaften der konjugierten Durchmesser eines Kegelschnittes folgt: In jedem Punkte einer Fläche giebt es zwei Richtungen, von denen jede mit sich selbst konjugiert ist; dieselben bestimmen sich aus der Gleichung

$$7) \qquad r \cos^2\alpha + 2s \cos\alpha \cos\beta + t \cos^2\beta = 0$$

und entsprechen den Richtungen der Asymptoten der Indikatrix. Diese beiden Richtungen heissen die *Haupttangenten* in dem Flächenpunkte; sie sind imaginär im Punkte elliptischer Krümmung, $rt - s^2 > 0$, und reell im Punkte hyperbolischer Krümmung $(rt - s^2 < 0.)$ In einem Punkte mit parabolischer Krümmung $(rt - s^2 = 0)$ bildet die eine ausgezeichnete Richtung mit der Krümmung null die konjugierte zu jeder andern Richtung, denn es wird hier $\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'} = -\frac{s \cos\alpha + t \cos\beta}{r \cos\alpha + s \cos\beta} = -\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{r}}$, also unabhängig von α, und diese Richtung ist zugleich die Richtung der Haupttangente.

Ersetzt man in der Gleichung 7) die Kosinus durch die ihnen proportionalen Werte dx und dy, so folgt

$$8) \qquad r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

und diese Gleichung giebt die beiden Fortschreitungsrichtungen an, die in einem Flächenpunkte mit den Richtungen der Haupttangenten zusammenfallen. Zu den beiden Werten $dx:dy$, die aus dieser Gleichung folgen, erhält man den zugehörigen Wert dz vermittelst der Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$.

Die Fortschreitungsrichtungen der Haupttangenten bilden zusammen ein System von *Haupttangentenkurven* auf der Fläche; durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Kurven dieses Systems, dieselben sind aber nur dann reell, wenn die Fläche in diesem Punkte hyperbolisch oder parabolisch gekrümmt ist. Wird in der Gleichung 8) der Wert von z als Funktion der unabhängigen Variabelen x und y vermittelst der Flächengleichung eingeführt, so stellt sie *die Differentialgleichung der Projektionen der Haupttangentenkurven* in der xy-Ebene dar.

Die beiden Haupttangenten in einem Flächenpunkte können auch dadurch definiert werden, dass man in jedem Punkte diejenigen Tangenten bestimmt, welche daselbst eine Berührung von mindestens zweiter Ordnung mit der Fläche besitzen, oder mindestens drei benachbarte Punkte mit der Fläche gemein haben.

Denn ist x, y, z ein Flächenpunkt, und legt man von demselben eine Gerade, welche die Winkel $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ mit den positiven Koordinatenaxen bildet, so wird, wenn diese Gerade die Fläche noch

in einem andern Punkte schneidet, dessen Entfernung von dem betrachteten Punkte gleich ϱ ist, die Länge ϱ der Gleichung genügen:

$$f(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\cos\beta,\ z+\varrho\cos\gamma)=0.$$

Entwickelt man dieselbe nach Potenzen von ϱ, so folgt, weil $f(x, y, z) = 0$ ist:

$$\varrho\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right]+\frac{\varrho^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\beta+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cos^2\gamma\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\cos\gamma\cos\alpha\right]+\frac{\varrho^3}{3!}R_3=0.$$

Dabei bedeutet R_3 den Rest der Taylorschen Entwickelung, gebildet mit den dritten partiellen Ableitungen der Funktion f. Dass dieser Gleichung der Wert $\varrho = 0$ genügt, sagt aus, dass der Punkt x, y, z auf der Fläche angenommen ist. Dividiert man, um die andern Lösungen zu bestimmen, die Gleichung mit ϱ, so folgt:

$$9)\quad\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right]+\frac{\varrho}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\cdots 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta+\cdots\right]\\&\qquad+\frac{\varrho^2}{3!}R_3=0.\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichung wird durch den Wert $\varrho = 0$ befriedigt, falls

$$10)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=0.$$

Diese Bedingung drückt aus, dass die angenommene Richtung in der Tangentenebene der Fläche liegt und liefert den Satz: Jede Tangente der Fläche schneidet dieselbe in zwei unendlich benachbarten Punkten.

Führen wir die Bedingung 10) ein, so erhält die Gleichung 9) nach Division mit ϱ die Form

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\cdots 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta+\cdots\right]+\frac{\varrho}{3!}R_3=0.$$

Soll nun auch diese Gleichung den Wert $\varrho = 0$ ergeben, so müssen die Richtungskosinus der Tangente auch noch der Bedingung genügen:

$$11)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\beta+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cos^2\gamma+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta\\&\qquad+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\cos\gamma\cos\alpha=0.\end{aligned}\right.$$

Denkt man sich die Gleichung der Fläche in der expliciten Form $z - \varphi(x, y) = 0$ gegeben, so erhalten die Gleichungen 10) und 11) die Form:

$$p \cos\alpha + q \cos\beta - \cos\gamma = 0 \quad \text{und} \quad r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta = 0,$$

wodurch in der That die Richtungen der Haupttangenten bestimmt sind.

Die allgemeinen Ausdrücke für die Hauptkrümmungsradien in einem Flächenpunkte. Das Krümmungsmaass der Flächen.

318. Die allgemeine Formel, welche Grösse und Richtung des Krümmungsradius eines Normalschnittes mit den Winkeln α, β, γ bestimmt, war (§ 309)

$$1) \qquad R = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta.}$$

Die Wahl des Vorzeichens von $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ bestimmt dabei die Richtung der Normalen, nach welcher die Krümmungsradien positiv sind. Die Kosinus der Winkel α, β, γ genügen den Relationen:

$$2) \qquad \cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta$$

und

$$3) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

und die Elimination von $\cos\gamma$ giebt:

$$4) \quad (1 + p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1 + q^2)\cos^2\beta = 1.$$

Wir multiplizieren den Ausdruck R mit der linken Seite dieser Gleichung, um ihn in Bezug auf $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ homogen zu machen; die Gleichung 1) kann dann geschrieben werden:

$$5) \quad \begin{cases} \left(1+p^2-\dfrac{Rr}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos^2\alpha + 2\left(pq-\dfrac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos\alpha\cos\beta \\ \qquad + \left(1+q^2-\dfrac{Rt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos^2\beta = 0. \end{cases}$$

319. Diese Gleichung liefert uns unmittelbar die Bestimmung der Nabelpunkte. Denn sie lässt den Wert des

Verhältnisses $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ ermitteln, welcher in einem bestimmten Flächenpunkte einem gegebenen Werte R entspricht. Ist nun der Punkt ein Nabelpunkt, so ist das Verhältnis $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ unbestimmt, und umgekehrt. Demnach erhält man die Bedingungen für einen Nabelpunkt, wenn man die Koeffizienten von $\cos^2\alpha$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\cos^2\beta$ einzeln gleich null setzt; man findet so:

$$6)\qquad \frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2},$$

und jeder dieser Quotienten hat den Wert $\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}$, wobei R den Krümmungsradius im Nabelpunkt bezeichnet.

Im allgemeinen bestimmen die zwei Gleichungen, welche in der Formel 6) enthalten sind, eine endliche Anzahl von Punkten, oder wenigstens ein Punktsystem, das keine kontinuierliche Kurve bildet. Indessen kann es auch eintreten, dass sich die beiden Gleichungen infolge der Flächengleichung auf eine reduzieren, und alsdann besitzt die Fläche eine Kurve von Nabelpunkten.

320. Die Gleichung 5) lässt auch die Hauptkrümmungsradien eines Flächenpunktes bestimmen. Es müssen nämlich die beiden Werte des Verhältnisses $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, welche aus dieser Gleichung folgen, einander gleich werden, sowohl für das Maximum als auch für das Minimum. Die Bedingung dieser Gleichheit liefert:

$$\left(pq-\frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2-\left(1+p^2-\frac{Rr}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\left(1+q^2-\frac{Rt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0,$$

oder:

$$7)\qquad \begin{cases}(rt-s^2)R^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2}\,R\\ \qquad\qquad +(1+p^2+q^2)^2=0.\end{cases}$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung für R sind die beiden Hauptkrümmungsradien.

Es erübrigt noch die Bestimmung des Quotienten $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ für jeden der beiden Hauptschnitte. Ist nun R eine Wurzel der Gleichung 7), so hat die Gleichung 5) eine doppelt zäh-

lende Wurzel, mag man $\cos\alpha$ oder $\cos\beta$ als die unbekannte Grösse betrachten. Diese doppelte Wurzel muss also auch der Gleichung genügen, welche man durch Differentiation der Gleichung 5) entweder nach $\cos\alpha$ oder nach $\cos\beta$ erhält. Demnach ist

$$\left(1+p^2-\frac{Rr}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos\alpha+\left(pq-\frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos\beta=0,$$

$$\left(pq-\frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos\beta+\left(1+q^2-\frac{Rt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos\beta=0,$$

und dies ergiebt die Gleichungen:

$$8)\quad \frac{r\cos\alpha+s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha+pq\cos\beta}=\frac{s\cos\alpha+t\cos\beta}{pq\cos\alpha+(1+q^2)\cos\beta}=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}.$$

Die Gleichung zwischen den ersten beiden Quotienten ist vom zweiten Grade in Bezug auf das Verhältnis $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$; sie bestimmt die Werte desselben, die den Hauptschnitten zugehören. Zusammen mit den Gleichungen 2) und 3) erhält man die Werte der drei Kosinus: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

Die Gleichung 7) fällt mit der Gleichung 7) des § 157 zusammen, wenn man hier $\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ als die Unbekannte betrachtet. Man sieht also, dass die Krümmungsmittelpunkte der Normalschnitte genau die beiden Punkte sind, welche wir bei der Aufgabe im citierten Paragraphen betrachtet haben.

Bezeichnet man mit R_1 und R_2 die Wurzeln der Gleichung 7), so hat man

$$9)\quad \begin{cases} R_1+R_2=\dfrac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{rt-s^2}\sqrt{1+p^2+q^2}, \\[2ex] R_1R_2=\dfrac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}, \end{cases}$$

und hieraus folgt:

$$10)\quad \begin{cases} (R_1-R_2)^2=\dfrac{(1+p^2+q^2)(1+p^2)(1+q^2)p^2q^2}{(rt-s^2)^2}\left[\dfrac{2s}{pq}-\dfrac{r}{1+p^2}-\dfrac{t}{1+q^2}\right]^2 \\[2ex] \qquad+\dfrac{(1+p^2+q^2)^2(1+p^2)(1+q^2)}{(rt-s^2)^2}\left[\dfrac{r}{1+p^2}-\dfrac{t}{1+q^2}\right]^2. \end{cases}$$

Diese Gleichung lehrt, dass die Gleichungen 6) notwendig sind, wenn die Gleichung 7) zwei gleiche Wurzeln hat; so findet man also aufs neue die für die Nabelpunkte abgeleiteten Bedingungen.

Die Werte der beiden Hauptkrümmungsradien eines Flächenpunktes stehen auch in engster Beziehung zu der Grösse, welche Gauss als *Krümmungsmaass* der Fläche in einem Punkte definiert hat; dieselbe ist von der im § 311 genannten mittleren Krümmung zu unterscheiden. Wie bei der Krümmung der Kurven die Länge des Bogens und des Bogenelementes eingeführt werden musste, um die Krümmung zu messen, so ist hier der Begriff der Grösse einer krummen Fläche und des Differentiales derselben, d. h. des Flächenelementes erforderlich. Ihre genaue Bestimmung kann erst in der Integralrechnung (§§ 589 und 590) gegeben werden, doch wollen wir hier schon unter Voraussetzung jener Begriffe die Definition und Berechnung der Krümmung kurz entwickeln.

Wir betrachten ein beliebiges Stück auf einer Fläche, das durch eine bestimmte Kurve C begrenzt ist, und es sei S die Grösse dieses Stückes. Auf einer Kugel mit dem Radius 1, deren Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt gedacht sei, konstruieren wir die Radien, welche den Normalen der Fläche in den Punkten der Kurve C parallel sind, wobei wir annehmen, dass in den Punkten dieser Kurve die Richtung der Normalen sich stetig ändert, und dass nicht zwei verschiedene Normalen einander parallel sind. Alsdann bestimmen die Radien eine Kurve C' auf der Kugel, welche eine Fläche von der Grösse σ begrenzt. Die Grösse σ heisst die absolute Krümmung der Fläche S, und der Quotient $\frac{\sigma}{S}$ die relative Krümmung derselben. Zieht man nun die Kurve C immer enger zusammen, so dass sie nach einem bestimmten Flächenpunkt konvergiert, so heisst der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{\sigma}{S}$ das *Krümmungsmaass* oder einfach die *Krümmung* der Fläche in dem betrachteten Punkte. Hierbei werden Zähler und Nenner des Quotienten unendlich klein; der Zähler reduziert sich auf das Element der Kugelfläche, der Nenner auf das der gegebenen Fläche. An Stelle dieser Elemente können wir nun auch ihre orthogonalen Projektionen auf eine Ebene, z. B. die xy-Ebene einführen, weil beide Elemente einander parallel sind; die Projektionsebene darf nur nicht senkrecht zur Tangentenebene des betrachteten Flächenpunktes gewählt werden. Demnach wird die Krümmung

$$K = \frac{d\sigma'}{dS'},$$

wenn $d\sigma'$ und dS' die Projektionen der Flächenelemente bezeichnen. Als Element dS' wählen wir das Dreieck, gebildet von den Punkten mit den Koordinaten x, y; $x + d_1 x$, $y + d_1 y$; $x + d_2 x$, $y + d_2 y$, so dass

$$dS' = \tfrac{1}{2}(d_1 x\, d_2 y - d_2 x\, d_1 y)$$

ist. Ferner seien die Koordinaten der entsprechenden Punkte für die Projektion des Kugelelementes X, Y; $X + d_1 X$, $Y + d_1 Y$; $X + d_2 X$, $Y + d_2 Y$, so dass

$$d\sigma' = \tfrac{1}{2}(d_1 X\, d_2 Y - d_2 X\, d_1 Y).$$

Folglich ist

$$K = \frac{d_1 X\, d_2 Y - d_2 X\, d_1 Y}{d_1 x\, d_2 y - d_2 x\, d_1 y}.$$

Es ist nun $d_1 X = \frac{\partial X}{\partial x} d_1 x + \frac{\partial X}{\partial y} d_1 y$, $d_2 X = \frac{\partial X}{\partial x} d_2 x + \frac{\partial X}{\partial y} d_2 y$ u.s.w., und führt man diese Werte in die Gleichung für K ein, so wird

$$K = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Est ist aber $X = \frac{p}{\omega}$, $Y = \frac{q}{\omega}$, wenn man $\omega = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ setzt; aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\omega r - p\frac{\partial \omega}{\partial x}}{\omega^2}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\omega s - p\frac{\partial \omega}{\partial y}}{\omega^2},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\omega s - q\frac{\partial \omega}{\partial x}}{\omega^2}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\omega t - q\frac{\partial \omega}{\partial y}}{\omega^2}$$

folgt:

$$K = \frac{1}{\omega^4}\left[\omega^2(rt - s^2) + \omega\frac{\partial \omega}{\partial y}(sp - rq) + \omega\frac{\partial \omega}{\partial x}(sq - pt)\right],$$

oder, indem man $\omega\frac{\partial \omega}{\partial x} = pr + qs$, $\omega\frac{\partial \omega}{\partial y} = ps + qt$ einführt:

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Die Krümmung der Fläche in einem Punkte ist also gleich dem reziproken Werte des Produktes der beiden Hauptkrümmungsradien.

Bei allen Biegungen einer Fläche, die ohne Dehnung oder Zusammenziehung vollzogen werden, bleibt die Grösse dieser Krümmung in jedem Punkte ungeändert. Diesen Satz, sowie die weiteren analytischen Darstellungen findet man bei Gauss: Disq. general. circa superf. curv; in kurzer Übersicht auch bei Baltzer, Theorie der Determinanten.

Bestimmung der Nabelpunkte des Ellipsoides.

321. Als Anwendung der Theorie im § 319 geben wir die Bestimmung der Nabelpunkte des Ellipsoides. Bezeichnen wir die Halbaxen der Fläche mit ϱ, $\sqrt{\varrho^2 - b^2}$, $\sqrt{\varrho^2 - c^2}$, und nehmen dabei $b < c$ an, so ist die Gleichung des Ellipsoides:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1.$$

Durch Differentiation folgt:

$$\frac{x}{\varrho^2} + \frac{pz}{\varrho^2 - c^2} = 0, \quad \frac{y}{\varrho^2 - b^2} + \frac{qz}{\varrho^2 - c^2} = 0,$$

und durch weitere Differentiation:

$$rz + (1 + p^2) = \frac{c^2}{\varrho^2},$$

$$tz + (1 + q^2) = \frac{c^2 - b^2}{\varrho^2 - b^2},$$

$$sz + pq = 0.$$

Daraus bildet man:

$$z\,[pqr - (1 + p^2)s] = \frac{c^2}{\varrho^2} pq,$$

$$z\,[(1 + q^2)r - (1 + p^2)t] = \frac{b^2(\varrho^2 - c^2)}{\varrho^2(\varrho^2 - b^2)} + \frac{c^2}{\varrho^2} q^2 - \frac{c^2 - b^2}{\varrho^2 - b^2} p^2.$$

Da die linken Seiten dieser Gleichung null sind für einen Nabelpunkt, so erhält man für denselben entweder $p = 0$ oder $q = 0$. Die Annahme $p = 0$ würde für q einen imaginären Wert ergeben. Für $q = 0$ folgt aber

$$p = \frac{b\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\varrho\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{c}, \quad x = \pm\frac{b\varrho}{c}, \quad y = 0.$$

Die Quadratwurzeln sind mit beiderlei Zeichen, sowohl Plus wie Minus, zu nehmen. Das Ellipsoid hat also vier reelle

Nabelpunkte, welche in der Ebene der grössten und der kleinsten Axe gelegen sind, was mit dem im § 315 Gesagten übereinstimmt.

Die Krümmungskurven einer Fläche.

322. *Krümmungskurven einer Fläche* nennt man alle die Kurven, bei denen die in den verschiedenen Kurvenpunkten konstruierten Flächennormalen eine developpabele Fläche bilden.

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines bestimmten Flächenpunktes, und es werde wie gewöhnlich:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

gesetzt. Die Normale der Fläche im Punkte (x, y, z) hat die Gleichungen:

$$1) \quad (\xi - x) + p\,(\zeta - z) = 0, \quad (\eta - y) + q\,(\zeta - z) = 0.$$

Wenn nun die Koordinaten x, y, z einer Krümmungskurve angehören, so müssen sie, ebenso wie p und q, Funktionen *einer* Variabelen sein; da nun die Gerade 1) Tangente der Rückkehrkurve einer developpabelen Fläche, oder was das nämliche besagt, die Charakteristik dieser Fläche sein soll, so ist sie in der beweglichen Ebene enthalten, welche von dieser Fläche eingehüllt wird. Die Gleichung dieser Ebene wird also

$$2) \quad [(\xi - x) + p\,(\zeta - z)] + \lambda\,[(\eta - y) + q\,(\zeta - z)] = 0,$$

wobei λ eine Funktion des Parameters oder der Variabelen ist, von welcher die Koordinaten x, y, z abhängen. Nach der im § 283 gegebenen Theorie ist die Einhüllende dargestellt durch die Gleichung 2), zusammen mit derjenigen, die aus der Differentiation derselben nach dem Parameter hervorgeht. Diese letztere Gleichung muss aber durch die Gleichungen 1) identisch erfüllt werden. Differentiiert man die Gleichung 2) und lässt dabei das mit $d\lambda$ multiplizierte Glied fort, welches auf Grund der Gleichungen 1) null ist, so kommt:

$$[-(dx + p\,dz) + (\zeta - z)\,dp] + \lambda\,[-(dy + q\,dz) + (\zeta - z)\,dq] = 0.$$

Diese Gleichung muss bei jedem Wert von ζ bestehen; sie zerlegt sich demnach in die beiden:

$$3)\qquad \begin{cases} dx + p\,dz = \lambda\,(dy + q\,dz), \\ dp = \lambda\,dq, \end{cases}$$

oder wenn man λ eliminiert:

$$4)\qquad \frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz}.$$

Dies ist die Gleichung, welche, der Definition nach, für jeden Punkt einer Krümmungskurve bestehen muss. Ersetzt man dz, dp, dq durch ihre Werte, so erhält sie die Form

$$5)\qquad \frac{r\,dx + s\,dy}{(1 + p^2)\,dx + pq\,dy} = \frac{s\,dx + t\,dy}{pq\,dx + (1 + q^2)\,dy},$$

oder

$$6)\quad [(1 + q^2)\,s - p\,q\,t]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1 + q^2)\,r - (1 + p^2)\,t]\,\frac{dy}{dx} + [p\,q\,r - (1 + p^2)\,s] = 0.$$

Die Ableitungen p, q, r, s, t sind gegebene Funktionen der Koordinaten x, y und diese Gleichung ist die *Differentialgleichung* der Projektionen der Krümmungskurve auf die xy-Ebene.

Für jedes Wertsystem x, y ergiebt die Gleichung zwei Werte von $\frac{dy}{dx}$ oder von $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, d. h. durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Krümmungskurven, ausser wenn der Punkt ein Nabelpunkt ist. Für diesen verschwindet jeder Koeffizient in der Gleichung 6).

323. Die Gleichung der beweglichen Ebene, welche wir betrachtet haben, wird nach der zweiten der Gleichungen 3):

$$[(\xi - x) + p\,(\zeta - z)]\,dq - [(\eta - y) + q\,(\zeta - z)]\,dp = 0,$$

und um die Rückkehrkure ihrer Enveloppe zu bestimmen, muss man diese Gleichung mit den beiden Gleichungen verbinden, die aus ihr durch zweimalige Differentiation folgen. Die erste Differentiation giebt unter Berücksichtigung der Gleichung 4):

$$[(\xi - x) + p\,(\zeta - z)]\,d^2q - [(\eta - y) + q\,(\zeta - z)]\,d^2p = 0.$$

Differentiieren wir diese und bezeichnen wir mit $\frac{1}{M}$ den Wert eines jeden Gliedes in der Gleichung 4), so folgt, indem

man die vorhergehenden Gleichungen beachtet, welche den Gleichungen der Normalen äquivalent sind:

$$(\zeta - z - M)(dp\,d^2q - dq\,d^2p) = 0,$$

oder

$$\zeta - z = M.$$

Dieser Wert von ζ gehört dem Berührungspunkte der Normalen mit der Rückkehrkurve an. Bezeichnet man mit R den Teil der Normalen, welcher zwischen diesem Berührungspunkte und dem Flächenpunkte enthalten ist, so ist

$$R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

oder wegen der Gleichungen 1)

$$R = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,(\zeta - z) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,M.$$

Es ist aber $\frac{1}{M}$ der gemeinsame Wert der Glieder in der Formel 5), also ist:

$$7)\quad \frac{r\,dx + s\,dy}{(1+p^2)\,dx + pq\,dy} = \frac{s\,dx + t\,dy}{pq\,dx + (1+q^2)\,dy} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}.$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Tangente der Krümmungskurve mit den Koordinatenaxen bildet, so ist

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta},$$

und die vorige Formel wird:

$$8)\quad \frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta} = \frac{s\cos\alpha + t\cos\beta}{pq\cos\alpha + (1+q^2)\cos\beta} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}.$$

Die beiden in dieser Formel enthaltenen Gleichungen sind aber genau die nämlichen, welche (§ 320) zur Bestimmung der Krümmungsradien der beiden Hauptschnitte in einem Flächenpunkte dienten, und die Werte des Verhältnisses von $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, welche dieser Relation genügen, bestimmen die Tangenten der beiden Hauptschnitte. Mithin ist bewiesen:

Die Krümmungslinien, welche durch jeden Punkt einer gegebenen Fläche gehen, berühren in demselben die beiden Hauptnormalschnitte und schneiden sich folglich unter rechtem Winkel.

Die Rückkehrkurve der developpabelen Fläche, welche durch die Normalen der Fläche längs den Punkten einer Krümmungskurve gebildet wird, ist der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Hauptnormalschnitte, welche die Krümmungskurve berühren.

324. Bemerkungen. Es ist wichtig zu bemerken, dass die Krümmungsradien einer Krümmungskurve im allgemeinen nicht gleich sind den Krümmungsradien der berührenden Hauptschnitte. Bezeichnet ϱ den Krümmungsradius einer Krümmungskurve, θ den Winkel, den die Richtung dieses Radius mit der Richtung des Krümmungsradius R des Hauptschnittes bildet, so ist:

$$\varrho = R \cos\theta,$$

wie im § 308 gezeigt wurde. Die Gleichheit zwischen ϱ und R findet also nur dann statt, wenn die Oskulationsebene der Krümmungskurve durch die Normale der Fläche geht.

Wir haben die Differentialgleichung für die Projektionen der Krümmungskurven einer Fläche auf die xy-Ebene erhalten; die Bestimmung der Gleichung dieser Kurven zwischen den Koordinaten allein erfordert im allgemeinen Methoden, welche den Gegenstand der Integralrechnung bilden. Indessen können wir auch hier schon einsehen, dass die Krümmungskurven zwei Systeme von Kurven bilden, welche man *orthogonale* nennt. Diese Linien zerlegen in der That die Fläche in unendlich kleine Vierecke, bei welchen alle vier Winkel rechte sind. Die Kurven, denen zwei gegenüber liegende Seiten eines Vierecks entsprechen, gehören dem einen Systeme von Krümmungskurven an, und die orthogonalen Trajektorien dieser Kurven bilden das andere System. Aber im allgemeinen sind die beiden Krümmungskurven, welche durch den nämlichen Flächenpunkt gehen, nicht *analytisch verschieden:* sie sind vielmehr nur zwei Zweige derselben Kurve, und nur in besonderen Fällen können die beiden Systeme von Krümmungskurven durch verschiedene Gleichungen dargestellt werden.

Jede Kurve, welche auf einer Ebene oder auf einer Kugel gezogen wird, ist als Krümmungskurve dieser Flächen anzusehen. Im ersten Falle bilden die Normalen, welche durch

die Punkte der beliebigen Kurve gelegt werden, eine Cylinderfläche, die abwickelbar ist. Mithin genügt die Kurve der Definition einer Krümmungskurve. Bei der Kugel schneiden sich die Normalen im Mittelpunkte und bilden eine Kegelfläche, welche ebenfalls abwickelbar ist. Übrigens sieht man auch, dass die Gleichung 4) der Krümmungskurven immer bei einer ebenen oder sphärischen Kurve erfüllt ist. Für eine ebene Kurve ist

$$dp = 0, \quad dq = 0,$$

und für eine Kugel

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - a^2 = 0$$

ist:

$$dx + p\,dx + (z - z_0)\,dp = 0 \quad \text{und} \quad dy + q\,dz + (z - z_0)\,dq = 0.$$

Eigenschaften der Krümmungskurven.

325. Bezeichnet man mit α, β, γ die Winkel, welche die Tangente einer auf der Fläche gelegenen Kurve mit den Koordinatenaxen bildet, mit α', β', γ' die Winkel der Normalen, so ist

$$p = -\frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'}, \quad q = -\frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'},$$

ferner

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma}.$$

Die Gleichung der Krümmungskurven

$$\frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz}$$

wird demnach:

$$\frac{\cos\gamma'\,d\cos\alpha' - \cos\alpha'\,d\cos\gamma'}{\cos\alpha\,\cos\gamma' - \cos\alpha'\,\cos\gamma} = \frac{\cos\gamma'\,d\cos\beta' - \cos\beta'\,d\cos\gamma'}{\cos\beta\,\cos\gamma' - \cos\gamma\,\cos\beta'},$$

oder:

$$1)\quad (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')\,d\cos\alpha' + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')\,d\cos\beta' \\ + (\cos\alpha\,\cos\beta' - \cos\beta\,\cos\alpha')\,d\cos\gamma' = 0.$$

Andererseits ist

$$\cos\alpha\,\cos\alpha' + \cos\beta\,\cos\beta' + \cos\gamma\,\cos\gamma' = 0,$$
$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1,$$

und durch Differentiation:

$$\cos\alpha'\,d\cos\alpha' + \cos\beta'\,d\cos\beta' + \cos\gamma'\,d\cos\gamma' = 0.$$

Verbindet man diese letzte Identität mit der Gleichung 1), so erhält man

$$2) \qquad \frac{d\cos\alpha'}{\cos\alpha} = \frac{d\cos\beta'}{\cos\beta} = \frac{d\cos\gamma'}{\cos\gamma}.$$

Damit also eine auf einer Fläche gegebene Kurve Krümmungskurve dieser Fläche sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Tangente der Kurve in jedem Punkte parallel der Geraden ist, welche mit den Koordinatenaxen Winkel bildet, deren Kosinus proportional sind den Differentialen

$$d\cos\alpha', \quad d\cos\beta', \quad d\cos\gamma'.$$

Wir setzen:

$$3) \qquad d\sigma' = \sqrt{(d\cos\alpha')^2 + (d\cos\beta')^2 + (d\cos\gamma')^2}$$

und bestimmen drei Winkel φ', ψ', χ' durch die Gleichungen:

$$4) \quad d\cos\alpha' = d\sigma'\cos\varphi', \quad d\cos\beta' = d\sigma'\cos\psi', \quad d\cos\gamma' = d\sigma'\cos\chi'.$$

Ist die gegebene Kurve eine Krümmungskurve, so werden die Normalen in den verschiedenen Punkten derselben Tangenten einer Kurve Dann ist $d\sigma'$ der Kontingenzwinkel dieser Kurve und φ', ψ', χ' sind die Winkel, welche ihre Hauptnormale mit den Axen bildet. In allen Fällen ist die Richtung, welche durch die Winkel φ', ψ', χ' bestimmt wird, senkrecht zur Flächennormale, also in der Tangentenebene gelegen. Denn die Gleichung

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1,$$

giebt durch Differentiation

$$\cos\alpha'\cos\varphi' + \cos\beta'\cos\psi' + \cos\gamma'\cos\chi' = 0.$$

Sind noch λ', μ', ν' die Winkel, welche eine zur Flächennormale und zu der Richtung (φ', ψ', χ') senkrechte Gerade mit den Axen bildet, so sind die Kosinus der Winkel φ', ψ', χ', welche proportional zu $d\cos\alpha'$, $d\cos\beta'$, $d\cos\gamma'$ sind, auch proportional nach § 273 zu $d\cos\lambda'$, $d\cos\mu'$, $d\cos\nu'$. Setzt man also

$$5) \qquad d\tau' = \sqrt{(d\cos\lambda')^2 + (d\cos\mu')^2 + (d\cos\nu')^2},$$

so ist

$$6) \quad d\cos\lambda' = \cos\varphi'\,d\tau, \quad d\cos\mu' = \cos\psi'\,d\tau, \quad d\cos\nu' = \cos\chi'\,d\tau.$$

Wir bezeichnen nun allgemein mit ω den Winkel zwischen der Tangente der gegebenen Kurve und der Richtung (φ', ψ', χ');

mit θ den Winkel, welchen die Flächennormale mit der Oskulationsebene der Kurve bildet. Ferner seien für diese Kurve, nach unserer früheren Bezeichnung, φ, ψ, χ und λ, μ, ν die Winkel, welche von der Hauptnormalen und der Axe der Oskulationsebene mit den Koordinatenaxen gebildet werden, $d\sigma$ und $d\tau$ die Kontingenzwinkel der ersten und der zweiten Krümmung. Die Geraden, welche mit den Koordinatenaxen die Winkel

$$\begin{matrix} \alpha', & \beta', & \gamma', \\ \varphi', & \psi', & \chi', \\ \lambda', & \mu', & \nu' \end{matrix}$$

bilden, bestimmen ein rechtwinkliges System, und die Kosinus der Winkel, welche mit diesen Geraden von der Tangente, der Hauptnormale und der Axe der Oskulationsebene der gegebenen Kurve gebildet werden, sind bezüglich

$$\begin{matrix} 0, & \cos\omega, & \sin\omega, \\ \cos\theta, & \pm\sin\theta\sin\omega, & \mp\sin\theta\cos\omega, \\ \sin\theta, & \mp\cos\theta\sin\omega, & \pm\cos\theta\cos\omega. \end{matrix}$$

Da man von den unteren Zeichen zu den oberen übergehen kann, indem ω in $\omega + \pi$ verwandelt, d. h. an Stelle der anfänglich für die Tangente der Kurve gewählten Richtung die entgegengesetzte einführt, so behalten wir nur die oberen Zeichen bei; man erhält alsdann die folgenden Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0, \\ \cos\alpha\cos\varphi' + \cos\beta\cos\psi' + \cos\gamma\cos\chi' = \cos\omega, \\ \cos\alpha\cos\lambda' + \cos\beta\cos\mu' + \cos\gamma\cos\nu' = \sin\omega; \end{cases}$$

$$8)\quad \begin{cases} \cos\varphi\cos\alpha' + \cos\psi\cos\beta' + \cos\chi\cos\gamma' = \cos\theta, \\ \cos\varphi\cos\varphi' + \cos\psi\cos\psi' + \cos\chi\cos\chi' = \sin\theta\sin\omega, \\ \cos\varphi\cos\lambda' + \cos\psi\cos\mu' + \cos\chi\cos\nu' = -\sin\theta\cos\omega; \end{cases}$$

$$9)\quad \begin{cases} \cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos\beta' + \cos\nu\cos\gamma' = \sin\theta, \\ \cos\lambda\cos\varphi' + \cos\mu\cos\psi' + \cos\nu\cos\chi' = -\cos\theta\sin\omega, \\ \cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = +\cos\theta\cos\omega. \end{cases}$$

Differentiiert man die erste und dritte der Gleichungen 7), ferner die erste der Gleichungen 8), und benutzt man dabei

die Formeln des § 274, so folgt, indem man alle vorhergehenden Gleichungen berücksichtigt:

$$10)\qquad \cos\omega\, d\sigma' + \cos\theta\, d\sigma = 0,$$

$$11)\qquad d\tau' = d\omega + \sin\theta\, d\sigma,$$

$$12)\qquad d\tau = d\theta + \sin\omega\, d\sigma',$$

und wegen Gleichung 10) ergiebt die Gleichung 12)

$$13)\qquad d\tau = d\theta - \cos\theta \operatorname{tang}\omega\, d\sigma.$$

326. Die letzten vier Gleichungen beziehen sich auf eine beliebige auf der Fläche gelegene Kurve. Die Bedingung für eine Krümmungskurve ist $\sin\omega = 0$; diese Bedingung wird also nach Gleichung 13)

$$d\tau = d\theta,$$

und dies ergiebt den bemerkenswerten Satz von Lancret:

Satz I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine auf einer Fläche gelegene Kurve Krümmungskurve der Fläche ist, besteht darin, dass das Differential des Torsionswinkels der Kurve gleich dem Differentiale des Winkels ist, den die Oskulationsebene mit der Flächennormalen bildet.*

Ist insbesondere $d\tau = 0$, so folgt, dass $d\theta = 0$, also $\theta =$ Konst. ist, und umgekehrt. Man hat demnach den

Folgesatz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine ebene auf der Fläche verlaufende Kurve Krümmungskurve ist, besteht darin, dass die Ebene der Kurve die Fläche überall unter gleichem Winkel schneidet.*

Ist die gegebene Kurve eine ebene Krümmungskurve der Fläche, so hat man $\sin\omega = 0$, $d\omega = 0$ und $d\theta = 0$. Folglich ergeben die Gleichungen 10) und 11) durch Division:

$$\frac{d\tau'}{d\sigma'} = -\operatorname{tang}\theta = \text{Konst.}$$

und man erhält den

Satz II. *Wenn die Krümmungskurve einer Fläche eben ist, so bilden die Flächennormalen in den Punkten dieser Kurve eine developpabele Fläche, deren Rückkehrkurve die Eigenschaft hat, dass ihre beiden Krümmungen ein konstantes Verhältnis haben. Diese Rückkehrkurve ist folglich eine Schraubenlinie auf einer allgemeinen Cylinderfläche* (§ 301).

327. Wir betrachten jetzt eine Kurve, welche den Schnitt zweier Flächen bildet. Nach der Gleichung 13) in § 325 ist:

$$d\tau = d\theta - \cos\theta \operatorname{tang}\omega\, d\sigma,$$
$$d\tau = d\theta_1 - \cos\theta_1 \operatorname{tang}\omega_1\, d\sigma,$$

wenn man mit θ_1 und ω_1 die Grössen auf der zweiten Fläche bezeichnet; hieraus folgt:

$$d(\theta - \theta_1) = (\cos\theta_1 \operatorname{tang}\omega_1 - \cos\theta \operatorname{tang}\omega)\, d\sigma.$$

Die Winkel θ und θ_1 liegen in der nämlichen Ebene und werden in demselben Sinne gerechnet, nämlich von der Hauptnormale der gegebenen Kurve an. Mithin drückt die Differenz $\theta_1 - \theta$ den Winkel aus, den die beiden Flächen mit einander bilden. Andererseits ist

$$\sin\omega = 0 \quad \text{oder} \quad \sin\omega_1 = 0$$

die Bedingung dafür, dass die betrachtete Kurve eine Krümmungskurve der ersten oder der zweiten Fläche ist. Man hat demnach den

Satz III. *Wenn die Schnittkurve zweier Flächen Krümmungskurve für jede der beiden Flächen ist, so müssen sich die Flächen überall unter gleichem Winkel schneiden.* Und umgekehrt: *Wenn zwei Flächen sich überall unter gleichem Winkel schneiden, und die Schnittlinie ist eine Krümmungskurve der einen Fläche, so ist sie auch Krümmungskurve der andern Fläche.*

Da eine ebene oder sphärische Kurve stets Krümmungskurve der Ebene oder der Kugel ist, auf welcher sie liegt, so erhält man den Folgesatz, welcher denjenigen des Satzes I (§ 326) umfasst.

Folgesatz. *Damit eine auf einer Fläche gelegene ebene oder sphärische Kurve Krümmungskurve der Fläche ist, ist notwendig und hinreichend, dass die Ebene oder die Kugel, welche die Kurve enthält, die Fläche überall unter gleichem Winkel schneidet.*

Die Tangentenebenen einer developpabelen Fläche bilden überall mit der Fläche den Winkel null, und enthalten die geradlinige Erzeugende. Mithin besteht der

Folgesatz. *Die Erzeugenden einer developpabelen Fläche sind Krümmungskurven derselben.*

328. Man kann den Satz III auch leicht beweisen, ohne auf die Gleichungen im § 325 zurückzugehen. Betrachtet man zwei Flächen, für welche bezüglich

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dz = p_1\,dx + q_1\,dy$$

ist, so gelten diese beiden Gleichungen zugleich für die Schnittkurve der Flächen; es ist also

$$\frac{dx}{q - q_1} = \frac{dy}{p_1 - p} = \frac{dz}{q p_1 - q_1 p}.$$

Bezeichnen wir mit dt jeden dieser drei gleichen Quotienten, und setzen wir

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = P, \quad \frac{dy + q\,dz}{dq} = Q,$$

$$\frac{dx + p_1\,dz}{dp_1} = P_1, \quad \frac{dy + q_1\,dz}{dq_1} = Q_1,$$

so ist:

$$P\frac{dp}{dt} = \frac{dx + p\,dz}{dt} = (q - q_1) + p\,(q p_1 - q_1 p) = q\,(1 + p p_1 + q q_1) - q_1\,(1 + p^2 + q^2)$$

$$Q\frac{dq}{dt} = \frac{dy + q\,dz}{dt} = (p_1 - p) + q\,(q p_1 - q_1 p) = p_1\,(1 + p^2 + q^2) - p\,(1 + p p_1 + q q_1)$$

Setzt man also:

$$V = \frac{1 + p p_1 + q q_1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}},$$

so ist

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{Q\,dq}{dt\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}\,(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = -\frac{P\,dp}{dt\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}\,(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial p}\,dp + \frac{\partial V}{\partial q}\,dq = (Q - P)\frac{dp\,dq}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}\,(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}\,dt},$$

und ebenso:

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial V}{\partial q_1} dq_1 = (Q_1 - P_1) \frac{dp_1\, dq_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}\,(1+p_1^2+q_1^2)^{\frac{3}{2}}\, dt},$$

also durch Addition:

$$dV = \frac{\frac{Q-P}{1+p^2+q^2} dp\, dq + \frac{Q_1 - P_1}{1+p_1^2+q_1^2} dp_1\, dq_1}{dt\sqrt{1+p^2+q^2}\ \sqrt{1+p_1^2+q_1^2}}.$$

Aus dieser Formel erkennt man, dass wenn zwei der Grössen

$$dV, \quad Q-P, \quad Q_1 - P_1$$

null sind, die dritte ebenfalls null wird, womit der zu beweisende Satz ausgesprochen ist.

Über die Fläche, deren Punkte sämtlich Nabelpunkte sind.

329. Bezeichnet man mit X, Y, Z die Kosinus der Winkel, welche die Normale einer Fläche mit den Koordinatenaxen bildet, so ist

$$X = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

also:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{pqs - (1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{pqt - (1+q^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{pqr - (1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{pqs - (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Gleichungen

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2},$$

welche die Nabelpunkte einer Fläche bestimmen, sind also äquivalent mit den folgenden:

$$1) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y},$$

die sich auf zwei verschiedene reduzieren.

Mit Hilfe dieser Gleichungen ist es leicht, zu beweisen, dass die Kugel die einzige Fläche ist, bei welcher jeder Punkt ein Nabelpunkt ist. Denn für solch eine Fläche müssen diese Gleichungen in jedem Punkte gelten. Die ersten beiden drücken aus, dass X unabhängig von y, und Y unabhängig von x ist; also dass X nur von x allein, Y nur von y allein abhängt. Da aber die beiden Ableitungen $\frac{\partial X}{\partial x}$ und $\frac{\partial Y}{\partial y}$ einander gleich sind, so muss ihr Wert notwendig eine Konstante sein; bezeichnen wir dieselbe mit $\frac{1}{a}$, so ist

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{a},$$

folglich haben X und Y die Werte

$$X = \frac{x - x_0}{a}, \quad Y = \frac{y - y_0}{a},$$

wobei x_0 und y_0 Konstante sind. Der Kosinus Z wird alsdann

$$Z = \frac{\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}{a}.$$

Da nun die Werte von p und q gleich $-\frac{X}{Z}$ und $\frac{Y}{Z}$ sind, so ergiebt die Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$

$$2) \qquad dz = -\frac{(x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy}{\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist das totale Differential von $\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$; bezeichnet man also mit z_0 eine neue Konstante, so hat man

$$z - z_0 = \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$$

oder

$$3) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2,$$

was die allgemeine Gleichung einer Kugel ist. Der besondere Wert $\frac{1}{a} = 0$ liefert bei der Integration die Gleichung einer Ebene.

Dreifache Systeme von orthogonalen Flächen.

330. Es seien x, y, z rechtwinklige Koordinaten, λ, μ, ν drei variabele Parameter, f_1, f_2, f_3 gegebene Funktionen. Jede der Gleichungen

$$1)\quad \lambda = f_1(x, y, z), \quad \mu = f_2(x, y, z), \quad \nu = f_3(x, y, z)$$

stellt dann ein System von Flächen dar, und diese drei bilden ein *dreifaches Flächensystem.* Denkt man sich die drei Gleichungen nach x, y, z aufgelöst, derart, dass

$$2)\quad x = F_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = F_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = F_3(\lambda, \mu, \nu),$$

so sind die verschiedenen Punkte des Raumes durch die drei Variabelen λ, μ, ν dargestellt, die man dann allgemein als die *krummlinigen Koordinaten* eines Punktes bezeichnet.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, dass jede Fläche eines jeden Systemes von allen Flächen der anderen beiden Systeme überall rechtwinklig geschnitten wird. Das dreifache System heisst dann ein *orthogonales.*

Wir setzen:

$$3)\quad \begin{cases} L^2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2, \\ M^2 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)^2, \\ N^2 = \left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial z}\right)^2. \end{cases}$$

Die Normalen der drei Flächen in einem Punkte (x, y, z) bilden mit den Koordinatenaxen Winkel, deren Kosinus bezüglich sind:

$$\begin{matrix} \frac{1}{L}\frac{\partial \lambda}{\partial x}, & \frac{1}{L}\frac{\partial \lambda}{\partial y}, & \frac{1}{L}\frac{\partial \lambda}{\partial z}, \\ \frac{1}{M}\frac{\partial \mu}{\partial x}, & \frac{1}{M}\frac{\partial \mu}{\partial y}, & \frac{1}{M}\frac{\partial \mu}{\partial z}, \\ \frac{1}{N}\frac{\partial \nu}{\partial x}, & \frac{1}{N}\frac{\partial \nu}{\partial y}, & \frac{1}{N}\frac{\partial \nu}{\partial z}, \end{matrix}$$

folglich sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass das System orthogonal ist:

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dfrac{\partial\mu}{\partial x}+\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial\mu}{\partial y}+\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\dfrac{\partial\mu}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial x}\dfrac{\partial\nu}{\partial x}+\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\dfrac{\partial\nu}{\partial y}+\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\dfrac{\partial\nu}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial\nu}{\partial x}\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}+\dfrac{\partial\nu}{\partial y}\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}+\dfrac{\partial\nu}{\partial z}\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}=0. \end{cases}$$

331. Man kann zwei der Funktionen λ, μ, ν zwischen den Gleichungen 4) und den aus diesen durch Differentiation abgeleiteten eliminieren; das Resultat dieser Elimination ist eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für eine dieser Funktionen. Dieses wichtige Theorem, welches von Ossian Bonnet aufgestellt ist, ist folgendermassen zu beweisen.

Die beiden letzten der Gleichungen 4) ergeben:

$$5)\quad \begin{cases} K\dfrac{\partial\nu}{\partial x}=\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial\mu}{\partial z}-\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\dfrac{\partial\mu}{\partial y}, \\ K\dfrac{\partial\nu}{\partial y}=\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\dfrac{\partial\mu}{\partial x}-\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dfrac{\partial\mu}{\partial z}, \\ K\dfrac{\partial\nu}{\partial z}=\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dfrac{\partial\mu}{\partial y}-\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial\mu}{\partial x}, \end{cases}$$

wobei K den Wert $\dfrac{LM}{N}$ hat. Ferner ist ersichtlich, dass die Summe null erhalten wird, wenn man die drei Grössen:

$$\frac{\partial\left(K\dfrac{\partial\nu}{\partial y}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(K\dfrac{\partial\nu}{\partial z}\right)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\left(K\dfrac{\partial\nu}{\partial z}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(K\dfrac{\partial\nu}{\partial x}\right)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\left(K\dfrac{\partial\nu}{\partial x}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(K\dfrac{\partial\nu}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

addiert, nachdem man sie zuvor bezüglich mit $\dfrac{\partial\nu}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\nu}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\nu}{\partial z}$ multipliziert hat. Gemäss den Gleichungen 5) ist also:

$$\frac{\partial \nu}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial \mu}{\partial x}-\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \mu}{\partial y}-\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial \nu}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \mu}{\partial y}-\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial \mu}{\partial z}-\frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial \nu}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial \mu}{\partial z}-\frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial \mu}{\partial x}-\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)\right]=0.$$

Führt man die Differentiationen aus und addiert man zu der erhaltenen Gleichung die beiden letzten der Gleichungen 4), nachdem man dieselben bezüglich mit

$$+\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2}\right) \quad \text{und} \quad -\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2}\right)$$

multipliziert hat, so folgt:

$$6)\quad \begin{cases} \frac{\partial \nu}{\partial x}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}+\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial y}+\frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial z}-\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}-\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\partial y}-\frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\partial z}\right] \\ +\frac{\partial \nu}{\partial y}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial y}+\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}+\frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial^2 \mu}{\partial y\partial z}-\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\partial y}-\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2}-\frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y\partial z}\right] \\ +\frac{\partial \nu}{\partial z}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial z}+\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial^2 \mu}{\partial y\partial z}+\frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2}-\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\partial z}-\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y\partial z}-\frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}\right]=0. \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung kann man die Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion μ entfernen. Zu dem Zwecke differentiiert man die erste der Gleichungen 4) nach jeder Variabelen x, y, z, so wird:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}+\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial y}+\frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial z}=-\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}-\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\partial y}-\frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\partial z},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial y}+\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}+\frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial^2 \mu}{\partial y\partial z}=-\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\partial y}-\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2}-\frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y\partial z},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial z}+\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial^2 \mu}{\partial y\partial z}+\frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2}=-\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\partial z}-\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y\partial z}-\frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}.$$

Vermittelst dieser Gleichungen und der Gleichungen 5), welche die Ableitungen von ν eliminieren lassen, wird die Gleichung 6):

$$7)\quad\begin{cases}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z}\right),\\ \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}\right),\\ \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right)=0,\end{cases}$$

oder:

$$8)\quad A\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+B\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2+C\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2+A'\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z}+B'\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x}+C'\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}=0,$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$9)\quad\begin{cases}A=\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z},\\ B=\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial x},\\ C=\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial y},\\ A'=\frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z}\right),\\ B'=\frac{\partial\lambda}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial x}\right),\\ C'=\frac{\partial\lambda}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial y}\right).\end{cases}$$

Demnach haben wir zwei Gleichungen, welche die Funktion ν nicht mehr enthalten, sondern nur die ersten und zweiten Ableitungen von λ, und die ersten Ableitungen von μ, nämlich die erste der Gleichungen 4) und die Gleichung 8). Diese beiden Gleichungen sind homogen in Bezug auf die Ableitungen $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$, $\frac{\partial\mu}{\partial z}$; man kann daher die Verhältnisse von zweien derselben zur dritten bestimmen, derart, dass

$$\frac{\frac{\partial\mu}{\partial x}}{\mathfrak{A}}=\frac{\frac{\partial\mu}{\partial y}}{\mathfrak{B}}=\frac{\frac{\partial\mu}{\partial z}}{\mathfrak{C}},$$

wird, und hierbei sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bekannte Funktionen der ersten und zweiten Ableitungen der Funktion λ. Man hat demnach

$$10)\qquad H\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mathfrak{A},\quad H\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mathfrak{B},\quad H\frac{\partial\mu}{\partial z}=\mathfrak{C}.$$

Die Elimination von μ lässt sich nun auf demselben Wege, wie vorhin die Elimination von ν vollziehen. Addiert man die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial\left(H\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(H\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\left(H\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(H\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\left(H\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(H\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)}{\partial x},$$

nachdem man sie bezüglich mit $\frac{\partial\mu}{\partial x}, \frac{\partial\mu}{\partial y}, \frac{\partial\mu}{\partial z}$ multipliziert hat, so erhält man eine identisch verschwindende Summe, und folglich hat man, vermittelst der Gleichungen 10):

$$11)\quad \mathfrak{A}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial y}\right)+\mathfrak{B}\left(\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y}\right)+\mathfrak{C}\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}\right)=0.$$

Diese Gleichung enthält nur die Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung der Funktion λ, und folglich gilt der Satz:

Soll die Gleichung $\lambda=f(x, y, z)$ *ein Flächensystem darstellen, welches einem dreifach orthogonalen Systeme angehört, so muss die Funktion* λ *einer bestimmten partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung genügen.*

332. Wählt man zu unabhängigen Variabelen die Parameter λ, μ, ν eines dreifach orthogonalen Systems, so lassen sich die partiellen Ableitungen von x, y, z in Bezug auf λ, μ, ν sehr leicht durch die partiellen Ableitungen von λ, μ, ν in Bezug auf x, y, z ausdrücken. Ersetzt man nämlich in der Gleichung

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial x}{\partial \nu} d\nu$$

$d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ durch ihre Werte

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y} dy + \frac{\partial \lambda}{\partial z} dz,$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

so folgt, indem man beiderseits die Koeffizienten von dx, dy, dz einander gleich setzt:

$$1 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial y},$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial z}.$$

Addiert man diese Gleichungen, nachdem man sie bezüglich mit $\frac{\partial \lambda}{\partial x}, \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \frac{\partial \lambda}{\partial z}$, ferner mit $\frac{\partial \mu}{\partial x}, \frac{\partial \mu}{\partial y}, \frac{\partial \mu}{\partial z}$, und endlich mit $\frac{\partial \nu}{\partial x}, \frac{\partial \nu}{\partial y}, \frac{\partial \nu}{\partial z}$ multipliziert hat, so folgt mit Benutzung der Gleichungen 3) und 4)

$$12)\quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = L^2 \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = M^2 \frac{\partial x}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial x} = N^2 \frac{\partial x}{\partial \nu}.$$

Auf dieselbe Weise findet man:

$$13)\quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = L^2 \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = M^2 \frac{\partial y}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial y} = N^2 \frac{\partial y}{\partial \nu},$$

$$14)\quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = L^2 \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial z} = M^2 \frac{\partial z}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial z} = N^2 \frac{\partial z}{\partial \nu}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt in Verbindung mit den Gleichungen 3) und 4):

$$15)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{L^2} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2, \\ \dfrac{1}{M^2} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2, \\ \dfrac{1}{N^2} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2; \end{cases}$$

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x}{\partial \mu}+\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}\dfrac{\partial y}{\partial \mu}+\dfrac{\partial z}{\partial \lambda}\dfrac{\partial z}{\partial \mu}=0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \mu}\dfrac{\partial x}{\partial \nu}+\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\dfrac{\partial y}{\partial \nu}+\dfrac{\partial z}{\partial \mu}\dfrac{\partial z}{\partial \nu}=0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \nu}\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}+\dfrac{\partial y}{\partial \nu}\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}+\dfrac{\partial z}{\partial \nu}\dfrac{\partial z}{\partial \lambda}=0. \end{cases}$$

333. Die Gleichungen 15) und 16) enthalten einfach die Relationen, welche zwischen den Kosinus der Winkel bestehen, die drei rechtwinklige Richtungen mit den Koordinatenaxen bilden; durch Differentiation kann man aus ihnen eine grosse Zahl anderer Relationen ableiten, die ebenfalls Eigenschaften orthogonaler Systeme ausdrücken. Diese Untersuchung bietet keinerlei Schwierigkeiten und führt zu wichtigen Resultaten. Um aber die Grenzen, welche ich mir gesteckt habe, nicht zu überschreiten, beschränke ich mich darauf, hier nur die Formeln anzugeben, welche die Ableitungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \nu}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \mu \partial \nu} \cdots$$

in Funktion der Ableitungen erster Ordnung der Variabelen x, y, z und der Grössen L, M, N liefern.

Zu dem Zwecke differentiieren wir die erste der Gleichungen 15) nach μ und die zweite nach λ, so wird

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}+\frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu}+\frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \mu}=-\frac{1}{L^2}\frac{\partial \log L}{\partial \mu},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}+\frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu}+\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \mu}=-\frac{1}{M^2}\frac{\partial \log M}{\partial \lambda}.$$

Differentiiert man ferner die Gleichungen 16) nach ν, λ, μ bezüglich, addiert die beiden letzten der so erhaltenen Gleichungen und subtrahiert davon die erste, so folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}+\frac{\partial y}{\partial \nu}\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu}+\frac{\partial z}{\partial \nu}\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \mu}=0.$$

Wenn man nun die drei vorigen Gleichungen addiert, nachdem man sie zuvor bezüglich mit $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial x}{\partial \mu}$, $\frac{\partial x}{\partial \nu}$, ferner

mit $\frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \mu}, \frac{\partial y}{\partial \nu}$, endlich mit $\frac{\partial z}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \mu}, \frac{\partial z}{\partial \nu}$ multipliziert hat, so wird, mit Rücksicht auf die Gleichungen 15) und 16):

$$17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \mu} &= -\frac{\partial \log L}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial \log M}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \, \partial \mu} &= -\frac{\partial \log L}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial \log M}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \, \partial \mu} &= -\frac{\partial \log L}{\partial \mu} \frac{\partial z}{\partial \lambda} - \frac{\partial \log M}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial \mu}. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen ergeben durch Änderung der Buchstaben auch die Werte der sechs übrigen Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \mu \, \partial \nu}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \mu \, \partial \nu}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \mu \, \partial \nu},$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \nu \, \partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \nu \, \partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \nu \, \partial \lambda}.$$

Der Dupinsche Satz für orthogonale Flächen.

334. Man verdankt Ch. Dupin den schönen Satz:

In jedem dreifach orthogonalen Systeme wird jede Fläche des einen Systems von den Flächen der beiden anderen Systeme in ihren Krümmungskurven geschnitten.

Der Beweis dieses Satzes ist in den letzten Gleichungen des vorigen Paragraphen enthalten. Denn diese Gleichungen können durch die eine Formel ausgedrückt werden:

$$\frac{\frac{\partial \left(L \frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)}{\partial \mu}}{\frac{\partial x}{\partial \mu}} = \frac{\frac{\partial \left(L \frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)}{\partial \mu}}{\frac{\partial y}{\partial \mu}} = \frac{\frac{\partial \left(L \frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)}{\partial \mu}}{\frac{\partial z}{\partial \mu}} = -\frac{L}{M} \frac{\partial M}{\partial \lambda}.$$

Betrachten wir nun den Schnitt C zweier Flächen, welche den Systemen

$$\lambda = \text{const}, \quad \nu = \text{const}$$

bezüglich angehören, so sind die Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial \mu}, \frac{\partial y}{\partial \mu}, \frac{\partial z}{\partial \mu}$ proportional den Kosinus der Winkel, welche die Tangente der Kurve C mit den Axen bildet. Andererseits sind die Grössen $\frac{1}{L}\frac{\partial \lambda}{\partial x}, \frac{1}{L}\frac{\partial \lambda}{\partial y}, \frac{1}{L}\frac{\partial \lambda}{\partial z}$ oder $L\frac{\partial x}{\partial \lambda}, L\frac{\partial y}{\partial \lambda}, L\frac{\partial z}{\partial \lambda}$ die Kosinus der Winkel, welche die Normale der Fläche λ mit den Koordinatenaxen bildet, und ihre Differentiale

$$\frac{\partial\left(L\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)}{\partial \mu} d\mu, \quad \frac{\partial\left(L\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)}{\partial \mu} d\mu, \quad \frac{\partial\left(L\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)}{\partial \mu} d\mu,$$

in Bezug auf eine Verschiebung längs der Kurve C sind nach der obigen Formel den Kosinus der Winkel, welche zur Tangente dieser Kurve gehören, proportional. Dies ist aber (nach § 325) die Bedingung dafür, dass C eine Krümmungskurve der Fläche λ ist; und der Dupinsche Satz ist also bewiesen.

Das dreifach orthogonale System zweiter Ordnung.

335. Unter den dreifach orthogonalen Flächensystemen ist vor allem dasjenige bemerkenswert, welches von konfokalen Flächen zweiter Ordnung gebildet wird. Die Gleichungen dieser Flächen sind:

$$1)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\lambda^2} + \dfrac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1, \\[2ex] \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1, \\[2ex] \dfrac{x^2}{\nu^2} - \dfrac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1, \end{cases}$$

b und c sind gegebene Grössen; wir nehmen $b < c$ an.

Giebt man dem Parameter λ^2 Werte grösser als c^2, dem Parameter μ^2 Werte zwischen b^2 und c^2, endlich dem Parameter ν^2 Werte kleiner als b^2, so stellt die erste Gleichung Ellipsoide, die zweite einschalige Hyperboloide, die dritte zweischalige Hyperboloide dar. Alle diese Flächen sind kon-

zentrisch und ihre Hauptschnitte haben dieselben Brennpunkte; man nennt sie daher konfokal.

Da die Gleichungen 1) vom ersten Grade in Bezug auf x^2, y^2, z^2 sind, so ist es leicht, dieselben aufzulösen. Man gelangt dazu am raschesten auf folgendem Wege. Ordnet man die erste Gleichung nach Potenzen von λ^2, so wird

$$2)\quad \lambda^6 - \lambda^4 (b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2) + \lambda^2 [b^2 c^2 + (b^2 + c^2) x^2 + c^2 y^2 + b^2 z^2] - b^2 c^2 x^2 = 0.$$

Da die beiden folgenden Gleichungen sich aus der ersten ableiten lassen, indem man λ^2 mit μ^2 oder mit ν^2 vertauscht, so besitzt die Gleichung 2), welche vom dritten Grade in Bezug auf λ^2 ist, die drei Wurzeln λ^2, μ^2, ν^2; folglich ist

$$3)\quad \begin{cases} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2, \\ \lambda^2 \mu^2 + \mu^2 \nu^2 + \nu^2 \lambda^2 = b^2 c^2 + (b^2 + c^2) x^2 + c^2 y^2 + b^2 z^2, \\ \lambda^2 \mu^2 \nu^2 = b^2 c^2 x^2. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung giebt den Wert von x^2. Die Gleichungen 1) ändern sich aber nicht, wenn man die Buchstaben x und y vertauscht, und gleichzeitig λ^2, μ^2, ν^2 durch $\lambda^2 - b^2$, $\mu^2 - b^2, \nu^2 - b^2$, ferner b^2 und c^2 durch $-b^2$ und $c^2 - b^2$ ersetzt; die nämlichen Gleichungen ändern sich auch nicht, wenn man x^2 und z^2 vertauscht und dabei λ^2, μ^2, ν^2 durch $\lambda^2 - c^2$, $\mu^2 - c^2$, $\nu^2 - c^2$ und b^2 und c^2 durch $-(c^2 - b^2)$ und $-c^2$ ersetzt. Man kann also auch die nämlichen Vertauschungen in den Gleichungen 3) vollziehen, und die letzte derselben ergiebt dann:

$$4)\quad \begin{cases} (\lambda^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2) = b^2 (c^2 - b^2)\, y^2, \\ (\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2) = c^2 (c^2 - b^2)\, z^2. \end{cases}$$

Man erhält demnach:

$$5)\quad \begin{cases} x = \pm \dfrac{\lambda \mu \nu}{bc}, \\[2ex] y = \dfrac{\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \\[2ex] z = \dfrac{\sqrt{\lambda^2 - c^2}\,\sqrt{c^2 - \mu^2}\,\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}. \end{cases}$$

Die Grössen ν, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$ und $\sqrt{c^2 - \mu^2}$ gehen auch durch den Wert null hindurch; man kann daher annehmen, dass sie ihr Zeichen wechseln, und dies ist notwendig, damit die Gleichungen alle Punkte des Raumes enthalten. Die Schwierigkeit, welche aus der Zweideutigkeit der Vorzeichen hervorgehen kann, lässt sich vermeiden, wenn man zwei Winkel ψ und φ einführt, derart, dass

$$\nu = b \cos\psi, \quad \sqrt{b^2 - \nu^2} = b \sin\psi,$$

$$\sqrt{\mu^2 - b^2} = \sqrt{c^2 - b^2}\cos\varphi, \quad \sqrt{c^2 - \mu^2} = \sqrt{c^2 - b^2}\sin\varphi.$$

Aus den Gleichungen 5) folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{\lambda\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - b^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{\lambda\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - c^2}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{\lambda\nu}{bc}, \quad \frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{\mu\sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \mu} = -\frac{\mu\sqrt{\lambda^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \nu} = \frac{\lambda\mu}{bc}, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} = -\frac{\nu\sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} = -\frac{\nu\sqrt{\lambda^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}},$$

und man bestätigt unmittelbar durch diese Gleichungen, dass das konfokale System in der That ein dreifach orthogonales ist.

336. Die Gleichungen 1) stellen auch dann noch ein dreifach orthogonales System dar, wenn man x, y, z, λ ersetzt durch $\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}, \frac{\lambda}{\varepsilon}$, wobei ε eine Konstante ist. Wenn man nach dieser Substitution $\varepsilon = 0$ macht, so werden die Gleichungen 1)

$$6) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, \\ \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2} - \dfrac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 0. \end{cases}$$

Dieses neue System wird gebildet von einem Systeme konzentrischer Kugeln und zwei Systemen von Kegeln zweiter Ordnung, deren Scheitel im Mittelpunkte der Kugeln liegen.

Macht man in den Gleichungen 5) die nämliche Substitution, so folgt:

$$7)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\lambda\mu\nu}{bc}, \\[2ex] y = \dfrac{\lambda\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \\[2ex] z = \dfrac{\lambda\sqrt{c^2 - \mu^2}\,\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}. \end{cases}$$

337. Ersetzt man in der ersten Gleichung 1) x durch $x - b$, wodurch der Koordinatenanfangspunkt in einen der gemeinsamen Brennpunkte aller Hauptschnitte in der xy-Ebene verlegt wird, und schreibt zugleich $c + b$ an Stelle von c, $\lambda + b$ an Stelle von λ, so wird diese Gleichung:

$$\frac{(x+\lambda)^2}{b\left(1+\dfrac{\lambda}{b}\right)^2} - \frac{2(x+\lambda)}{1+\dfrac{\lambda}{b}} + \frac{y^2}{2\lambda + \dfrac{\lambda^2}{b}} + \frac{z^2}{2(\lambda - c) + \dfrac{\lambda^2 - c^2}{b}} = 0.$$

Lässt man nun b unendlich werden, so reduziert sich die Gleichung auf die folgende:

$$\frac{y^2}{4\lambda} + \frac{z^2}{4(\lambda - c)} = x + \lambda.$$

Verfährt man ebenso mit den anderen beiden Gleichungen 1), so erhält man Grenzgleichungen, die sich aus der letzten durch Vertauschung von λ mit μ und ν ableiten lassen. So gewinnt man ein neues dreifach orthogonales und konfokales System, nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{4\lambda} + \frac{z^2}{4(\lambda - c)} &= x + \lambda, \\ \frac{y^2}{4\mu} - \frac{z^2}{4(c - \mu)} &= x + \mu, \\ \frac{-y^2}{-4\nu} - \frac{z^2}{-4(\nu - c)} &= x + \nu. \end{aligned}$$

Ist die Konstante c positiv, so stellt die erste Gleichung, wenn man λ die Werte von c bis $+\infty$ beilegt, elliptische

Paraboloide dar; giebt man μ die Werte von 0 bis c, so liefert die zweite Gleichung hyperbolische Paraboloide, und endlich giebt die dritte Gleichung ein neues System von elliptischen Paraboloiden, wenn man der Grösse ν irgend welche negative Werte erteilt. Die beiden letzten Gleichungen gehen aus der ersten durch Vertauschung von λ mit μ und ν hervor; ordnet man diese nach λ, so kommt

$$\lambda^3 - (c - x)\lambda^2 - \left(\frac{y^2 + z^2}{4} + cx\right)\lambda + \frac{cy^2}{4} = 0.$$

Man hat demnach

$$\lambda + \mu + \nu = c - x,$$

$$\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda = -\left(\frac{y^2 + z^2}{4} + cx\right),$$

$$\lambda\mu\nu = -\frac{cy^2}{4},$$

und hieraus:

$$9)\quad \begin{cases} x = c - \lambda - \mu - \nu, \\ y = 2\sqrt{\dfrac{-\lambda\mu\nu}{c}}, \\ z = 2\sqrt{\dfrac{(\lambda - c)(c - \mu)(c - \nu)}{c}}. \end{cases}$$

Auch kann man leicht mittels dieser Formeln bestätigen, dass das System in der That orthogonal ist.

Die Krümmungskurven des Ellipsoides.

338. Das Ellipsoid sei dargestellt durch die Gleichung

$$1)\quad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

und seine Halbaxen haben die bestimmten Werte λ, $\sqrt{\lambda^2 - b^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - c^2}$. Nach dem Dupinschen Satze kennen wir die Krümmungskurven desselben. Denn ist μ^2 ein variabeler Parameter zwischen b^2 und c^2, so bestimmen die einschaligen Hyperboloide, deren Wert

2) $$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1$$

ist, auf dem Ellipsoide ein erstes System von Krümmungskurven; desgleichen sind die Krümmungskurven des anderen Systemes die Durchschnitte des Ellipsoides mit den zweischaligen Hyperboloiden:

3) $$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

wenn ν^2 ein variabeler Parameter kleiner als b^2 ist.

Man erhält die Gleichungen für die Projektionen der Krümmungskurven auf die Hauptebenen der Fläche, wenn man nach einander z^2, y^2, x^2 zwischen den Gleichungen 1) und jeder der Gleichungen 2) oder 3) eliminiert. Auf diese Weise findet man für das erste System:

4) $$\begin{cases} \dfrac{c^2 x^2}{\lambda^2 \mu^2} + \dfrac{(c^2 - b^2)\, y^2}{(\lambda^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)} = 1, \\[2ex] \dfrac{b^2 x^2}{\lambda^2 \mu^2} + \dfrac{(c^2 - b^2)\, z^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} = 1, \\[2ex] \dfrac{-\, b^2 y^2}{(\lambda^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)} + \dfrac{c^2 z^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} = 1, \end{cases}$$

und für das zweite:

5) $$\begin{cases} \dfrac{c^2 x^2}{\lambda^2 \nu^2} - \dfrac{(c^2 - b^2)\, y^2}{(\lambda^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)} = 1, \\[2ex] \dfrac{b^2 x^2}{\lambda^2 \nu^2} + \dfrac{(c^2 - b^2)\, z^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \nu^2)} = 1, \\[2ex] \dfrac{b^2 y^2}{(\lambda^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)} + \dfrac{c^2 z^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \nu^2)} = 1; \end{cases}$$

λ^2 bedeutet hierbei stets einen festen Wert; μ und ν sind Variabelen.

Die Krümmungskurven beider Systeme projizieren sich also auf die xz-Ebene, welche die Ebene der grössten und der kleinsten Axe ist, als Ellipsen. In der Ebene xy sowohl, wie in der Ebene yz, welche beide die mittlere Axe des Ellipsoides enthalten, projizieren sich dagegen die Kurven des einen Systems als Ellipsen, die des anderen als Hyperbeln.

339. Monge hat eine äusserst einfache Konstruktion angegeben, um die Projektionen der Krümmungskurven des Ellipsoides in den Hauptebenen darzustellen. Betrachten wir z. B. die Projektionen auf die xy-Ebene, welche die Ebene der grössten und der mittleren Axe ist. Werden die Längen der Halbaxen einer Ellipse, welche die Projektion einer Krümmungskurve des ersten Systems bildet, mit x_1 und y_1 bezeichnet, so ist nach den Gleichungen 4)

$$\frac{c^2 x_1^2}{\lambda^2} = \mu^2, \quad \frac{(c^2 - b^2)\, y_1^2}{\lambda^2 - b^2} = \mu^2 - b^2,$$

also folgt durch Elimination von μ:

$$\text{6)} \qquad \frac{c^2 x_1^2}{b^2 \lambda^2} - \frac{(c^2 - b^2)\, y_1^2}{b^2 (\lambda^2 - b^2)} = 1.$$

Bezeichnen x_1 und y_1 die Halbaxen der Hyperbel, nach welcher sich eine Krümmungskurve des zweiten Systems projiziert, so hat man ebenso nach den Gleichungen 5):

$$\frac{c^2 x_1^2}{\lambda^2} = \nu^2, \quad \frac{(c^2 - b^2)\, y_1^2}{\lambda^2 - b^2} = b^2 - \nu^2,$$

also

$$\text{7)} \qquad \frac{c^2 x_1^2}{b^2 \lambda^2} + \frac{(c^2 - b^2)\, y_1^2}{b^2 (\lambda^2 - b^2)} = 1.$$

Betrachten wir x_1 und y_1 als Koordinaten, so stellen die letzten beiden Gleichungen eine Hyperbel und eine Ellipse dar, die den nämlichen Mittelpunkt haben wie das Ellipsoid, und deren Axen mit den Axen der Projektionen der Krümmungskurven zusammenfallen. Monge hat diese Kurven die Hülfshyperbel und -Ellipse genannt (hyperbole et ellipse auxiliaire). Hat man dieselben konstruiert, und wählt man die Koordinaten eines jeden Punktes der ersten Kurve zu Halbaxen einer Reihe von Ellipsen, die Koordinaten eines jeden Punktes der zweiten zu Halbaxen einer Reihe von Hyperbeln, so hat man die Projektionen der beiden Systeme von Krümmungskurven in der xy-Ebene.

Macht man $y_1 = 0$, so ergeben die beiden Gleichungen 6) und 7):

$$x_1 = \pm \frac{b\lambda}{c}.$$

Diese Abscissen gehören zu den Nabelpunkten (§ 321); die gemeinsamen Scheitel der Hülfshyperbel und -Ellipse sind

also die Projektionen der Nabelpunkte auf die xy-Ebene. Diese Scheitel liegen immer im Innern des Hauptschnittes, denn da der Annahme nach b kleiner ist als c, so ist die Grösse $\frac{b\lambda}{c}$ kleiner als die halbe grösste Axe λ des Ellipsoides.

Wird $\mu^2 = b^2$ gesetzt, so hat die Ellipse, welche die Projektion einer Linie des ersten Systems bildet, zur grossen Axe die gemeinsame Axe der Hülfsellipse und -Hyperbel, und ihre kleine Axe ist null. Die Ellipse fällt also mit der x-Axe zusammen, und hieraus folgt, dass die in der xz gelegene Hauptellipse eine Krümmungskurve ist. Wächst μ^2 von b^2 bis c^2, so wachsen die beiden Axen der Ellipse. Für $\mu^2 = c^2$ fällt die Ellipse mit der Hauptellipse in der xy-Ebene zusammen, welche mithin ebenfalls eine Krümmungskurve ist. Da die Variabele μ^2 nicht grössere Werte annimmt als c^2, so ist die Hülfshyperbel nur bis zu den Punkten zu nehmen, wo sie von den Tangenten der Hauptellipse, welche den Axen parallel sind, geschnitten wird.

Die Krümmungslinien des zweiten Systemes haben als Projektionen die Gleichungen 5). Ist $\nu^2 = b^2$, so hat die Hyperbel zur transversalen Axe die gemeinsame Axe der Hülfshyperbel und -Ellipse. Die andere Axe ist null und die Kurve reduziert sich auf die geraden Strecken, welche zwischen den Nabelpunkten und der Hauptellipse enthalten sind. Nimmt ν^2 von seinem Maximalwert b^2 ab bis zum Wert null, so wird die transversale Axe kleiner, und die nicht transversale wächst. Die erstere wird null für $\nu^2 = 0$, die Hyperbel reduziert sich also auf die y-Axe, und hieraus folgt, dass auch der dritte Hauptschnitt des Ellipsoides in der yz-Ebene eine Krümmungskurve ist.

Alle Ellipsen und Hyperbeln in der xy-Ebene kehren ihre konkave Seite nach den beiden Punkten, welche die Projektionen der Nabelpunkte sind. Die Krümmungskurven umschliessen diese vier Punkte, die einen von der einen, die anderen von der anderen Seite; je mehr sie sich denselben nähern, um so enger ziehen sie sich zusammen, und wenn sie dieselben erreicht haben, fallen sie mit der Hauptellipse, auf welcher die Nabelpunkte liegen, zusammen.

340. Alle Krümmungskurven des Ellipsoides projizieren sich in die Ebene der grössten und der kleinsten Axe als Ellipsen. Um diese Projektionen zu konstruieren, genügt die Anwendung einer einzigen *Hülfsellipse*. Denn bezeichnen wir mit x_1 und z_1 die Halbaxen einer Ellipse, welche die Projektion einer Krümmungskurve bildet, so hat man

$$\frac{b^2 x_1^2}{\lambda^2} = \mu^2, \quad \frac{(c^2 - b^2) z_1^2}{\lambda^2 - c^2} = c^2 - \mu^2,$$

oder

$$\frac{b^2 x_1^2}{\lambda^2} = \nu^2, \quad \frac{(c^2 - b^2) z_1^2}{\lambda^2 - c^2} = c^2 - \nu^2.$$

Die Elimination von μ^2 oder ν^2 ergiebt:

$$8) \qquad \frac{b^2 x_1^2}{c^2 \lambda^2} + \frac{(c^2 - b^2) z_1^2}{c^2 (\lambda^2 - c^2)} = 1.$$

Für die Linien der einen Krümmung hat man:

$$\mu^2 > b^2, \quad \text{also} \quad x_1 > \lambda, \quad z_1 < \sqrt{\lambda^2 - c^2},$$

und für die der anderen:

$$\nu^2 < b^2, \quad \text{also} \quad x_1 < \lambda, \quad z_1 > \sqrt{\lambda^2 - c^2}.$$

Es genügt den Quadranten der Hülfsellipse zu betrachten, welcher zu positiven Werten von x und z gehört. Dann sieht man, dass die Gerade $x_1 = \lambda$, welche die Hauptellipse berührt, den Quadranten der Hülfsellipse in zwei Teile teilt, von denen der eine den Kurven der ersten Krümmung, der andere denen der zweiten entspricht. Die Scheitel der Hülfsellipse sind

$$\pm \frac{c\lambda}{b}, \quad \pm \frac{c\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Die Geraden, welche diese Scheitel paarweise verbinden, bilden einen Rhombus, dessen Seiten die Gleichungen haben

$$9) \qquad \pm \frac{bx}{c\lambda} \pm \frac{z\sqrt{c^2 - b^2}}{c\sqrt{\lambda^2 - b^2}} = 1$$

und also (§ 321) durch die Nabelpunkte hindurchgehen. Eliminiert man x zwischen dieser Gleichung und den Gleichungen der Projektionen der Krümmungskurven, nämlich

$$\frac{b^2 x^2}{\lambda^2 \mu^2} + \frac{(c^2 - b^2) z^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} = 1,$$

so folgt:

$$\left[z \pm \frac{(c^2 - \mu^2)\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}\right]^2 = 0.$$

Da diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, so sieht man, dass die Projektionen aller Krümmungskurven die vier Seiten dieses Rhombus berühren; sie sind demselben also eingeschrieben. Hieraus folgt, dass die vier Punkte, in denen die Seiten dieses Rhombus die in der xz-Ebene gelegene Hauptellipse berühren, die Nabelpunkte sind. Denn wir haben gesehen, dass diese Hauptellipse eine Krümmungskurve ist und dass sie auch die Nabelpunkte enthält.

341. Um die Differentialgleichung der Projektionen der Krümmungskurven des Ellipsoides nach der allgemeinen Methode im § 322 zu bilden, genügt es die Grössen p, q, r, s, t aus der Flächengleichung

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

zu bestimmen und diese Werte in die Gleichung 6) des genannten Paragraphen einzusetzen. Einen Teil dieser Rechnung haben wir schon im § 321 ausgeführt und daselbst gefunden:

$$\frac{x}{\lambda^2} + \frac{pz}{\lambda^2 - c^2} = 0, \quad \frac{y}{\lambda^2 - b^2} + \frac{qz}{\lambda^2 - c^2} = 0;$$

ferner:

$$rz + (1 + p^2) = \frac{c^2}{\lambda^2},$$

$$tz + (1 + q^2) = \frac{c^2 - b^2}{\lambda^2 - b^2},$$

$$sz + pq = 0.$$

Hieraus folgt:

$$z\,[(pqr - (1 + p^2)s] = \frac{c^2}{\lambda^2}\,pq,$$

$$z\,[(1 + q^2)s - pqt] = -\frac{c^2 - b^2}{\lambda^2 - b^2}\,pq,$$

$$z\,[(1 + q^2)r - (1 + p^2)t] = \frac{b^2(\lambda^2 - c^2)}{\lambda^2(\lambda^2 - b^2)} + \frac{c^2}{\lambda^2}\,q^2 - \frac{c^2 - b^2}{\lambda^2 - b^2}\,p^2.$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichung 6) des § 322 und führt man ferner an Stelle von p und q ihre Werte in x und y ein, so erhält man die gesuchte Gleichung, nämlich:

$$10)\qquad Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-Ay^2-B)\frac{dy}{dx}-xy=0,$$

wobei

$$A=\frac{(c^2-b^2)\lambda^2}{c^2(\lambda^2-b^2)},\quad B=\frac{b^2\lambda^2}{c^2}.$$

In der Integralrechnung wird gezeigt werden, wie man von dieser Gleichung auf die Gleichung

$$11)\qquad \frac{c^2x^2}{\lambda^2\mu^2}+\frac{(c^2-b^2)y^2}{(\lambda^2-b^2)(\mu^2-b^2)}=1$$

zurückkommt, die wir unmittelbar auf Grund der allgemeinen Eigenschaft orthogonaler Systeme gebildet haben. Umgekehrt ist es leicht zu bestätigen, dass aus der Elimination von μ^2 zwischen der Gleichung 11) und der aus ihr durch Differentiation nach x und y abgeleiteten die Differentialgleichung 10) hervorgeht.

Die Niveaulinien und die Linien grössten Falles.

342. Ist eine Fläche auf drei rechtwinklige Koordinatenebenen bezogen, von denen die eine, die xy-Ebene, als horizontal betrachtet wird, so heissen die horizontalen Schnitte der Fläche die *Niveaulinien*.

Für jede Niveaulinie ist $dz=0$ oder, da $dz=p\,dx+q\,dy$ ist:

$$p\,dx+q\,dy=0,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{p}{q}.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass in jedem Punkte einer Niveaulinie die Tangente zusammenfällt mit der horizontalen Geraden, welche in der Tangentenebene des nämlichen Flächenpunktes liegt. Denn diese Ebene hat die Gleichung:

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y),$$

und der Neigungswinkel ihrer horizontalen Linie ist bestimmt durch $-\frac{p}{q}$.

Setzt man den obigen Wert für $\frac{dy}{dx}$ in die Differentialgleichung der Krümmungskurven ein (§ 322), so folgt:

$$pq(r-t)+(q^2-p^2)s=0.$$

Diese partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung wird von allen den Flächen erfüllt, für welche die Niveaulinien Krümmungskurven sind.

Zu einem einfacheren Resultate gelangt man noch, wenn man als Horizontalebene die xz-Ebene wählt. Dann ist für die Niveaulinien $\frac{dy}{dx} = 0$, und setzt man diesen Wert in die Differentialgleichung der Krümmungskurven ein, so wird dieselbe

$$\frac{r}{1 + p^2} - \frac{s}{pq} = 0.$$

Für die Flächen, welche dieser Gleichung genügen, ist die eine Bedingung der Nabelpunkte von selbst erfüllt. Diese Punkte sind also nur noch durch eine einzige Gleichung bestimmt, und folglich besitzt jede dieser Flächen eine Kurve von Nabelpunkten.

343. *Linie grössten Falles* auf einer Fläche nennt man jede auf der Fläche gelegene Kurve, deren Tangente in jedem Punkte diejenige unter den Tangenten der Fläche ist, welche dort den grössten Winkel mit der horizontalen Tangente bildet. Die Tangente solch einer Kurve ist daher selbst die Linie grössten Falles innerhalb der Tangentenebene, d. h. sie ist rechtwinklig zur horizontalen Geraden in dieser Ebene.

Ist die Fläche auf drei rechtwinklige Axen bezogen, von denen die eine, nämlich die z-Axe, vertikal ist, so hat die horizontale Gerade in der Tangentenebene den Richtungskoeffizienten $-\frac{p}{q}$; die Differentialgleichung der Linien grössten Falles ist also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}.$$

Die Ableitungen p und q sind mittelst der Flächengleichung als Funktionen von x und y gegeben.

Legt man durch einen Flächenpunkt die Niveaulinie und die Linie grössten Falles, so sind die Tangenten an diesen Kurven senkrecht zu einander. Die Niveaulinien und die Linien grössten Falles bilden also auf der Fläche ein orthogonales System.

Sind also die Niveaulinien zugleich Krümmungskurven, so bilden die Linien grössten Falles das andere System von Krümmungskurven. Diese Thatsache kann man auch dadurch bestätigen, dass man in die Differentialgleichung der Krümmungskurven für $\frac{dy}{dx}$ den Wert $\frac{q}{p}$ einsetzt; man findet dann dieselbe partielle Differentialgleichung, welche bei der Substitution anlässlich der Niveaulinien erhalten wurde.

344. Die Anwendung der Gleichungen auf das Ellipsoid ergiebt: Ist

$$x^2 + my^2 + nz^2 = a^2$$

die Gleichung der Fläche, so wird

$$x + nzp = 0, \quad my + nzq = 0,$$

also

$$\frac{q}{p} = \frac{my}{x}.$$

Die Differentialgleichung der Linien grössten Falles ist demnach:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} - \frac{m\,dx}{x} = 0.$$

Die linke Seite ist das Differential von

$$l(y) - m\,l(x) \quad \text{oder} \quad l\,\frac{y}{x^m}.$$

Der Quotient $\frac{y}{x^m}$ ist also gleich einer Konstante c, und mithin ist

$$y = cx^m$$

die Gleichung für die horizontalen Projektionen der Linien grössten Falles auf dem Ellipsoide.

Über Linienflächen. Ihre Unterscheidung in abwickelbare und in nicht abwickelbare Flächen.

345. Im folgenden sollen verschiedene Klassen von Flächen untersucht und die partiellen Differentialgleichungen bestimmt werden, durch welche man alle Flächen der nämlichen Klasse darstellen kann.

Unter den Flächen, mit denen wir uns beschäftigen wollen, sind vor allem die *Linienflächen* zu beachten, d. h. die Flächen,

welche durch eine bewegliche Gerade erzeugt werden. Die Klasse der Linienflächen teilt sich in zwei verschiedene Arten; die eine Art enthält die Flächen, welche wir *abwickelbare* genannt haben, die andere *nicht abwickelbare* oder *gekrümmte* Flächen.

Bezeichnen wir mit x, y, z geradlinige Koordinaten und sind a, b, α, β Funktionen eines variabelen Parameters, so sind die Gleichungen für die Erzeugenden einer beliebigen Linienfläche

$$1)\qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta.$$

Es ist ersichtlich, dass man als variabelen Parameter irgend eine der Grössen a, b, α, β, falls sie sich nicht auf einen konstanten Wert reduziert, wählen kann. Man hat also in dem allgemeinsten Falle nur drei willkürliche Funktionen.

Wir suchen zunächst die Bedingung dafür, dass die Gerade 1) eine abwickelbare Fläche erzeugt. Da eine abwickelbare Fläche Einhüllende einer beweglichen Ebene ist, welche die Erzeugende enthält, so wird die Gleichung dieser beweglichen Ebene

$$2)\qquad (x - az - \alpha) + \lambda\,(y - bz - \beta) = 0,$$

wobei λ eine bestimmte Funktion des Parameters sein muss, von welchem a, b, α, β abhängen. Differentiiert man die Gleichung 2) nach dem Parameter, so folgt:

$$3)\qquad -(z\,da + d\alpha) - \lambda\,(z\,db + d\beta) + d\lambda\,(y - bz - \beta) = 0,$$

und damit die Fläche eine abwickelbare sei, ist notwendig und hinreichend, dass das System der Gleichungen 2) und 3) die nämliche Gerade darstellt, wie das System der Gleichungen 1). Die Gleichung 2) wird durch die Gleichungen 1) befriedigt, und damit auch die Gleichung 3) dadurch erfüllt sei, muss

$$(z\,da + d\alpha) + \lambda\,(z\,db + d\beta) = 0$$

sein, bei allen Werten von z. Dies giebt die beiden Bedingungen:

$$da + \lambda\,db = 0, \quad d\alpha + \lambda\,d\beta = 0,$$

und demnach durch Elimination von λ:

$$4)\qquad da\,d\beta - db\,d\alpha = 0.$$

Diese Gleichung drückt die Bedingung für eine abwickelbare Fläche aus. Der Weg, auf welchem sie abgeleitet ist, ist derselbe, den wir bei der Bestimmung der Krümmungskurven einschlugen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so erzeugt die bewegliche Gerade, welche durch die Gleichungen 1) dargestellt ist, eine gekrümmte Fläche.

346. Bezeichnen wir den Parameter, von welchem a, b, α, β abhängen, mit θ, und betrachten wir die beiden Erzeugenden, welche den Werten θ und $\theta + \Delta\theta$ des Parameters entsprechen. Die Gleichungen dieser Erzeugenden sind:

$$x = az + \alpha, \quad x = (a + \Delta a) z + (\alpha + \Delta\alpha),$$
$$y = bz + \beta, \quad y = (b + \Delta b) z + (\beta + \Delta\beta).$$

Ist D die kürzeste Entfernung der beiden Geraden und i der Winkel, den sie miteinander bilden, so hat man nach bekannten Formeln:

$$5) \left\{ \begin{aligned} D &= \frac{\Delta a \, \Delta\beta - \Delta b \, \Delta\alpha}{\pm \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2}}, \\ \sin i &= \frac{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\,\sqrt{(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 + 1}}, \end{aligned} \right.$$

also

$$\frac{D}{i} = \pm \frac{\sin i}{i} \sqrt{a^2 + b^2 + 1}\,\sqrt{(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 + 1}$$
$$\times \frac{\frac{\Delta a}{\Delta\theta}\frac{\Delta\beta}{\Delta\theta} - \frac{\Delta b}{\Delta\theta}\frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta}}{\left(\frac{\Delta a}{\Delta\theta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\Delta\theta}\right)^2 + \left(a\frac{\Delta b}{\Delta\theta} - b\frac{\Delta a}{\Delta\theta}\right)^2}.$$

Lässt man $\Delta\theta$ nach null konvergieren und geht zu den Grenzen über, so wird dieser Ausdruck, wenn man den gemeinsamen Divisor $d\theta^2$ fortlässt:

$$6) \quad \lim \frac{D}{i} = \pm \frac{\sin i}{i} (a^2 + b^2 + 1) \frac{da\,d\beta - db\,d\alpha}{da^2 + db^2 + (a\,db - b\,da)^2}.$$

Ist die Bedingung 4) nicht erfüllt, so hat die linke Seite dieser Gleichung im allgemeinen einen endlichen von null verschiedenen Wert, und hieraus schliesst man den

Lehrsatz I. *Bei einer nicht abwickelbaren Linienfläche sind die kürzeste Entfernung zweier unendlich benachbarter Er-*

zeugenden und der Winkel, welchen dieselben mit einander bilden, im allgemeinen unendlich kleine Grössen gleicher Ordnung.

347. Bei den abwickelbaren Flächen, mit Ausnahme der Cylinder, konvergiert das Verhältnis $\frac{D}{i}$ nach der Grenze null, d h. die Entfernung D wird von höherer Ordnung unendlich klein als der Winkel i. Da die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche Tangenten einer Kurve sind, der Rückkehrkurve der Fläche, so ist es zweckmässig, die Grössen, welche sich auf diese Kurve beziehen, einzuführen. Bezeichnen wir also mit x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten der Rückkehrkurve, mit α, β, γ die Winkel, welche ihre Tangente mit den Axen bildet, so werden die Gleichungen der Tangente:

$$\frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y}{\cos\beta} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma},$$

und für eine zweite Tangente:

$$\frac{\xi - x - \Delta x}{\cos\alpha + \Delta\cos\alpha} = \frac{\eta - y - \Delta y}{\cos\beta + \Delta\cos\beta} = \frac{\zeta - z - \Delta z}{\cos\gamma + \Delta\cos\gamma}.$$

Setzt man

$$1)\qquad \begin{cases} A = \cos\beta\,.\,\Delta\cos\gamma - \cos\gamma\,.\,\Delta\cos\beta, \\ B = \cos\gamma\,.\,\Delta\cos\alpha - \cos\alpha\,.\,\Delta\cos\gamma, \\ C = \cos\alpha\,.\,\Delta\cos\beta - \cos\beta\,.\,\Delta\cos\alpha, \end{cases}$$

so ist der Ausdruck für die kürzeste Entfernung D der beiden Tangenten

$$2)\qquad D = \frac{A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Sind nun, wie früher, φ, ψ, χ und λ, μ, ν die Winkel, welche die Hauptnormale und die Axe der Oskulationsebene der Rückkehrkurve mit den Koordinatenaxen bilden, s die Bogenlänge, $d\sigma$ und $d\tau$ der Kontingenz- und der Torsionswinkel, so ist nach der Taylorschen Formel:

$$\Delta x = dx + \tfrac{1}{2} d^2x + \tfrac{1}{6} d^3x + \cdots,$$

und wenn man den Bogen s als unabhängige Variabele wählt, so ist (§ 274):

$$dx = ds \cos\alpha,$$
$$d^2x = ds\, d\sigma \cos\varphi,$$
$$d^3x = ds\, d^2\sigma \cos\varphi - ds\, d\sigma^2 \cos\alpha - ds\, d\sigma\, d\tau \cos\lambda.$$

Der Wert von Δx wird also, indem man unendlich kleine Grössen vierter Ordnung fortlässt:

$$\Delta x = \left(ds - \frac{ds\, d\sigma^2}{6}\right) \cos\alpha + \left(\frac{ds\, d\sigma}{2} + \frac{ds\, d^2\sigma}{6}\right) \cos\varphi - \frac{ds\, d\sigma\, d\tau}{6} \cos\lambda.$$

Nach derselben Formel erhält man die Werte von Δy und Δz, wenn man α, φ, λ durch β, ψ, μ und durch γ, χ, ν ersetzt.

Da nun $A \cos\alpha + B \cos\beta + C \cos\gamma = 0$ ist, so wird der Wert von D bis auf unendlich kleine Grössen vierter Ordnung:

$$D = \left(\frac{ds\, d\sigma}{2} + \frac{ds\, d^2\sigma}{6}\right) \frac{A \cos\varphi + B \cos\psi + C \cos\chi}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$
$$- \frac{ds\, d\sigma\, d\tau}{6} \frac{A \cos\lambda + B \cos\mu + C \cos\nu}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Nach den Gleichungen im § 265 ist aber:

$$A \cos\varphi + B \cos\psi + C \cos\chi$$
$$= -(\cos\lambda \,.\, \Delta \cos\alpha + \cos\mu \,.\, \Delta \cos\beta + \cos\nu \,.\, \Delta \cos\gamma),$$
$$A \cos\lambda + B \cos\mu + C \cos\nu$$
$$= +(\cos\varphi \,.\, \Delta \cos\alpha + \cos\psi \,.\, \Delta \cos\beta + \cos\chi \,.\, \Delta \cos\gamma).$$

Ferner wird bis auf unendlich kleine Grössen dritter Ordnung:

$$\Delta \cos\alpha = d \cos\alpha + \tfrac{1}{2} d^2 \cos\alpha = \left(d\sigma + \frac{d^2\sigma}{2}\right) \cos\varphi - \frac{d\sigma^2}{2} \cos\alpha - \frac{d\sigma\, d\tau}{2} \cos\lambda,$$

woraus ebenso die Ausdrücke für $\Delta \cos\beta$ und $\Delta \cos\gamma$ durch Vertauschung der Buchstaben hervorgehen. Hieraus schliesst man, dass

$$A \cos\varphi + B \cos\psi + C \cos\chi = \tfrac{1}{2}\, d\sigma\, d\tau$$

bis auf unendlich kleine Grössen dritter Ordnung, und dass

$$A \cos\lambda + B \cos\mu + C \cos\nu = d\sigma$$

bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung werden. Endlich ist mit Vernachlässigung von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = d\sigma,$$

und folglich wird der Ausdruck für D gleich:

$$D = \frac{ds\, d\sigma\, d\tau}{12} \tag{3}$$

bis auf unendlich kleine Grössen vierter Ordnung. Bezeichnet man mit R und T die Radien der beiden Krümmungen, so kann man auch schreiben:

$$D = \frac{ds^3}{12\,R\,T}.$$

Demnach hat man den

Lehrsatz II. *Das Verhältnis der kürzesten Entfernung zweier benachbarter Tangenten einer beliebigen Kurve zur dritten Potenz der zwischen den Berührungspunkten enthaltenen Bogenlänge hat den zwölften Teil des Produktes aus den beiden Krümmungen des Kurvenbogens zur Grenze.*

Man kann bemerken, dass die Ordnung der Grösse D sich nicht über die dritte erhebt; denn dieses Glied dritter Ordnung verschwindet nicht aus der Gleichung 3), ausser wenn $d\tau = 0$ ist; ist aber die Kurve eben, so ist D durchaus gleich null. Hieraus folgt der von Herrn Bouquet bewiesene

Lehrsatz III. *Ist ein System von Geraden gegeben, deren Gleichungen einen variabelen Parameter enthalten, so wird die kürzeste Entfernung zweier unendlich benachbarter Geraden im allgemeinen nicht von höherer als der dritten Ordnung im Vergleich zu dem Winkel der nämlichen Geraden unendlich klein, ausser wenn sich die Entfernung überhaupt auf null reduziert.*

Die Cylinderflächen und ihre partielle Differentialgleichung.

348. Den einfachsten Fall abwickelbarer Flächen bilden die Cylinder. Die bewegliche Ebene, deren Einhüllende die Fläche ist, und die umgekehrt die Tangentenebene der Fläche bildet, ist hier einer festen gegebenen Geraden parallel. Hieraus lässt sich unmittelbar die partielle Differentialgleichung der Fläche bilden. Denn sind

$$\xi = a\zeta, \quad \eta = b\zeta$$

die Gleichungen der Geraden, welche parallel zu den Erzeugenden durch den Anfangspunkt des geradlinigen Koordinatensystemes gelegt ist, und

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

die Gleichung der Tangentenebene der Fläche im Punkte x, y, z, so wird die Bedingung dafür, dass diese Ebene der Geraden parallel ist:

$$1) \qquad ap + bq = 1.$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung, welche alle cylindrischen Flächen mit der vorgeschriebenen Richtung der Erzeugenden erfüllen müssen.

Man kann dieselbe auch ableiten aus der Koordinatengleichung, welche für die cylindrischen Flächen besteht. Wenn die Gleichungen

$$2) \qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

eine Erzeugende der Fläche darstellen, so hängen α und β von einem variabelen Parameter ab, und sind also mit einander durch eine Gleichung

$$3) \qquad \Phi(\alpha, \beta) = 0$$

verbunden, in welcher Φ eine willkürliche Funktion bedeutet. Die Elimination von α und β zwischen den Gleichungen 2) und 4) liefert:

$$4) \qquad \Phi(x - az, y - bz) = 0$$

und dies ist die allgemeine Funktionalgleichung der Cylinderflächen. Um die partielle Differentialgleichung zu erhalten, muss man die Funktion Φ nach der Methode des § 82 eliminieren. Differentiiert man die Gleichung 3) oder 4) partiell nach x sowohl wie nach y, so folgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(1 - ap) - \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} bp = 0,$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} aq + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}(1 - bp) = 0,$$

und die Elimination des Verhältnisses $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} : \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$ führt auf die partielle Differentialgleichung 1).

In der Integralrechnung wird gezeigt werden, wie man von der partiellen Differentialgleichung umgekehrt zu der Funktionalgleichung, welche nur die Koordinaten enthält, zurückkommt.

Da die cylindrischen Flächen abwickelbar sind, so bilden ihre Erzeugenden ein erstes System von Krümmungskurven (§ 327); das zweite System wird von den zu den Erzeugenden senkrechten Schnitten geliefert.

Anmerkung. Die Funktionalgleichung 4) ist allgemeiner als die partielle Differentialgleichung 1). Die Funktion $\Phi\ (\alpha, \beta)$, welche die Leitkurve des Cylinders in der xy-Ebene bildet, kann, da Φ eine völlig willkürliche Funktion sein soll, so beschaffen sein, dass sie an keiner Stelle eine bestimmte Tangentenrichtung besitzt, d. h. dass der Quotient $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} : \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$ an keiner Stelle einen bestimmten Wert hat. In diesem Falle führt auch die partielle Differentiation der Funktionalgleichung zu keinen bestimmten Gleichungen, und die Gleichung 1) besteht nicht mehr. Geometrisch sagt dies aus: Die Cylinderfläche, welche durch Bewegung einer parallelen Geraden längs einer vorgeschriebenen Leitkurve erzeugt ist, kann nicht mehr betrachtet werden als Einhüllende eines Systems von Ebenen, die einer bestimmten Richtung parallel sind; die Tangentenebene des Cylinders ist in den Punkten jeder Erzeugenden völlig unbestimmt. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die folgenden Flächenarten.

Die Kegelflächen und ihre partielle Differentialgleichung.

349. Die Kegelflächen gehören auch zu den abwickelbaren; die bewegliche Ebene, welche von der Fläche eingehüllt wird, geht durch einen festen Punkt; sie ist zugleich die Tangentenebene der Fläche. Bezeichnet man also mit x_0, y_0, z_0 die geradlinigen Koordinaten des festen Scheitelpunktes, mit x, y, z die Koordinaten der Flächenpunkte, so muss jede Tangentenebene die Gleichung erfüllen:

$$1) \qquad z - z_0 = p\,(x - x_0) + q\,(y - y_0).$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung der Kegelflächen. Sie kann auch aus der allgemeinen Funktionalgleichung der Flächen abgeleitet werden. Sind

2) $$x - x_0 = a(z - z_0), \quad y - y_0 = b(z - z_0)$$

die Gleichungen der Erzeugenden, so hängen die Grössen a und b von einem Parameter ab, d. h. sie sind unter einander durch eine Gleichung

3) $$\Phi(a, b) = 0$$

verbunden, wobei Φ eine willkürliche Funktion bedeutet. Die Elimination von a und b ergiebt die Gleichung, welche zwischen den Koordinaten x, y, z einer Kegelfläche besteht, nämlich:

4) $$\Phi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

Differentiiert man die Gleichungen 3) oder 4) partiell nach x und nach y, so folgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a}[(z - z_0) - p(x - x_0)] - \frac{\partial \Phi}{\partial b} p(y - y_0) = 0,$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial a} q(x - x_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial b}[(z - z_0) - q(y - y_0)] = 0.$$

Die Elimination des Verhältnisses $\frac{\partial \Phi}{\partial a} : \frac{\partial \Phi}{\partial b}$ führt auf die partielle Differentialgleichung 1), und umgekehrt lässt sich aus dieser die Funktionalgleichung ableiten, wie in der Integralrechnung gezeigt werden wird.

Die Erzeugenden der Kegelfläche bilden ein System von Krümmungskurven (§ 327); das andere erhält man, wenn man die Fläche mit allen Kugeln durchschneidet, deren Mittelpunkt der Scheitel des Kegels ist.

Die Konoidflächen und ihre partielle Differentialgleichung.

350. Die *Konoidflächen*, welche zur nicht abwickelbaren Art von Linienflächen gehören, werden von einer beweglichen Geraden erzeugt, welche stets eine feste Gerade schneidet und dabei parallel zu einer festen Ebene bleibt. Die feste Gerade heisst die *Direktrix oder Leitgerade*, die feste Ebene die *Leitebene.* Das hyperbolische Paraboloid ist ein Konoid. Sind in Bezug auf drei beliebige Axen

$$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu$$

die Gleichungen der Leitgeraden, und

$$Ax + By + Cz = 0$$

die Gleichung der Leitebene, ferner

$$1) \qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

die Gleichungen der Erzeugenden, so müssen, damit dieselbe die Leitgerade trifft und der Leitebene parallel ist, die Gleichungen erfüllt sein:

$$2) \qquad \begin{cases} \dfrac{a - m}{\alpha - \mu} = \dfrac{b - n}{\beta - \nu}, \\ Aa + Bb + C = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestimmen zwei der Grössen a, b, α, β als Funktionen der beiden anderen, und diese beiden sind durch eine willkürliche Funktion mit einander verbunden. Um die partielle Differentialgleichung der Fläche zu bilden, hat man die Bedingungen aufzustellen, dass die Tangentenebene in einem beliebigen Punkt x, y, z der Fläche, deren Gleichung

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

ist, die Erzeugende enthält, oder parallel ist zur Geraden $\xi = a\zeta$, $\eta = b\zeta$; auf diese Weise erhält man

$$3) \qquad ap + bq = 1.$$

Eliminiert man nun die vier Grössen a, b, α, β zwischen den fünf Gleichungen 1), 2) und 3), so erhält man die partielle Differentialgleichung, nämlich

$$4) \quad \frac{p(x - mz - \mu) + q(y - nz - \nu)}{mp + nq - 1} = \frac{A(x - mz - \mu) + B(y - nz - \nu)}{Am + Bn + C}.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man die Leitgerade zur z-Axe und die Leitebene zur xy-Ebene wählt; alsdann hat man:

$$m = 0, \quad \mu = 0, \quad n = 0, \quad \nu = 0, \quad A = 0, \quad B = 0,$$

und die Gleichung 4) reduziert sich auf

$$5) \qquad px + qy = 0.$$

In diesem Falle sind die Gleichungen der Erzeugenden, welche die z-Axe treffen, und der xy-Ebene parallel sind:

$$6)\qquad z = h, \quad y = gx.$$

Die Grössen h und g sind durch eine willkürliche Gleichung mit einander verbunden, und setzt man

$$7)\qquad h = \varphi(g),$$

so ergiebt die Elimination der Grössen h und g aus den drei Gleichungen 6) und 7) als Gleichung einer beliebigen Konoidfläche mit den vorgeschriebenen Bedingungen

$$8)\qquad z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dieselbe besagt, dass z eine willkürliche homogene Funktion nullter Ordnung von x und y ist. Um die Funktion φ zu eliminieren, kann man also das Theorem über homogene Funktionen anwenden, wodurch man wieder auf die Gleichung 5) geführt wird.

Die Rotationsflächen und ihre partielle Differentialgleichung.

351. Bei jeder Rotationsfläche schneidet die Normale jedes Flächenpunktes die Axe. Aus dieser Eigenschaft kann man unmittelbar die partielle Differentialgleichung dieser Flächen ableiten; denn sind in Bezug auf drei rechtwinklige Axen

$$(\xi - x) + p(\zeta - z) = 0 \quad \text{und} \quad (\eta - y) + q(\zeta - z) = 0$$

die Gleichungen der Normale im Punkte x, y, z, und

$$\xi = m\zeta + \mu, \quad \eta = n\zeta + \nu$$

die Gleichungen der Axe der Fläche, so erhält man, indem man ξ, η, ζ aus diesen vier Gleichungen eliminiert:

$$1)\qquad (q + n)(x + pz - \mu) - (p + m)(y + qz - \nu) = 0,$$

und dies ist die partielle Differentialgleichung.

Man kann diese Gleichung auch ableiten aus der Funktionalgleichung, welche die Koordinaten der Flächenpunkte erfüllen müssen. Die Rotationsfläche wird nämlich erzeugt

durch einen Kreis von beweglichem Radius, dessen Mittelpunkt auf der Axe liegt, und dessen Ebene senkrecht zur Axe ist. Zur Darstellung dieses Kreises dienen die beiden Gleichungen:

$$2)\qquad \begin{aligned} (x-\mu)^2+(y-\nu)^2+z^2 &= u,\\ mx+ny+z &= v. \end{aligned}$$

Die erste repräsentiert eine Kugel mit variabelem Radius, deren Mittelpunkt der Fusspunkt der Axe auf der xy-Ebene ist, die zweite eine bewegliche Ebene senkrecht zur Axe. Die Grössen u und v sind durch eine willkürliche Gleichung

$$3)\qquad \Phi(u, v) = 0$$

mit einander verbunden, welche die Gleichung der Rotationsfläche wird, wenn man u und v durch ihre Werte aus den Gleichungen 2) ersetzt. Differentiiert man dieselbe nach x sowohl wie nach y, so folgt:

$$2\frac{\partial \Phi}{\partial u}[(x-\mu)+pz]+\frac{\partial \Phi}{\partial v}(m+p)=0,$$

$$2\frac{\partial \Phi}{\partial u}[(y-\nu)+qz]+\frac{\partial \Phi}{\partial v}(n+q)=0.$$

Die Elimination von $\frac{\partial \Phi}{\partial u} : \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ aus diesen beiden Gleichungen ergiebt die oben gebildete partielle Differentialgleichung.

Wählt man die Axe der Rotationsfläche zur z-Axe, so wird $m=0$, $\mu=0$, $n=0$, $\nu=0$; die partielle Differentialgleichung reduziert sich auf

$$4)\qquad qx-py=0,$$

und die Gleichungen 2) und 3) ergeben als Funktionalgleichung:

$$\Phi(x^2+y^2, z)=0 \quad \text{oder} \quad z=\varphi(x^2+y^2),$$

wobei φ eine willkürliche Funktion ist.

352. Auf den Rotationsflächen bilden die Meridiankurven und Parallelkreise die beiden Systeme von Krümmungskurven. Denn die Normalen der Fläche, welche in den Punkten einer Meridiankurve konstruiert werden, liegen in der Meridianebene, und die Normalen in den Punkten eines Parallelkreises bilden einen Rotationskegel. Man kann dies auch vermittelst der allgemeinen Gleichung der Krümmungskurven

$$\frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz}$$

bestätigen. Denn nach der Gleichung 5) wird

$$p = 2x\varphi'(x^2 + y^2), \quad q = 2y\varphi'(x^2 + y^2),$$

demnach:

$$dp = 2\varphi'(x^2 + y^2)\,dx + 2x\varphi''(x^2 + y^2)\,2\,(x\,dx + y\,dy),$$
$$dq = 2\varphi'(x^2 + y^2)\,dy + 2y\varphi''(x^2 + y^2)\,2\,(x\,dx + y\,dy).$$

Aus der Gleichung 5) folgt aber auch:

$$dz = \varphi'(x^2 + y^2)\,2\,(x\,dx + y\,dy),$$

und sonach ist:

$$dp = 2\varphi'(x^2 + y^2)\,dx + 2x\frac{\varphi''}{\varphi'}\,dz, \quad dq = 2\varphi'(x^2 + y^2)\,dy + 2y\frac{\varphi''}{\varphi'}\,dz.$$

Setzt man diese Werte von p, q, dp, dq in die Gleichung:

$$\frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz}$$

ein, so erhält man:

$$dz(x\,dy - y\,dx)\left[\frac{\varphi''}{\varphi'} - 2\varphi'^2\right] = 0.$$

Diese Gleichung zerlegt sich in die beiden:

$$dz = 0, \quad d\frac{y}{x} = 0.$$

Für das eine System der Krümmungskurven ist also $z =$ konst, für das andere $\frac{y}{x} =$ konst, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Die partielle Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen.

353. Wenn die Gleichung einer Flächenfamilie, welche von den geradlinigen Koordinaten x, y, z und einem variabelen Parameter α abhängt, eine willkürliche Funktion dieses Parameters enthält, also von der Form ist:

$$f[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0,$$

so kann man aus den Gleichungen, welche die Einhüllende dieser Flächen enthält:

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

die willkürliche Funktion φ eliminieren. Man erhält auf diese Weise eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche allen Einhüllenden angehört, die sich nur durch die Beschaffenheit der Funktion φ unterscheiden. Wir wollen hier diese Rechnung nicht wiederholen, die im § 85 ausreichend entwickelt ist. Hinsichtlich der Fälle aber, bei denen die gegebene Gleichung mehrere willkürliche Funktionen des Parameters α enthält, müssen wir uns auf die abwickelbaren (developpabelen) Flächen beschränken.

354. Wir betrachten eine bewegliche Ebene, welche durch die Gleichung

$$1) \qquad z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$$

dargestellt ist, wobei α einen variabelen Parameter, $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$ zwei willkürliche Funktionen desselben bezeichnen. Die Ableitung der Gleichung nach α ist

$$2) \qquad 0 = x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)$$

und das System dieser beiden Gleichungen repräsentiert alle abwickelbaren Flächen.

Der Wert des totalen Differentiales dz wird erhalten, indem man die Gleichung 1) differentiiert unter der Annahme, dass α, infolge der Gleichung 2), eine Funktion der Variabelen x und y ist. Da aber infolge dieser Gleichung der Koeffizient von $d\alpha$ verschwindet, so ist

$$3) \qquad dz = \alpha\, dx + \varphi(\alpha)\, dy,$$

wie wenn α konstant wäre. Hieraus folgt, dass

$$4) \qquad p = \alpha, \quad q = \varphi(\alpha),$$

und nun lassen sich leicht zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung bilden, die allen abwickelbaren Flächen angehören und nur eine einzige willkürliche Funktion enthalten. Denn die letzten Gleichungen ergeben durch Elimination von α:

$$5) \qquad q = \varphi(p).$$

Trägt man die Werte für α und $\varphi(\alpha)$ aus den Gleichungen 4) in die Gleichung 1) ein, so erhält man:

$$z = px + qy + \psi(p). \tag{6}$$

Jede der Gleichungen 5) und 6) enthält nur eine willkürliche Funktion; und dies sind die beiden Gleichungen, welche wir bilden wollten. Man kann noch bemerken, dass die Gleichung

$$z = px + qy + \psi(p, q), \tag{7}$$

wo ψ eine willkürliche Funktion von p und q bezeichnet, nicht allgemeiner ist als die Gleichung 6); denn da q eine Funktion von p ist, so ist auch $\psi(p, q)$ eine willkürliche Funktion von p allein. In der Integralrechnung wird gezeigt werden, dass auch umgekehrt die Gleichnng 5) nur auf abwickelbare Flächen führt, und dass dasselbe mit einer gewissen Einschränkung auch für die Gleichungen 6) und 7) gilt.

355. Um die willkürliche Funktion, welche in jeder der drei letzten Gleichungen nachgeblieben ist, zu eliminieren, muss man die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung einführen. Betrachtet man zuerst die Gleichung 5) und differentiiert dieselbe total, so folgt:

$$dq = \varphi'(p)\, dp \quad \text{oder} \quad s\, dx + t\, dy = (r\, dx + s\, dy)\, \varphi'(p).$$

Hieraus gewinnt man die beiden Gleichungen:

$$s = r\varphi'(p) \quad \text{und} \quad t = s\varphi'(p),$$

also

$$rt - s^2 = 0. \tag{8}$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche von allen abwickelbaren Flächen erfüllt wird. Sie sagt aus (§ 320), dass in jedem Punkte der Fläche einer der Hauptkrümmungsradien unendlich ist.

Untersucht man ebenso die Gleichung 7), welche die Gleichung 6) umfasst, indem man dieselbe total differentiiert, so folgt die Gleichung:

$$dz = (p\, dx + q\, dy) + \left(x + \frac{\partial \psi}{\partial p}\right) dp + \left(y + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) dq,$$

die sich, da $dz = p\, dx + q\, dy$, auf

$$\left(x + \frac{\partial \psi}{\partial p}\right) dp + \left(y + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) dq = 0$$

reduziert. Setzt man hier für dp und dq ihre Werte $r\,dx + s\,dy$, und $s\,dx + t\,dy$ ein, so folgt:

$$\left(x + \frac{\partial \psi}{\partial p}\right) r + \left(y + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) s = 0,$$

$$\left(x + \frac{\partial \psi}{\partial p}\right) s + \left(y + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) t = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt die Differentialgleichung 8); dabei ist indessen noch zu beachten, dass diese Gleichungen auch erfüllt sind, indem man

$$9) \qquad x + \frac{\partial \psi}{\partial p} = 0, \quad y + \frac{\partial \psi}{\partial q} = 0$$

setzt. Eliminiert man nun p und q aus den Gleichungen 7) und 9), so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, z, welche im allgemeinen keine abwickelbare Fläche darstellt und doch der Gleichung 7) genügt. Doch wollen wir hier auf diesen Gegenstand nicht näher eingehen, welcher der Integralrechnung angehört.

356. Trägt man die Werte von p, q, dp, dq aus den Gleichungen 4) und den Wert von dz aus der Gleichung 3) in die Gleichung der Krümmungskurven

$$\frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz}$$

ein, so erhält man:

$$10) \quad d\alpha[\{1+\varphi^2(\alpha)-\alpha\varphi(\alpha)\varphi'(\alpha)\}dy+\{\alpha\varphi(\alpha)-(1+\alpha^2)\varphi'(\alpha)\}dx]=0.$$

Diese Gleichung zerlegt sich in die beiden:

$$11) \qquad d\alpha = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\alpha^2)\,\varphi'(\alpha) - \alpha\varphi(\alpha)}{1+\varphi^2(\alpha) - \alpha\varphi(\alpha)\,\varphi'(\alpha)}.$$

Die erste Gleichung 11) ergiebt $\alpha =$ Konst.; sie bestimmt die Erzeugenden der Fläche, welche das eine System von Krümmungskurven auf der Fläche bilden, wie schon früher (§ 327) bemerkt wurde. Die zweite liefert zusammen mit der Gleichung 2) die Differentialgleichung für das andere System.

Die Kanalflächen.

357. Unter einer Kanalfläche versteht man die Einhüllende einer Kugel von gegebenem Radius, deren Mittelpunkt eine willkürliche ebene Kurve beschreibt. Bezeichnet man mit a den Radius der Kugel, mit α einen variabelen Parameter, mit $\varphi(\alpha)$ eine willkürliche Funktion desselben, so folgt die Gleichung der Flächen aus der Elimination von α zwischen den beiden Gleichungen

$$1)\qquad \begin{aligned} &(x-\alpha)^2 + [y-\varphi(\alpha)]^2 + z^2 = a^2, \\ &(x-\alpha) + [y-\varphi(\alpha)]\,\varphi'(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Wir haben bereits im § 87 die partielle Differentialgleichung erster Ordnung gebildet, welche zu diesen Flächen gehört; wir sahen, dass die erste der Gleichungen 1) ergiebt:

$$2)\qquad (x-\alpha) + pz = 0, \quad [y-\varphi(\alpha)] + qz = 0,$$

und dass man durch Elimination von $\varphi(\alpha)$ und α die Gleichung erhält:

$$3)\qquad z = \frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Wir wollen nun noch die Krümmungskurven der Fläche bestimmen. Aus der Differentiation der Gleichungen 2) folgt:

$$4)\qquad dx + p\,dz + z\,dp = d\alpha, \quad dy + q\,dz + z\,dq = \varphi'(\alpha)\,d\alpha,$$

und andererseits hat man gemäss denselben Gleichungen und der zweiten der Gleichungen 1):

$$p + q\varphi'(\alpha) = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi'(\alpha) = -\frac{p}{q}.$$

Hieraus gewinnt man:

$$1 + \frac{z\,dp}{dx+p\,dz} = \frac{d\alpha}{dx+p\,dz},$$

$$1 + \frac{z\,dq}{dy+q\,dz} = -\frac{p}{q}\,\frac{d\alpha}{dy+q\,dz}.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind aber für die Krümmungkurven einander gleich, und mithin ist die Gleichung dieser Kurven:

$$\frac{q\,d\alpha}{dx+p\,dz} + \frac{p\,d\alpha}{dy+q\,dz} = 0,$$

oder

dies ergiebt:

$$(1+p^2+q^2)\,dz\,d\alpha = 0;$$

$$d\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad dz = 0,$$

d. h.

$$\alpha = \text{Konst.} \quad \text{oder} \quad z = \text{Konst.}$$

Also sind die Krümmungskurven des einen Systemes die Charakteristiken der Enveloppe, welche hier von grössten Kreisen der beweglichen Kugel gebildet werden. Diese Kurven sind zugleich auch die Linien des grössten Falles auf der Fläche, wenn man die xy-Ebene als horizontal betrachtet, denn die Kurven der andern Krümmung sind die Niveaulinien.

Die partielle Differentialgleichung der Linienflächen.

358. Zum Schlusse dieses Kapitels betrachten wir den allgemeinen Fall der Linienflächen. Die Gleichungen der Erzeugenden enthalten drei willkürliche Funktionen und die Elimination derselben erfordert die Einführung der partiellen Ableitungen dritter Ordnung. Wir bezeichnen wie früher:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

und setzen weiter:

$$dr = u\,dx + v\,dy, \quad ds = v\,dx + w\,dy, \quad dt = w\,dx + \tilde{\omega}\,dy.$$

Ferner seien:

$$1) \qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

die Gleichungen der Erzeugenden der Fläche.

Differentiiert man dieselben nach x und y, und bezeichnet man mit a', b', α', β' die Ableitungen von a, b, α, β in Bezug auf den Parameter θ, von welchem diese Gleichungen abhängen, so wird

$$2) \qquad \begin{cases} 1 = ap + (a'z + \alpha')\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \\[2ex] 0 = aq + (a'z + \alpha')\dfrac{\partial\theta}{\partial y}; \end{cases}$$

$$3) \qquad \begin{cases} 0 = bp + (b'z + \beta')\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \\[2ex] 1 = bq + (b'z + \beta')\dfrac{\partial\theta}{\partial y}. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} : \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{ap - 1}{aq} = \frac{bp}{bq - 1},$$

also:

$$4) \qquad ap + bq = 1,$$

$$5) \qquad a\frac{\partial \theta}{\partial x} + b\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

Die Ableitungen a', b', α', β' treten in diesen Gleichungen nicht auf.

Differentiiert man nun die Gleichung 4) nach x, ferner auch nach y, so erhält man:

$$(ar + bs) + (a'p + b'q)\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

$$(as + bt) + (a'p + b'q)\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, nachdem man sie zuvor mit a und b multipliziert hat, so folgt auf Grund der Gleichung 5)

$$6) \qquad a^2 r + 2ab\, s + b^2 t = 0.$$

Differentiiert man dann diese Gleichung nach x und nach y, so erhält man:

$$(a^2 u + 2ab\, v + b^2 w) + \frac{\partial(a^2 r + 2ab\, s + b^2 t)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

$$(a^2 v + 2ab\, w + b^2 \tilde{\omega}) + \frac{\partial(a^2 r + 2ab\, s + b^2 t)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

Addiert man endlich diese beiden Gleichungen, nachdem man sie mit a und b multipliziert hat, so wird

$$7) \qquad a^3 u + 3a^2 bv + 3ab^2 w + b^3 \tilde{\omega} = 0.$$

Die Gleichungen 6) und 7) enthalten nur die beiden Funktionen a und b, sie sind überdies homogen und reichen also zur Elimination derselben aus. Setzt man zur Abkürzung

$$8) \qquad \mathsf{M} = \frac{-s + \sqrt{s^2 - rt}}{t},$$

so folgt aus der Gleichung 6) $b = a\mathsf{M}$, und substituiert man diesen Wert in die Gleichung 7), so erhält man

$$9) \qquad u + 3v\mathsf{M} + 3w\mathsf{M}^2 + \tilde{\omega}\mathsf{M}^3 = 0$$

als partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für alle Linienflächen.

Elftes Kapitel.

Über Funktionen einer komplexen Variabelen.

Die Darstellung komplexer Variabelen und die expliciten algebraischen Funktionen.

359. Bisher haben wir nur reelle Grössen betrachtet; nunmehr stellen wir uns die Aufgabe, die allgemeine Theorie, welche wir in den ersten Kapiteln entwickelt haben, auch auf den Fall auszudehnen, dass die Konstanten oder die Variabelen beliebige komplexe Werte haben. Der Fall, dass eine Funktion die Form hat $u + v\sqrt{-1}$, wobei u und v gegebene reelle Funktionen von reellen Variabelen sind, erfordert kein neues Prinzip. Denn es ist folgerichtig, das Differential dieser Funktion zu definieren als die Summe aus den Differentialen du und dv, wenn dv noch zuvor mit dem Faktor $\sqrt{-1}$ multipliziert wird. Das Differential $du + dv\sqrt{-1}$ wird also gebildet, indem man so verfährt, als ob $\sqrt{-1}$ eine reelle Konstante wäre, und demnach lassen sich alle Regeln, welche für die Differentiation reeller Funktionen aufgestellt wurden, ohne weiteres auf Funktionen von der Form $u + v\sqrt{-1}$ ausdehnen, solange die unabhängigen Variabelen reell bleiben.

Funktionen komplexer Variabelen aber können in die Analysis nur unter der Bedingung eingeführt werden, dass sie genau definiert sind. Wir müssen also hierbei in ähnlicher Weise, wie bei den reellen Funktionen vorgehen.

Jede explicite Funktion wird erhalten, indem man eine bestimmte Anzahl von *elementaren Operationen* mit den Variabelen und mit gegebenen konstanten Grössen ausführt. Genügt eine einzige dieser Operationen, so ist das Resultat eine

einfache Funktion der einen Variabelen; anderen Falles ergiebt das Resultat der ausgeführten Operationen eine zusammengesetzte Funktion einer oder auch mehrerer Variabelen. Die impliciten Funktionen dagegen sind definiert durch Gleichungen, welche die Art ihrer Abhängigkeit von den unabhängigen Variabelen ausdrücken. Die linken Seiten solcher Gleichungen sind also explicite Funktionen der verschiedenen Variabelen; sie werden gebildet, indem man mit diesen Variabelen solche Operationen nach einander ausführt, von denen jede für sich eine elementare oder einfache Funktion liefert.

Es genügt also, die *elementaren Funktionen einer einzigen Variabelen*, welche man in die Analysis einführen will, zu definieren, um einen genauen Begriff von der Gesamtheit aller expliciten Funktionen zu gewinnen, welche man zu betrachten hat; wir sagen ausdrücklich der expliciten Funktionen, denn die Gleichungen, von welchen die impliciten dann abhängen, definieren diese Funktionen im allgemeinen noch nicht in vollständiger Weise. Elementare Funktionen sind aber bisher für uns nur in sehr kleiner Anzahl vorhanden; sie bestehen *erstens* aus den Funktionen, welche aus einer der algebraischen Rechnungsoperationen hervorgehen (§ 2); *zweitens* aus der Exponentialfunktion und dem Logarithmus; *drittens* aus den Kreisfunktionen. Wir wollen nun diese verschiedenen Funktionen für den Fall, dass die unabhängige Variabele komplex ist, definieren.

360. Mit z bezeichnen wir die unabhängige Variabele und setzen

$$z = x + y\sqrt{-1} = x + iy, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

wobei dann x und y reelle Variabele sind. Zieht man zwei rechtwinklige Koordinatenaxen, so stellen x und y die Koordinaten eines Punktes M der Ebene dar, und man kann daher mit Cauchy sagen, dass jedem Werte der Variabelen z ein bestimmter Punkt, und umgekehrt jedem Punkte ein komplexer Wert entspricht. Sind ρ und ω die Polarkoordinaten des Punktes M, wobei der Winkel ω von der positiven Abscissenaxe an im Sinne der Drehung zur positiven Ordinatenaxe als positiv von 0 bis 2π (bei entgegengesetzter

Drehung als negativ von 0 bis -2π) gerechnet werden soll, so ist

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega,$$

und folglich

$$z = \varrho (\cos \omega + i \sin \omega).$$

Die Grössen ϱ und ω heissen der *Modul* (absolute Betrag) und das *Argument* der Variabelen z.

Damit die Variabele z alle möglichen Werte annimmt, muss man nach einander alle Punkte der Ebene darstellen; dazu genügt es, der Grösse ϱ alle Werte von 0 bis $+\infty$ beizulegen, und der Grösse ω alle Werte von 0 bis 2π oder besser die Werte von $-\pi$ bis $+\pi$. Alsdann entsprechen einem gegebenen Werte von z, d. h. gegebenen Werten von x und y, bestimmte Werte von ϱ und ω. Eine Ausnahme macht der Fall, dass $y = 0$ und x negativ ist. Dann hat man $\cos \omega = -1$ und $\sin \omega = 0$, und man kann nun beliebig $\omega = +\pi$ oder $\omega = -\pi$ setzen. Diese Zweideutigkeit kann man beseitigen, wenn man festsetzt, dass der Winkel ω, welcher zwischen $+\pi$ und $-\pi$ liegt, sich zwar der unteren Grenze $-\pi$ beliebig nähern kann, dieselbe jedoch nicht erreicht.

361. Eine ganze Funktion von z ist ein Polynom $f(z)$; dasselbe lässt sich immer auf die Form

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

bringen, wobei $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ Polynome mit reellen Koeffizienten sind. Jede rationale Funktion von z ist gleich einem Quotienten zweier ganzer Funktionen, und man kann derselben auch noch die Form geben:

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Hierbei sind dann $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ rationale gebrochene Funktionen mit reellen Koeffizienten. Führt man an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten Polarkoordinaten ein, so wird eine rationale Funktion immer von der Form

$$P + iQ,$$

wobei P und Q rationale Funktionen von ϱ, $\sin \omega$ und $\cos \omega$ sind.

362. Der einzige Fall unter den expliciten algebraischen Funktionen, den wir näher zu untersuchen haben, ist die Funktion z^m, in welcher m ein gebrochener Exponent $\frac{p}{q}$ ist, dessen Nenner q positiv sein soll.

Bezeichnet man mit h eine beliebige ganze Zahl und setzt man

$$z = \varrho\,(\cos\omega + i\sin\omega) = \varrho\,[\cos(\omega + 2h\pi) + i\sin(\omega + 2h\pi)],$$

so hat man nach der Moivreschen Formel:

$$z^m = \varrho^m\,[\cos m\,(\omega + 2h\pi) + i\sin m\,(\omega + 2h\pi)],$$

oder

$$z^m = \varrho^m\,[\cos(m\omega) + i\sin(m\omega)]\,[\cos(2mh\pi) + i\sin(2mh\pi)].$$

Dabei ist ϱ^m eine reelle und positive Grösse. Dieser Ausdruck für z^m kann q verschiedene Werte annehmen bei jedem festen Wertsystem, welches man den Grössen ϱ und ω erteilt hat. Diese q Werte ergeben sich, wenn man der ganzen Zahl h z. B. die q auf einander folgenden Werte $0, 1, 2 \ldots (q-1)$ beilegt. Die obige Formel umfasst also q verschiedene Funktionen, deren einfachste dem Werte $h = 0$ entspricht. Führt man diesen Wert ein, so erhält man

$$z^m = \varrho^m\,(\cos m\omega + i\sin m\omega),$$

und die Funktion z^m ist also vollständig definiert und eindeutig, wenn man der Grösse ω alle Werte von $+\pi$ bis $-\pi$, mit Ausnahme des Wertes $-\pi$, selber beilegt.

Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern.

363. Wenn die beiden Reihen

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, \ldots$$

$$v_0, v_1, v_2, \ldots v_{n-1}, \ldots,$$

deren Glieder reell sind, konvergieren und ihre Summen bezüglich U und V sind, so sagt man, dass auch die Reihe

$$u_0 + iv_0,\; u_1 + iv_1,\; u_2 + iv_2, \ldots, u_{n-1} + iv_{n-1}, \ldots$$

konvergent ist, und dass ihre Summe den Wert $U + iV$ hat.

Die nämliche Reihe heisst dagegen *divergent*, wenn die reellen Teile ihrer Glieder oder auch die mit i multiplizierten divergente Reihen bilden.

Lehrsatz I. *Eine Reihe ist konvergent, wenn die Moduln ihrer Glieder eine konvergente Reihe bilden.*

Denn heisst die gegebene Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_{n-1} + \dots,$$

und bezeichnen wir mit ϱ_n und ω_n Modul und Argument des allgemeinen Gliedes u_n, so dass also

$$u_n = \varrho_n (\cos \omega_n + i \sin \omega_n)$$

ist, so wird der Voraussetzung nach

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_{n-1} + \dots$$

eine konvergente Reihe; die beiden Reihen

$$\varrho_0 \cos \omega_0 + \varrho_1 \cos \omega_1 + \varrho_2 \cos \omega_2 + \dots + \varrho_{n-1} \cos \omega_{n-1} + \dots$$

$$\varrho_0 \sin \omega_0 + \varrho_1 \sin \omega_1 + \varrho_2 \sin \omega_2 + \dots + \varrho_{n-1} \sin \omega_{n-1} + \dots$$

sind dann ebenfalls konvergent (§ 97, Satz 3, und § 96, Folgesatz 1), folglich konvergiert auch der Definition gemäss die ursprüngliche Reihe.

Eine Reihe, bei welcher die Moduln der Glieder eine konvergente Reihe bilden, heisst eine *unbedingt konvergente.*

364. Lehrsatz II. *Sind*

$$1)\qquad \begin{array}{l} \mathrm{u}_0 + \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \dots \mathrm{u}_{n-1} + \dots \\ \mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + \dots \mathrm{v}_{n-1} + \dots \end{array}$$

zwei unbedingt konvergente Reihen, und sind die Werte ihrer Summen bezüglich S *und* S', *so konvergiert die Reihe*

$$2)\qquad \mathrm{w}_0 + \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 + \dots \mathrm{w}_{n-1} + \dots,$$

deren allgemeines Glied w_{n-1} *den Wert hat:*

$$\mathrm{w}_{n-1} = \mathrm{u}_0 \mathrm{v}_{n-1} + \mathrm{u}_1 \mathrm{v}_{n-2} + \mathrm{u}_2 \mathrm{v}_{n-3} + \dots \mathrm{u}_{n-2} \mathrm{v}_1 + \mathrm{u}_{n-1} \mathrm{v}_0,$$

und ihre Summe ist gleich dem Produkte SS'.

Dieser Satz wurde im § 104 für Reihen mit reellen Gliedern bewiesen; hier wird diese Beschränkung aufgehoben. Bezeichnen wir mit

3) $$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \dots \varrho_{n-1} + \dots,$$
$$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots \sigma_{n-1} + \dots$$

die mit den Moduln der Reihen 1) gebildeten Reihen, und setzen wir

$$\tau_{n-1} = \varrho_0 \sigma_{n-1} + \varrho_1 \sigma_{n-2} + \varrho_2 \sigma_{n-3} + \dots + \varrho_{n-2} \sigma_1 + \varrho_{n-1} \sigma_0,$$

so konvergiert die Reihe

4) $$\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \dots \tau_{n-1} + \dots$$

und ihre Summe ist gleich dem Produkt aus den Summen der Reihen 3) (§ 104). Sind nun S_n und S'_n die Summen der n ersten Glieder in den Reihen 1), und ebenso S''_n die Summe der n ersten Glieder der Reihe 2), sind ebenso die Grössen Σ_n, Σ'_n, Σ''_n die Summen aus den n ersten Gliedern der Reihen 3) und 4), so wird

$$S_n S'_n - S''_n = u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \dots (u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \dots u_1 v_{n-1}),$$

$$\Sigma_n \Sigma'_n - \Sigma''_n = \varrho_{n-1} \sigma_{n-1} + (\varrho_{n-1} \sigma_{n-2} + \varrho_{n-2} \sigma_{n-1}) + \dots (\varrho_{n-1} \sigma_1 + \varrho_{n-2} \sigma_2 + \dots \varrho_1 \sigma_{n-1}).$$

Da nun der Modul einer Summe von komplexen Werten niemals grösser sein kann als die Summe aus den Moduln der einzelnen Glieder, so erkennt man, dass die Differenz $S_n S'_n - S''_n$ ihrem Betrage nach kleiner oder höchstens gleich ist der Differenz $\Sigma_n \Sigma'_n - \Sigma''_n$. Diese letztere aber konvergiert, wie wir eben sagten, bei beliebig wachsenden Werten von n nach null; also konvergiert auch der Modul der Differenz $S_n S'_n - S''_n$ nach null. Wenn aber der Modul eines komplexen Wertes null wird, so werden auch der reelle und der imaginäre Bestandteil desselben null; es ist demnach

$$\lim (S_n S'_n - S''_n) = 0, \text{ d. h. } SS' = S''.$$

Der bewiesene Satz gilt nicht mehr ohne weiteres, wenn die beiden Reihen nicht mehr unbedingt konvergieren, d. h. nicht mehr konvergent bleiben, falls man die einzelnen Glieder durch ihre Modulwerte ersetzt. In diesem Falle muss man untersuchen, ob die Reihe 2) überhaupt konvergent ist.

365. Wir wollen hier noch einen wichtigen Satz beweisen, von dem wir bald eine Anwendung zu machen haben.

Lehrsatz III. *Ist* m *eine ganze positive Zahl,* z *ein gegebener komplexer Wert,* Z *eine Variabele, welche die Grenze* z *hat, wenn* m *unendlich wird, so konvergiert der Ausdruck*

$$\left(1+\frac{Z}{m}\right)^m$$

nach einer bestimmten Grenze, nämlich nach dem Summenwert der konvergenten Reihe

$$1) \qquad 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\frac{z^n}{n!}+\dots,$$

wenn man die ganze positive Zahl m über jeden Betrag hinaus wachsen lässt.

Zuvörderst erkennt man, dass diese Reihe konvergent ist, denn bezeichnet man den Modul von z mit ϱ, so konvergiert die Reihe

$$1+\frac{\varrho}{1}+\frac{\varrho^2}{2!}+\frac{\varrho^3}{3!}+\dots\frac{\varrho^n}{n!}+\dots$$

nach einer endlichen Grenze, nämlich nach dem Werte e^ϱ.

Bezeichnen wir nun mit S die Summe der Reihe 1), mit S_n die Summe ihrer n ersten Glieder, und setzen wir

$$2) \qquad S = S_n + R_n,$$

so ist

$$R_n = \frac{z^n}{n!}\left[1+\frac{z}{n+1}+\frac{z^2}{(n+1)(n+2)}+\dots\right].$$

Der Modul der in der Klammer enthaltenen Summe ist kleiner als der Modul der Summe

$$1+\frac{\varrho}{n}+\frac{\varrho^2}{n^2}+\dots,$$

welche man erhält, indem man z durch seinen Modul ϱ, und die Divisoren $(n+1)$, $(n+2)\cdots$ durch n ersetzt. Diese Summe ist gleich $\frac{1}{1-\frac{\varrho}{n}}$. Ist also θ irgend eine komplexe

Grösse, deren Modul kleiner als 1 ist, so kann man schreiben:

$$3) \qquad R_n = \frac{z^n}{n!} \frac{\theta}{1 - \frac{\varrho}{n}}.$$

Wenn wir nun die ganze Zahl m grösser als n annehmen, und die Potenz $\left(1 + \frac{Z}{m}\right)^m$ nach der Binomialformel für ganze und positive Exponenten entwickeln, welche für komplexe Werte von z ebenso wie für reelle lautet, so wird

$$4) \qquad \left(1 + \frac{Z}{m}\right)^m = S'_n + R'_n,$$

wobei wir mit S'_n die Summe der n ersten Glieder, und mit R'_n die Summe der übrigen bezeichnen, d. h. es ist

$$S'_n = 1 + Z + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{Z^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{Z^3}{3!} + \cdots \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-2}{m}\right)\frac{Z^{n-1}}{n-1!},$$

$$R'_n = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)\frac{Z^n}{n!}\left[1 + \frac{\left(1 - \frac{n}{m}\right)Z}{n+1} + \cdots\right].$$

Der Modul von Z heisse P. Für die in der Klammer enthaltene Summe, deren Gliederzahl eine endliche ist, wird der Modul kleiner als die Summe der unendlichen Reihe

$$5) \qquad 1 + \frac{P}{n} + \frac{P^2}{n^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{P}{n}}.$$

Bezeichnet man also mit θ eine komplexe Grösse, deren Modul kleiner als 1 ist, so hat man:

$$R'_n = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)\frac{Z^n}{n!}\frac{\theta}{1 - \frac{P}{n}}.$$

Setzt man endlich

$$6) \qquad \varepsilon_k = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{m}\right)\frac{Z^k}{k!} - \frac{z^k}{k!},$$

so wird

$$S'_n - S_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots \varepsilon_{n-1},$$

und also

$$7) \quad \left(1 - \frac{Z}{m}\right)^m - S = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots \varepsilon_{n-1} + R'_{n-1} - R_n.$$

Lässt man nun m über alle Grenzen hinaus wachsen, während n einen festen beliebig gross gewählten Wert behält, so konvergieren die Grössen ε nach der Grenze null, gemäss der Gleichung 6), weil Z der Annahme zufolge nach dem Werte z konvergiert. Der Wert von R'_n wird nach Gleichung 5):

$$\frac{z^n}{n!} \frac{\theta'}{1 - \frac{\varrho}{n}},$$

wobei θ' ein komplexer Wert ist, dessen Betrag zwischen 0 und 1 liegt. Also konvergiert die rechte Seite der Gleichung 8) nach einer Grenze, die man durch

$$\frac{z^n}{n!} \frac{\theta' - \theta}{1 - \frac{\varrho}{n}}$$

bezeichnen kann. Dieser Wert ist aber seinem Betrage nach beliebig klein; denn die willkürliche Grösse n kann von vornherein so klein gewählt werden, dass $\frac{z^n}{n!}$ dem Betrage nach beliebig klein wird. Hieraus folgt, dass

$$\lim \left(1 + \frac{Z}{m}\right)^m = S$$

wird, womit die Behauptung des Satzes bewiesen ist.

Definition der Exponentialfunktion einer complexen Variabelen.

366. Da die Reihe

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \frac{z^{n-1}}{n-1!} + \cdots$$

bei jedem reellen oder komplexen Werte von z konvergent ist, so ist der Grenzwert ihrer Summe eine Funktion der

Variabelen z. Bezeichnet man diese Funktion mit $\varphi(z)$, so ist ihre Definition:

$$\varphi(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \frac{z^{n-1}}{n-1!} + \cdots$$

Wählt man für z einen andern Wert z_1, so ist

$$\varphi(z_1) = 1 + \frac{z_1}{1} + \frac{z_1^2}{2!} + \cdots \frac{z_1^{n-1}}{n-1!} + \cdots$$

Da diese beiden Reihen unbedingt konvergieren, so kann man ihr Produkt: $\varphi(z) . \varphi(z_1)$ durch eine neue Reihe darstellen, deren erstes Glied den Wert 1, und deren allgemeines Glied die Form hat:

$$\frac{z_1^{n-1}}{n-1} \cdot 1 + \frac{z_1^{n-2}}{n-2!} \cdot \frac{z}{1} + \frac{z_1^{n-3}}{n-3!} \cdot \frac{z^2}{2!} + \cdots \frac{z_1}{1} \cdot \frac{z^{n-1}}{n-2!} + 1 \cdot \frac{z^{n-1}}{n-1!}.$$

Dieser Ausdruck ist aber gleich:

$$\frac{(z+z_1)^{n-1}}{n-1!}.$$

Mithin hat die neue Reihe den Wert $\varphi(z+z_1)$, und folglich besteht die Gleichung:

$$2) \qquad \varphi(z+z_1) = \varphi(z) . \varphi(z_1).$$

Man kann diese grundlegende Gleichung auch ohne das Multiplikationstheorem zweier Reihen beweisen, wenn man den im § 365 bewiesenen Satz anwendet. Denn bezeichnet man mit m eine ganze positive Zahl, so ist

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m \left(1+\frac{z_1}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{z+z_1+\frac{zz_1}{m}}{m}\right)^m.$$

Lässt man nun m beliebig wachsen, so erhält man als Grenze

$$\lim \left(1+\frac{z}{m}\right)^m \cdot \lim \left(1+\frac{z_1}{m}\right)^m = \lim \left(1 + \frac{z+z_1+\frac{zz_1}{m}}{m}\right)^m,$$

oder nach § 365

$$\varphi(z) . \varphi(z_1) = \varphi(z+z_1).$$

Bezeichnet man also mit $z, z_1, z_2 \ldots z_{\mu-1}$ irgend welche komplexe Werte, so ist

$$\varphi(z)\,\varphi(z_1)\,\varphi(z_2)\ldots\varphi(z_{\mu-1}) = \varphi(z+z_1+z_2+\cdots z_{\mu-1}),$$

und nimmt man

$$z = z_1 = z_2 = \cdots z_{\mu-1}$$

an, so erhält man

3) $$[\varphi(z)]^{\mu} = \varphi(\mu z),$$

wobei μ irgend eine ganze positive Zahl ist.

Ist z ein positiver oder negativer Bruch $\pm\frac{\nu}{\mu}$, so wird

$$\left[\varphi\left(\pm\frac{\nu}{\mu}\right)\right]^{\mu} = \varphi(\pm\nu) = [\varphi(\pm 1)]^{\nu}.$$

Die Gleichung 2) aber giebt für $z = 1$, $z_1 = -1$

$$\varphi(-1)\cdot\varphi(+1) = \varphi(0) = 1,$$

also

$$\varphi(-1) = [\varphi(1)]^{-1},$$

und folglich ist:

$$\left[\varphi\left(\pm\frac{\nu}{\mu}\right)\right]^{\mu} = [\varphi(1)]^{\pm\nu}.$$

Zieht man die μ^{te} Wurzel aus, so wird

$$\varphi\left(\pm\frac{\nu}{\mu}\right) = [\varphi(1)]^{\pm\frac{\nu}{\mu}}.$$

und schreibt man z an Stelle von $\pm\frac{\nu}{\mu}$, so ist

$$\varphi(z) = [\varphi(+1)]^{z}.$$

Aus der Funktionalgleichung $\varphi(z)\,.\,\varphi(z_1) = \varphi(z+z_1)$ kann man demnach schliessen, dass die Funktion $\varphi(z)$ bei jedem positiven oder negativen rationalen Wert von z eine Exponentialfunktion ist, deren Basis die Konstante $\varphi(+1)$ bildet.

Aus der Gleichung 1) für $\varphi(z)$ aber folgt weiter:

$$\varphi(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e,$$

also ist bei jedem rationalen reellen Wert von z, und ebenso auch für jeden irrationalen

$$\varphi(z) = e^{z}.$$

Die Gleichung 2), welche die charakteristische Eigenschaft der Funktion $\varphi(z)$ ausdrückt, besteht bei allen Werten der Variabelen z. Es ist demnach angezeigt, dass man die

für einen reellen Wert von z gültige Bezeichnungsweise auf alle Werte ausdehnt, und demnach setzt

$$5)\qquad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

Diese Gleichung liefert die Definition der Exponentialfunktion e^z auch für komplexe Werte der Variabelen z; die charakteristische Eigenschaft derselben besteht in der Gleichung 2):

$$e^z \cdot e^{z_1} = e^{z+z_1}.$$

Definition der direkten Kreisfunktionen einer komplexen Variabelen.

367. Ist die Variabele z reell, so sind die Funktionen $\cos z$ und $\sin z$ in konvergente Potenzreihen entwickelbar, und man erhält die Gleichungen, durch welche diese Funktionen analytisch definiert sind, nämlich:

$$1)\qquad \begin{cases} \cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + - \cdots, \\[2ex] \sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + - \cdots \end{cases}$$

Diese Reihen bleiben konvergent, auch wenn z einen beliebigen komplexen Wert bezeichnet; ja man kann hinzufügen, dass sie unbedingt konvergent bleiben. Denn bezeichnet ϱ den Modul von z, so sind die Reihen gebildet aus den Moduln der Glieder der beiden vorigen:

$$1 + \frac{\varrho^2}{2!} + \frac{\varrho^4}{4!} + \frac{\varrho^6}{6!} + \cdots,$$

$$\varrho + \frac{\varrho^3}{3!} + \frac{\varrho^5}{5!} + \frac{\varrho^7}{7!} + \cdots,$$

und diese Reihen konvergieren nach den Grenzen

$$\frac{e^\varrho + e^{-\varrho}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{e^\varrho - e^{-\varrho}}{2}.$$

Ist also z eine komplexe Variabele, so definieren wir die Funktionen $\cos z$ und $\sin z$ als die Grenzen der konvergenten Reihen

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + - \cdots,$$

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + - \cdots$$

Die übrigen direkten Kreisfunktionen werden alsdann durch die Gleichungen definiert

2) $\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$, $\sec z = \frac{1}{\cos z}$, $\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$.

Beziehungen zwischen den Exponentialfunktionen und den goniometrischen.

368. Setzt man in der Gleichung

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

für z den Wert iz und $-iz$ ein, so folgt:

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right),$$

$$e^{-iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) - i\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right),$$

d. h.

1)
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$
$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

In diesen Gleichungen bezeichnet z irgend einen reellen oder komplexen Wert. Aus denselben folgt:

2) $$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

also

3) $$\operatorname{tang} z = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Die goniometrischen Funktionen lassen sich also vermittelst Exponentialfunktionen darstellen, und umgekehrt kann man die Exponentialfunktionen durch goniometrische ersetzen. Bezeichnet k eine beliebige ganze Zahl, so ist, gemäss den Gleichungen 1):

4) $$e^{2k\pi i} = 1, \quad e^{(2k+1)\pi i} = -1.$$

369. Ersetzt man in der Fundamentalgleichung:

$$e^{z_1} \cdot e^z = e^{z+z_1}$$

z und z_1 durch iz und iz_1, ferner durch $-iz$ und $-iz_1$, so wird nach den Gleichungen 1):

$$5) \quad \begin{aligned} \cos(z+z_1) + i\sin(z+z_1) &= (\cos z + i\sin z)(\cos z_1 + i\sin z_1), \\ \cos(z+z_1) - i\sin(z+z_1) &= (\cos z - i\sin z)(\cos z_1 - i\sin z_1). \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$6) \quad \begin{aligned} \cos(z+z_1) &= \cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1, \\ \sin(z+z_1) &= \sin z \cos z_1 + \cos z \sin z_1. \end{aligned}$$

Dies sind die Grundgleichungen der Trigonometrie. Sie gelten, wie hier bewiesen ist, für zwei beliebige, reelle oder komplexe Werte von z und z_1; demnach bleiben auch alle Formeln, welche in der Trigonometrie für reelle Werte der Variabelen aus diesen beiden abgeleitet werden, bei komplexen Werten bestehen.

Nach der Gleichung 3) des § 366 ist, wenn man mit μ und ν positive ganze Zahlen bezeichnet:

$$(e^{\pm z})^\nu = \left(e^{\pm\frac{\nu}{\mu}z}\right)^\mu = \left(e^{\pm\frac{\nu}{\mu}z}\right)^\mu \left(e^{\pm\frac{2k\pi i}{\mu}}\right)^\mu = \left[e^{\pm\left(\frac{\nu}{\mu}z \pm \frac{2k\pi i}{\mu}\right)}\right]^\mu.$$

Ersetzt man z durch iz, und zieht man die μ^{te} Wurzel aus, so wird

$$7) \quad (\cos z \pm i\sin z)^{\frac{\nu}{\mu}} = \cos\left(\frac{\nu}{\mu}z \pm \frac{2k\pi}{\mu}\right) \pm i\sin\left(\frac{\nu}{\mu}z \pm \frac{2k\pi}{\mu}\right).$$

Dies ist die Moivresche Formel für den Fall eines beliebig gebrochenen reellen Exponenten $\frac{\nu}{\mu}$ und ausgedehnt auf eine beliebige komplexe Variabele z. Nimmt man ν und μ als relativ prim an, so hat die rechte Seite dieser Gleichung μ verschiedene Werte, welche den positiven Werten $0, 1, 2, \ldots \mu - 1$ der Zahl k entsprechen.

370. Die vorigen Formeln lassen jede der Funktionen e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tang} z \ldots$ der komplexen Variabelen $z = x + iy$ auf die Form $p + iq$ bringen.

Denn es wird:

$$8) \quad e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y),$$

und nach den Gleichungen 6):

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy),$$
$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy),$$

also nach den Gleichungen 2)

$$9) \begin{cases} \cos z = \cos(x + iy) = \cos x \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}, \\ \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}. \end{cases}$$

Ebenso wird

$$\operatorname{tang}(x + iy) = \frac{\sin(x + iy)}{\cos(x + iy)} = \frac{2 \sin(x + iy) \cos(x - iy)}{2 \cos(x + iy) \cos(x - iy)},$$

oder

$$\operatorname{tang}(x + iy) = \frac{\sin 2x + \sin(2iy)}{\cos 2x + \cos(2iy)} = \frac{\sin 2x + i \dfrac{e^{2y} - e^{-2y}}{2}}{\cos 2x + \dfrac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}}.$$

Für $x = 0$ ergeben die Gleichungen 9):

$$10) \qquad \cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \sin(iy) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} i,$$

hieraus folgt durch Division:

$$11) \qquad \operatorname{tang}(iy) = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} i.$$

Der Logarithmus und die inversen Kreisfunktionen einer komplexen Variabelen.

371. Als den *natürlichen Logarithmus* eines gegebenen Wertes $z = x + iy$ bezeichnet man jede komplexe Zahl $u + iv$, für welche

$$1) \qquad e^{u + iv} = x + iy$$

wird. Setzt man $x = \varrho \cos \omega$, $y = \varrho \sin \omega$, wobei ϱ positiv ist und ω zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, so ist

$$x + iy = \varrho(\cos \omega + i \sin \omega) = \varrho e^{i\omega},$$

und die Gleichung 1) wird:

$$e^u(\cos v + i \sin v) = \varrho(\cos \omega + i \sin \omega).$$

Damit diese Gleichung besteht, müssen die Moduln beiderseits gleich sein und die Argumente sich nur um positive

oder negative Vielfache der Kreisperipherie unterscheiden. Es muss also sein

$$e^u = \varrho, \quad \text{d. h.} \quad u = l(\varrho),$$

und

$$v = \omega + 2k\pi,$$

wobei k eine unbestimmte, positive oder negative ganze Zahl ist.

Hieraus folgt, dass eine komplexe Zahl $z = \varrho e^{i\omega}$ unendlich viele natürliche Logarithmen besitzt, welche durch die Gleichung bestimmt sind:

$$2) \qquad l(z) = l(\varrho) + (\omega + 2k\pi)i.$$

Setzt man $k = 0$, so erhält man, nach einer Bezeichnung von Cauchy, den Hauptwert des Logarithmus von z, und die Gleichung

$$3) \qquad l(z) = l(\varrho) + \omega i,$$

in welcher ω zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, definiert also eine eindeutig bestimmte Funktion der Variabelen z, wenn man den Grenzwert $-\pi$ ausschliesst. In den Gleichungen 2) und 3) bezeichnet $l(\varrho)$ den arithmetischen Wert des natürlichen Logarithmus der positiven Zahl ϱ.

Ist der Modul ϱ gleich eins, so ist $l(\varrho)$ null und die Gleichung 3) ergiebt:

$$l(z) = i\omega.$$

Ist insbesondere $z = -1$, so wird das Argument ω gleich π, und die Gleichung 4) ergiebt für den Hauptwert des Logarithmus der Zahl -1:

$$l(-1) = i\pi.$$

372. Die Ausdrücke

$$\text{arc}\sin z, \quad \text{arc}\cos z, \quad \text{arc tang}\, z \ldots$$

repräsentieren für jeden reellen Wert von z unendlich viele Werte. Bei den ersten beiden war der Wert von z (§ 45) auf das Intervall von -1 bis $+1$ beschränkt, bei den übrigen war er unbeschränkt. Ebenso erhalten die Ausdrücke unendlich viele Werte, wenn z eine unbeschränkte komplexe Variabele ist. Wir wollen hier nur angeben, wie man diese verschiedenen Werte, welche einem gegebenen Wert von z entsprechen, erhält, und wählen als Beispiel die Funktion arc cos z.

Es sollen zwei reelle Grössen u und v bestimmt werden, derart, dass

$$\cos(u + iv) = z = x + iy,$$

wenn x und y gegebene reelle Grössen sind. Diese Gleichung wird

$$\cos u \frac{e^v + e^{-v}}{2} - i \sin u \frac{e^v - e^{-v}}{2} = x + iy,$$

und demnach müssen die beiden Unbekannten u und v den Gleichungen genügen:

$$1) \qquad \cos u \frac{e^v + e^{-v}}{2} = x, \quad \sin u \frac{e^v - e^{-v}}{2} = -y.$$

Hieraus folgt:

$$2) \qquad e^v = \frac{x}{\cos u} - \frac{y}{\sin u}, \quad e^{-v} = \frac{x}{\cos u} + \frac{y}{\sin u}.$$

Multipliziert man dieselben, so wird:

$$\frac{x^2}{\cos u^2} - \frac{y^2}{\sin u^2} = 1,$$

oder:

$$\sin^4 u - (1 - x^2 - y^2) \sin^2 u - y^2 = 0.$$

Löst man die Gleichung auf, so wird:

$$\sin^2 u = \frac{1 - x^2 - y^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Die Quadratwurzel muss mit dem positiven Zeichen genommen werden, damit $\sin^2 u$ positiv wird.

Ebenso wird

$$\cos^4 u - (1 + x^2 + y^2) \cos^2 u - x^2 = 0,$$

also:

$$\cos^2 u = \frac{1 + x^2 + y^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{1 + x^2 + y^2}{2}\right)^2 - x^2}$$

$$= \frac{x^2}{\frac{1 + x^2 + y^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + x^2 + y^2}{2}\right)^2 - x^2}}.$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus und beachtet, dass $\cos u$ nach der Gleichung 1) dasselbe Vorzeichen hat wie x, so wird

$$3) \quad \cos u = \frac{x}{+\left[\frac{1 + x^2 + y^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + x^2 + y^2}{2}\right)^2 - x^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Das Vorzeichen der im Nenner stehenden Quadratwurzel ist positiv zu nehmen, damit $\cos u$ dem Betrage nach kleiner als 1 werde. Setzen wir nun:

$$4)\quad u_0 = \arccos \frac{x}{\left[\frac{1+x^2+y^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+x^2+y^2}{2}\right)^2 - x^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$v_0 = \log\left(\frac{x}{\cos u_0} - \frac{y}{\sin u_0}\right),$$

wobei u_0 eine Grösse zwischen 0 und π bedeutet, so folgt aus der Gleichung 3):

$$5)\qquad u = 2k\pi \pm u_0,$$

wobei k jede ganze Zahl sein kann, und nach den Gleichungen 2):

$$e^v = \frac{x}{\cos u_0} \mp \frac{y}{\sin u_0}, \quad e^{-v} = \frac{x}{\cos u_0} \pm \frac{y}{\sin u_0},$$

also

$$6)\qquad v = \pm v_0.$$

Das zweideutige Zeichen $\pm$ ist dabei ebenso wie in der Gleichung 5) zu bestimmen. Demnach hat man

$$7)\qquad \arccos(x+iy) = 2k\pi \pm (u_0 + iv_0).$$

Wenn also zwei reelle oder komplexe Zahlen den nämlichen Kosinus besitzen, so ist die Summe oder Differenz derselben gleich einem ganzen Vielfachen der Kreisperipherie.

In dem besonderen Falle, dass $y = 0$ ist, ergiebt die Gleichung 3):

$$\cos u = \frac{x}{\left[\frac{1+x^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Ist nun $x^2 < 1$, so hat man

$$\cos u = \frac{x}{\left[\frac{1+x^2}{2} + \frac{1-x^2}{1}\right]^{\frac{1}{2}}} = x,$$

also

$$\cos u_0 = x, \; u_0 = \arccos x \text{ und } v_0 = 0.$$

Mithin ist

$$\text{arc} \cos x = 2k\pi \pm u_0.$$

Ist aber $x^2 > 1$, so hat man

$$\cos u = \frac{x}{+\left[\frac{1+x^2}{2} + \frac{x^2-1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{+x};$$

also wenn x positiv ist, und zwischen $+1$ und $+\infty$ liegt, so ist

$$\cos u_0 = +1, \quad u_0 = 0,$$

und es wird nach Gleichung 1):

$$\frac{e^v + e^{-v}}{2} = x, \quad \text{also } e^v = x + \sqrt{x^2-1}, \quad v = l(x + \sqrt{x^2-1}),$$

demnach

$$\text{arc} \cos x = 2k\pi + il(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Ist dagegen x negativ, zwischen -1 und $-\infty$ gelegen, so ist

$$\cos u_0 = -1, \quad u_0 = \pi,$$

und es wird nach Gleichung 1):

$$\frac{e^v + e^{-v}}{2} = -x, \quad e^v = -x + \sqrt{x^2-1}, \quad v = l(-x + \sqrt{x^2-1}),$$

demnach

$$\text{arc} \cos x = (2k+1)\pi + il(-x + \sqrt{x^2-1}).$$

373. Die Funktionen $l(z)$, $\text{arc} \sin z, \ldots$ gehören ebenso, wie die irrationalen expliciten algebraischen Funktionen zur Klasse der impliciten Funktionen u, welche durch eine Gleichung

$$F(u, z) = 0$$

definiert werden können, deren linke Seite eine eindeutige Funktion der beiden Variabelen u und z ist, die sich nicht auf die Form bringen lässt $u = f(z)$, wobei $f(z)$ eindeutig bestimmt ist. Diese Gleichung lässt vielmehr, bei jedem Werte von z, eine endliche oder unendliche Anzahl verschiedener Lösungen für u zu, die mit z variieren. Um eine dieser Lösungen u als Funktion von z betrachten zu können, muss man sie von den übrigen Lösungen unterscheiden; unter diesen kann es aber auch solche geben, die für gewisse besondere Werte von z mit der betrachteten Lösung zusammenfallen.

Die Stetigkeit.

374. Die Definition der Stetigkeit, welche im § 12 gegeben wurde, lässt sich auch auf Funktionen einer komplexen Variabelen anwenden; nämlich folgendermassen:

Eine eindeutig bestimmte Funktion $f(z)$ *der komplexen Variabelen* z *heisst stetig für die Werte von* z*, welche innerhalb eines gegebenen Bereiches der Ebene* x, y *liegen, wenn für jeden dieser Werte von* z *der Modul der Differenz*

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z)$$

zugleich mit dem Modul von Δz *unendlich abnimmt, oder was dasselbe besagt, mit* Δz *unendlich klein wird.*

Diese Forderung besagt: zu jeder noch so kleinen absoluten Grösse δ muss sich um den betrachteten Punkt x, y, welcher dem Werte $z = x + iy$ entspricht, als Mittelpunkt ein Kreis mit dem Radius $\varrho = \mathrm{mod}(\Delta z)$ ermitteln lassen, so dass alle Funktionswerte, welche zu den Punkten im Innern dieses Kreises gehören, von dem Werte $f(z)$ um eine Grösse unterschieden sind, deren Modul kleiner ist als δ.

Zerlegt man die Funktion $f(z)$ in ihren reellen und imaginären Bestandteil: $P + iQ$, so sind die Grössen P und Q Funktionen der beiden reellen Variabelen x und y, und die Forderung der Stetigkeit lässt sich auch so formulieren: Die Funktionen P und Q müssen stetige Funktionen der beiden Variabelen x und y sein. Denn beschreiben wir um den Punkt x, y als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius ϱ, so wird ein im Innern dieses Kreises gelegener Punkt die Koordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ erhalten, wobei

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \theta \, . \, \varrho$$

ist, wenn Θ einen Bruch zwischen 0 und 1 bedeutet. Der Wert der Funktion an dieser Stelle werde mit

$$f(z + \Delta z) = (P + \Delta P) + i(Q + \Delta Q)$$

bezeichnet, so dass

$$\Delta f(z) = \Delta P + i \Delta Q.$$

Der Modul dieses Ausdruckes ist

$$\mathrm{mod}\,[\Delta f(z)] = \sqrt{\Delta P^2 + \Delta Q^2}.$$

Soll derselbe durch Wahl von ϱ kleiner sein als eine beliebig vorgegebene Grösse δ, so muss auch

$$\text{abs}[\Delta P] < \delta \quad \text{und} \quad \text{abs}[\Delta Q] < \delta$$

sein, womit die Stetigkeit der Funktionen P und Q ausgesprochen ist (§ 32); und ebenso folgt aus der Stetigkeit dieser Funktionen auch die Stetigkeit von $P + iQ$.

Aus der Definition der Stetigkeit kann man leicht beweisen, dass jede ganze algebraische Funktion bei allen Werten von z stetig ist; dasselbe gilt auch von der Funktion e^z; denn es ist:

$$e^{z+\Delta z} - e^z = e^z(e^{\Delta z} - 1).$$

Bezeichnet man also mit h den Modul von Δz, mit θ einen Wert, dessen Modul zwischen 0 und 1 liegt, so kann man setzen (§ 365):

$$e^{z+\Delta z} - e^z = \frac{\theta \Delta z}{1-h} \cdot e^z,$$

und es ist leicht ersichtlich, dass der Modul dieser Differenz gleichzeitig mit dem Modul von Δz unendlich klein wird.

Die Funktionen $\cos z$ und $\sin z$ sind Summen von Exponentialfunktionen, und folglich sind sie auch stetige Funktionen bei allen Werten der Variabelen.

Die rationalen gebrochenen Funktionen, sowie die Funktionen $\text{tang}\, z$, $\text{cotg}\, z$, $\sec z$, $\text{cosec}\, z$ werden nur unstetig, wenn sie durch unendliche Werte hindurchgehen.

Dies gilt aber nicht mehr für die irrationalen Funktionen; und da die Stetigkeit ein Haupterfordernis ist für die Entwickelung einer Funktion in Potenzreihen, so müssen wir, um die Begriffe, die hier in Betracht kommen, genau zu fixieren, wenigstens einen sehr einfachen Fall vollständig diskutieren.

Wie wir schon sagten, kann die Variabele

$$z = x + iy = \varrho(\cos\omega + i\sin\omega)$$

alle möglichen Werte annehmen, wenn man der Grösse ϱ die Werte von 0 bis $+\infty$, und der Grösse ω die Werte von $-\pi$ bis $+\pi$ erteilt. Demnach muss eine stetige Funktion von z zugleich auch eine stetige Funktion von ϱ und ω sein, und dabei muss ferner, wenn ε einen reellen beliebig kleinen Wert bezeichnet, die Differenz der Werte, welche die Funktion für

$$z = \varrho[\cos(-\pi+\varepsilon) + i\sin(-\pi+\varepsilon)] \quad \text{und} \quad z = \varrho[\cos(+\pi-\varepsilon) + i\sin(+\pi-\varepsilon)]$$

annimmt, mit ε beliebig klein werden, weil ja die Differenz dieser Werte von z, nämlich $2i\varrho\sin\varepsilon$ selbst beliebig klein wird;

umgekehrt ist auch mit diesen beiden Bedingungen die Stetigkeit der Funktion gesichert. Die zweite Bedingung kann man auch dadurch ausdrücken, dass man sagt, die Funktion muss für $\omega = -\pi$ und für $\omega = +\pi$ dieselben Werte erhalten.

375. Betrachten wir nun den Ausdruck

$$(1+z)^m,$$

in welchem m ein rationaler Bruch sein soll, dessen Nenner grösser ist als 1. Setzt man:

$$z = \varrho(\cos\omega + i\sin\omega), \quad 1 + z = r(\cos\psi + i\sin\psi),$$

und unterwirft dabei ψ, ebenso wie ω, der Bedingung, dass ω zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ bleiben soll, ohne die untere Grenze zu erreichen, so wird

$$1 + \varrho\cos\omega = r\cos\psi, \quad \varrho\sin\omega = r\sin\psi,$$

daher:

$$r = \sqrt{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}, \quad \cos\psi = \frac{1+\varrho\cos\omega}{r}, \quad \sin\psi = \frac{\varrho\sin\omega}{r}.$$

Damit ist der Modul r und das Argument ψ vollständig bestimmt. Die Werte der Funktion $(1+z)^m$ werden nun:

$$r^m(\cos m\psi + i\sin m\psi)(\cos 2mk\pi + i\sin 2mk\pi),$$

wobei k eine ganze Zahl ist. Um unter diesen verschiedenen Werten eine Funktion, die wir betrachten wollen, zu definieren, setzen wir:

$$(1+z)^m = r^m(\cos m\psi + i\sin m\psi).$$

Von dieser Funktion behaupten wir: sie ist stetig, solange der Modul von z kleiner als 1 ist; sie wird dagegen auch unstetig in einem Gebiete, in welchem der Modul von z grösser als 1 ist.

Denn die obigen Gleichungen zeigen, dass r und ψ sich stetig ändern, wenn ϱ und ω stetig variiert werden, und zwar bei allen Werten von ϱ und ω. Wenn aber ϱ kleiner als 1 ist, so sieht man, dass $\cos\psi$ stets positiv ist; mithin bleibt ψ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, und da $\sin\psi = 0$ ist für $\omega = \pm\pi$, so wird der Winkel ψ null für $\omega = -\pi$ und $\omega = +\pi$. Lässt man also bei einem festen Werte von r den Winkel ω von $+\pi$ bis $-\pi$ variieren, so variiert ψ vom Werte 0 bis zu einem

bestimmten Maximalwert, nimmt dann wieder ab und wird 0, wenn $\omega = 0$ ist, wird dann negativ bis zu einem Minimalwert, wenn ω negativ wird, und erreicht den Wert 0 für $\omega = -\pi$. Hieraus folgt auch, dass die Funktion $(1+z)^m$ stetig mit ϱ und ω variiert, und dass sie überdies, wenn ϱ konstant bleibt, für $\omega = -\pi$ und für $\omega = +\pi$ denselben Wert erhält; sie ist also eine stetige Funktion von z.

Nehmen wir aber nun an, dass z Werte erhält, deren Modul grösser ist als 1. Giebt man ω die Werte $-(\pi - \varepsilon)$ und $+(\pi - \varepsilon)$, wobei ε beliebig klein wird, so konvergiert $\cos\psi$ in beiden Fällen nach -1, und $\sin\psi$ nach 0; aber im ersten Falle konvergiert der Sinus nach dieser Grenze, indem er negative Werte durchläuft, im zweiten Falle, indem er positive Werte durchläuft. Hieraus folgt, dass für $\omega = -\pi$, ψ gleich $-\pi$, und für $\omega = +\pi$ auch $\psi = +\pi$ wird. Folglich erhält die Funktion $(1+z)^m$ für $\omega = -\pi$ und $\omega = +\pi$ zwei verschiedene Werte, deren Differenz gleich $2ir^m \sin m\pi$ ist; diese Differenz ist nur null, wenn m eine ganze Zahl ist, und folglich ist in jedem andern Falle die Funktion unstetig.

Die nämlichen Betrachtungen lehren auch, dass die Funktion $l(1+z)$ stetig bleibt für alle Werte von z, deren Modul kleiner als 1 ist, dass sie aber unstetig wird, wenn z Werte annimmt, deren Modul grösser ist als 1.

Die Ableitung und das Differential einer Funktion einer komplexen Variabelen.

376. Die Definitionen der Ableitung und des Differentiales, welche für Funktionen einer reellen Variabelen gegeben worden sind, lassen sich auch auf Funktionen einer komplexen Variabelen ausdehnen. Bezeichnet $f(z)$ eine Funktion der komplexen Variabelen $z = x + iy$, d. h. nach unserer engeren Definition eine Variabele, welche durch die elementaren expliciten Operationen, der algebraischen sowohl wie der transscendenten, ausgeführt mit der komplexen Variabelen z definiert ist, oder wie wir gleich sagen wollen, um alle diese Fälle zu umfassen, eine Variabele, die als Potenzreihe gebildet mit der

Variabelen z definiert ist, so ist die Ableitung $f'(z)$ die Grenze, welcher der Quotient

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

oder

$$\frac{f(x+iy+\Delta x+i\Delta y)-f(x+iy)}{\Delta x+i\Delta y}$$

zustrebt, wenn $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ nach null konvergiert. Letzteres erfordert, dass Δx und Δy zugleich null werden.

Über den Wert dieser Ableitung ist nun folgendes zu bemerken: Betrachten wir zunächst allgemein die Funktion $f(z)$ als Funktion der reellen Variabelen x und y, so ist

$$f(z) = u + iv \quad \text{und} \quad f(z+\Delta z) = u + \Delta u + i(v+\Delta v),$$

wenn man mit Δu und Δv die Inkremente der Funktionen u und v bezeichnet, welche zu den Werten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ der Variabelen x und y gehören. Es ist also

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\left(\frac{1}{1+i\frac{\Delta y}{\Delta x}}\right) + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\left(\frac{1}{1+i\frac{\Delta y}{\Delta x}}\right).$$

Die Differenzenquotienten $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ gehen, wenn Δx und Δy gleichzeitig nach null konvergieren, in die totalen Differentialquotienten der Funktionen u und v über, wenn wir, wie dies bei den regulären Funktionen im allgemeinen der Fall ist, die partiellen Ableitungen der Funktionen u und v als stetige Funktionen der beiden Variabelen x und y annehmen; demnach wird

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{1+i\frac{dy}{dx}} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{1+i\frac{dy}{dx}},$$

d. h. die Ableitung der Funktion $f(z)$ ist, wenn keine nähere Annahme über die Beschaffenheit der Funktion gemacht wird, von dem Grenzwerte des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ abhängig.

Insbesondere kann aber der Quotient

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) : 1 + i\,\frac{dy}{dx}$$

von diesem Differentialquotienten ganz unabhängig werden; dies tritt ein, wenn

$$i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y},$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ist.

Jede Funktion $\varphi(x, y)$ der beiden Variabelen x und y kann, wie dies auch Cauchy gethan hat, als Funktion der komplexen Variabelen $x + iy = z$ betrachtet werden, insofern, als einem bestimmten Werte von z auch ein bestimmter Wert der Funktion zugeordnet ist. Für solch eine Funktion aber hängt der Wert von

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dz} = \lim \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

im allgemeinen von der Grenze $\frac{dy}{dx}$ ab, nach welcher $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ konvergiert, wenn Δx und Δy null werden. Unter diesem Gesichtspunkt kann man die Funktionen der komplexen Variabelen z in zwei Klassen teilen, die eine umfasst ganz allgemein die Funktionen der Variabelen x und y, bei denen die Ableitung an jeder Stelle verschiedene Werte erhält, je nach dem Werte von $\frac{dy}{dx}$; die andere umfasst diejenigen Funktionen, deren Ableitung von diesem Werte ganz unabhängig ist. Diese letzteren bezeichnet man als die eigentlichen *Funktionen einer komplexen Variabelen*, weil zu ihnen alle Funktionen gehören, die sich, wie im Eingange dieses Paragraphen gesagt wurde, durch die elementaren Operationen definieren lassen, und weil, wie weiterhin gezeigt werden soll, nur diese Funktionen sich in Reihen entwickeln lassen, welche nach Potenzen der komplexen Variabelen z fortschreiten.

Die Regeln für die Differentiation der expliciten algebraischen Funktionen erleiden nämlich keine Änderung, wenn

die Variabele komplex wird. Daraus folgt, dass diese Funktionen Ableitungen besitzen, die von dem Werte des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ unabhängig sind.

Dasselbe gilt auch von den Exponentialfunktionen, dem Logarithmus und den Kreisfunktionen, denn die auf diese Funktionen bezüglichen Regeln beruhen einzig und allein darauf, dass die Ausdrücke $\frac{e^h - 1}{h}$, $\frac{\sin h}{h}$ nach dem Werte eins konvergieren, wenn h null wird, und dies ergiebt sich unmittelbar aus den Definitionen der Funktionen e^z und $\sin z$ bei komplexen Werten von z. Man erkennt demnach, dass alle Funktionen, welche aus den *elementaren* zusammengesetzt sind, zur zweiten Klasse gehören, d. h. eine bestimmte lediglich von den Werten z abhängige Ableitung besitzen, und im folgenden sollen überhaupt nur Funktionen untersucht werden, welchen diese Eigenschaft zukommt.

377. Ist $f(z)$ eine Funktion der Variabelen $z = x + iy$, für welche $f'(z)$ einen eindeutig bestimmten Wert hat, so ist

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \lim \frac{\Delta f(z)}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial y} = \lim \frac{\Delta f(z)}{\Delta y} = \lim \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta y} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial y};$$

ferner ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i,$$

also ist

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = f'(z), \quad \frac{\partial f(z)}{\partial y} = if'(z),$$

mithin

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} + i \frac{\partial f(z)}{\partial y} = 0.$$

Setzt man $f(z) = u + iv$, so ist also

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$

und mithin ergiebt sich wie vorhin:

$$1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Differentiiert man diese Gleichungen nach x und y, wobei vorausgesetzt wird, dass auch die zweiten Ableitungen der Funktionen u und v regulär sind, so wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y};$$

also ist:

$$2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

wird also befriedigt, indem man für θ sowohl die Funktion u, als auch die Funktion v substituiert; und man hat den Satz:

Bezeichnet u *den reellen und* v *den Faktor des imaginären Bestandteiles einer „Funktion der komplexen Variabelen* $z = x + iy$" *im eigentlichen Sinne, d. h. einer Funktion, welche innerhalb eines gegebenen Bereiches der Ebene eindeutig und stetig ist, und dort überall eine bestimmte lediglich von* z *abhängige Ableitung besitzt, welche ebenfalls eine stetige Funktion von* z *ist, so genügen die Funktionen* u *und* v *stets den Bedingungen*

$$1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

sowie auch den Bedingungen

$$2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Für diese letzteren beiden Bedingungen ist zunächst noch vorausgesetzt, dass die Funktionen u und v zweite partielle Ableitungen besitzen, welche stetige Funktionen der beiden Variabelen sind. Indessen werden wir diese Voraussetzung späterhin als eine notwendige Folge aus den Gleichungen 1) beweisen.

378. Wir wollen nun noch eine andere Gleichung ableiten, welche uns von Nutzen sein wird. Führt man die

Polarkoordinaten ϱ und ω an Stelle der rechtwinkligen ein, indem man

$$z = \varrho(\cos\omega + i\sin\omega) = \varrho e^{i\omega}$$

setzt, so ist

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho} = e^{i\omega} = \frac{z}{\varrho}, \quad \frac{\partial z}{\partial \omega} = i\varrho e^{i\omega} = iz.$$

Besitzt also die Funktion $f(z)$ die eindeutige bestimmte Ableitung $f'(z)$, so ist

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \varrho} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial f(z)}{\partial \omega} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial \omega},$$

oder

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \varrho}\frac{\partial z}{\partial \omega} = \frac{\partial f(z)}{\partial \omega}\frac{\partial z}{\partial \varrho}.$$

Addiert man auf beiden Seiten den Wert $f(z)\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varrho\,\partial\omega}$, so folgt:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \varrho}\cdot\frac{\partial z}{\partial \omega} + f(z)\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial \omega}}{\partial \varrho} = \frac{\partial f(z)}{\partial \omega}\frac{\partial z}{\partial \varrho} + f(z)\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial \varrho}}{\partial \omega},$$

oder

$$\frac{\partial\left[f(z)\frac{\partial z}{\partial \omega}\right]}{\partial \varrho} = \frac{\partial\left[f(z)\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right]}{\partial \omega}.$$

Dies ist die Gleichung, welche wir ableiten wollten; ersetzt man in derselben noch $\dfrac{\partial z}{\partial \omega}$ und $\dfrac{\partial z}{\partial \varrho}$ durch ihre oben angegebenen Werte, so wird

$$3)\qquad \frac{\partial\left[\frac{z}{\varrho}f(z)\right]}{\partial \omega} = i\,\frac{\partial[zf(z)]}{\partial \varrho}.$$

Beweis eines Fundamentalsatzes von Cauchy.

379. Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion der reellen Variabelen x, welche für die Werte von x innerhalb eines Intervalles von x_0 bis X stetig ist.

Wir bezeichnen nun mit x einen beliebigen Wert zwischen diesen Grenzen, teilen sodann das Intervall $x - x_0$ in n gleiche oder ungleiche Teile, die wir

$$x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2, \ldots (x - x_{n-1})$$

nennen, und bilden die Summe:

$$(x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots (x_{n-1} - x_{n-2}) f(x_{n-2}) \\ + (x - x_{n-1}) f(x_{n-1}).$$

Diese Summe konvergiert nach einer bestimmten Grenze, wenn die Anzahl n unbegrenzt wächst und jede dieser Differenzen $x_1 - x_0, x_2 - x_1 \ldots$ nach null konvergiert (§§ 187 und 188). Diese Grenze ist eine Funktion von x, die wir durch $F(x)$ ausdrücken. Konstruiert man die Kurve, deren Ordinate $f(x)$ ist, in Bezug auf zwei rechtwinklige Axen, so ist die Grenze $F(x)$ die Fläche, welche von der Kurve, der Abscissenaxe und den Ordinaten, die den Abscissen x_0 und x entsprechen, eingeschlossen ist. Folglich hat man

$$dF(x) = f(x)\,dx.$$

Sind die Intervalle $x_1 - x_0, x_2 - x_1 \ldots$ sämtlich unter einander gleich, und bezeichnet man ihre gemeinsame Länge mit h, so ist

$$F(x) = (x - x_0) \lim \frac{f(x_0) + f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) + \ldots f(x_0 + \overline{n-1}\,h)}{n},$$

und ebenfalls

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

ausserdem hat man:

$$F(x_0) = 0.$$

Sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei reelle und stetige Funktionen der Variabelen x innerhalb des Intervalles x_0 bis X, so giebt es zwei bestimmte Funktionen, $F_1(x)$ und $F_2(x)$, welche zu den Funktionen f_1 und f_2 in der angegebenen Beziehung stehen. Demnach gelten dieselben Gleichungen auch für die Funktionen

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x) \quad \text{und} \quad F(x) = F_1(x) + i F_2(x).$$

380. Es sei nun z eine eindeutig bestimmte Funktion der Variabelen

$$z = \varrho\,(\cos\omega + i \sin\omega) = \varrho e^{i\omega},$$

welche stetig bleibt innerhalb eines gewissen angegebenen Bereiches um den Mittelpunkt, insbesondere also bei allen Werten von ω, solange ϱ innerhalb gewisser Grenzen bleibt.

Erteilt man nun dem Modul ϱ einen bestimmten festen Wert innerhalb dieser Grenzen, so hängt die Funktion $f(z)$ nur noch vom Argumente ω ab. Giebt man der Grösse ω die n Werte, welche eine arithmetische Reihe bilden:

$$-\pi,\ -\pi+\frac{2\pi}{n},\ -\pi+\frac{4\pi}{n},\ldots -\pi+\frac{2k\pi}{n},\ldots -\pi+\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

und bezeichnet man mit

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots z_k \ldots z_{n-1}$$

die Werte von z, welche diesen Argumenten entsprechen, so konvergiert das arithmetische Mittel der entsprechenden Werte der Funktion $f(z)$, nämlich:

$$\frac{f(z_0)+f(z_1)+f(z_2)+\ldots f(z_{n-1})}{n}$$

nach einer bestimmten Grenze, welche Cauchy *den mittleren Wert der Funktion* f(z), *welcher zum Modul* ϱ *gehört*, genannt hat. Wir stellen diesen Wert durch $\mathrm{M}[f(z)]$ dar; er ist definiert durch die Gleichung:

$$\mathrm{M}[f(z)] = \lim \frac{f(z_0)+f(z_1)+f(z_2)+\ldots f(z_{n-1})}{n} \text{ für } n=\infty.$$

381. Der *grösste Modul* einer Funktion $f(z)$, während z den konstanten Modul ϱ hat, ist der grösste Wert, den der Modul von $f(z)$ annimmt, während ω von $-\pi$ bis $+\pi$ variiert. Da nun der Modul einer Summe nicht grösser wird als die Summe aus den Moduln der einzelnen Summanden, so folgt aus der obigen Gleichung, dass der Modul des mittleren Wertes $\mathrm{M}[f(z)]$ nicht grösser ist als der grösste Modul der Funktion $f(z)$.

Ist $f(z)=z^\mu$, und μ eine positive oder negative ganze Zahl, so wird

$$\mathrm{M}[z^\mu] = \varrho^\mu e^{-i\mu\pi} \lim \frac{1+e^{\frac{2i\mu\pi}{n}}+e^{\frac{4i\mu\pi}{n}}+\cdots e^{\frac{2i(n-1)\mu\pi}{n}}}{n}$$

$$= \varrho^\mu e^{-i\mu\pi}\cdot \lim \frac{1-e^{2i\mu\pi}}{n\left(1-e^{\frac{2i\mu\pi}{n}}\right)}.$$

Ist nun μ nicht gleich null, so folgt aus dieser Gleichung, dass die rechte Seite schon bei jedem endlichen Werte von n null wird, dass also auch

$$M(z^{\mu}) = 0$$

ist.

382. Die bisher eingeführten Begriffe reichen aus, um einen grundlegenden Satz zu beweisen, welcher von Cauchy zuerst gegeben worden ist.

Derselbe lautet folgendermassen:

Lehrsatz. *Ist* $f(z)$ *eine eigentliche Funktion der komplexen Variabelen* $z = \varrho e^{i\omega}$, *welche stetig ist für alle Werte von* z, *deren Modul gleich oder kleiner ist als eine gegebene Grösse* R, *und deren Ableitung* $f'(z)$ *in diesem Gebiete nur von dem Werte* z *abhängt und sich ebenfalls mit der Variabelen* z *stetig ändert, so ist, wenn* Z *den Wert bezeichnet, dessen Modul gleich* R *ist, der mittlere Wert der Funktion* $Zf(Z)$ *gleich null, d. h. in unserer Bezeichnung, es ist*

$$M[Zf(Z)] = 0.$$

Wir setzen:

$$1) \qquad iz f(z) = \varphi(\varrho, \omega), \quad \frac{z}{\varrho} f(z) = \psi(\varrho, \omega),$$

so ist nach der Gleichung 3) in § 378

$$2) \qquad \frac{\partial \varphi(\varrho, \omega)}{\partial \varrho} = \frac{\partial \psi(\varrho, \omega)}{\partial \omega}.$$

Betrachten wir ϱ als konstant, so ist $\varphi(\varrho, \omega)$ der Voraussetzung nach eine stetige Funktion von ω; setzt man also

$$\omega = -\pi + n\alpha,$$

wobei n eine beliebig wachsende Zahl und ω einen festen Wert zwischen $-\pi$ und $+\pi$ bezeichnet, so ist:

$$3) \quad \Phi(\varrho, \omega) = (\omega + \pi) \lim_{n = \infty} \frac{\varphi(\varrho, -\pi) + \varphi(\varrho, -\pi + \alpha) \ldots \varphi(\varrho, -\pi + \overline{n-1}\,\alpha)}{n}$$

eine bestimmte Funktion von ω, welche für $\omega = -\pi$ null wird und für welche

$$4) \qquad \frac{\partial \Phi(\varrho, \omega)}{\partial \omega} = \varphi(\varrho, \omega).$$

Ebenso wird, wenn man ω als konstant ansieht, da $\psi(\varrho, \omega)$ eine stetige Funktion von ϱ ist, solange $\varrho <$ oder $= R$ ist, für einen bestimmten Wert von $\varrho = n\delta$

$$5)\quad \Psi(\varrho,\omega)=\varrho\lim_{n=\infty}\frac{\psi(0,\omega)+\psi(\delta,\omega)+\cdots\psi(\overline{n-1}\,\delta,\omega)}{n}$$

eine bestimmte Funktion von ϱ, welche für $\varrho=0$ ebenfalls null wird, und der Gleichung genügt

$$6)\qquad \frac{\partial\Psi(\varrho,\omega)}{\partial\varrho}=\psi(\varrho,\omega).$$

Differentiiert man nun die Gleichung 4) nach ϱ und die Gleichung 6) nach ω, was gestattet ist, da der Voraussetzung nach die Funktion $f(z)$ eine bestimmte Ableitung besitzt, die ebenfalls stetig ist, so wird nach Gleichung 2):

$$\frac{\partial^2\Phi(\varrho,\omega)}{\partial\varrho\,\partial\omega}-\frac{\partial^2\Psi(\varrho,\omega)}{\partial\varrho\,\partial\omega}=0,$$

oder

$$\frac{\partial\left[\frac{\partial\Phi(\varrho,\omega)}{\partial\varrho}-\frac{\partial\Psi(\varrho,\omega)}{\partial\varrho}\right]}{\partial\omega}=0.$$

Diese Gleichung lehrt, dass die Funktion

$$\frac{\partial\Phi(\varrho,\omega)}{\partial\varrho}-\frac{\partial\Psi(\varrho,\omega)}{\partial\varrho}$$

von ω unabhängig ist. Man erhält demnach gleiche Werte, wenn man $\omega=-\pi$ und $\omega=+\pi$ setzt; es ist also

$$\frac{\partial\Phi(\varrho,+\pi)}{\partial\varrho}-\frac{\partial\Psi(\varrho,+\pi)}{\partial\varrho}=\frac{\partial\Phi(\varrho,-\pi)}{\partial\varrho}-\frac{\partial\Psi(\varrho,-\pi)}{\partial\varrho}.$$

Nun hat nach unserer Annahme die Funktion $\psi(\varrho,\omega)$ denselben Wert für $\omega=-\pi$ und für $\omega=+\pi$; dasselbe gilt folglich auch nach der Gleichung 5) für $\Psi(\varrho,\omega)$, sowie für $\frac{\partial\Psi(\varrho,\omega)}{\partial\varrho}$. Die vorige Gleichung reduziert sich also auf

$$\frac{\partial\Phi(\varrho,+\pi)}{\partial\varrho}=\frac{\partial\Phi(\varrho,-\pi)}{\partial\varrho}.$$

Ferner ist $\Phi(\varrho,-\pi)$ gleich null bei allen Werten von ϱ, und folglich ist auch $\frac{\partial\Phi(\varrho,-\pi)}{\partial\varrho}$ bei allen Werten von ϱ gleich null; mithin ist

$$\frac{\partial\Phi(\varrho,+\pi)}{\partial\varrho}=0$$

bei allen Werten von ϱ, d. h. $\Phi(\varrho, +\pi)$ ist eine Konstante. Man erhält demnach

$$7)\qquad \Phi(R, \pi) = \Phi(0, \pi).$$

Da nun $f(z)$ stetig ist bei allen Werten von z, deren Modul den Wert R nicht überschreitet, so wird diese Funktion auch nicht unendlich für $\varrho = 0$; hieraus folgt, dass das Produkt

$$izf(z) = \varphi(\varrho, \omega)$$

für $\varrho = 0$ null wird, und das gleiche gilt auch für die Funktion $\Phi(\varrho, \omega)$ gemäss der Gleichung 3). Demnach ist

$$\Phi(R, \pi) = 0,$$

oder was dasselbe besagt:

$$8)\qquad \mathsf{M}[Zf(Z)] = 0,$$

womit die Behauptung des Satzes bewiesen ist.

Folgesatz I. *Ist* F(z) *eine Funktion der komplexen Variabelen* $z = \varrho e^{i\omega}$, *welche ebenso wie ihre Ableitung stetig bleibt, solange der Modul* ϱ *von* z *eine bestimmte Grösse* R *nicht überschreitet, und bezeichnet man mit* Z *die Werte von* z, *welche zum Modul* R *gehören, mit* x *eine beliebige reelle oder komplexe Konstante, deren Modul* r *zwischen* 0 *und* R *liegt, so ist:*

$$\mathsf{M}\left[\frac{Z}{Z - x} F(Z)\right] = F(x).$$

Denn da die Funktion $F(z)$ nebst ihrer Ableitung stetig ist, solange die Grösse ϱ nicht grösser als R ist, so gilt dasselbe auch von der Funktion

$$9)\qquad f(z) = \frac{F(z) - F(x)}{z - x}.$$

Diese Funktion ist stetig, solange z von x verschieden ist; für $z = x$ aber geht sie stetig in den Wert $f(x) = F'(x)$ über, welcher der Voraussetzung nach eine bestimmte endliche Grösse ist.

Demnach kann man den vorigen Satz auf die Funktion $f(z)$ anwenden, und man erhält nach der Gleichung 8):

$$\mathsf{M}[Zf(Z)] = \mathsf{M}\left[Z\frac{F(Z) - F(x)}{Z - x}\right] = 0,$$

oder

$$10)\qquad \mathsf{M}\left[\frac{Z}{Z - x} F(Z)\right] - F(x)\,\mathsf{M}\left[\frac{Z}{Z - x}\right] = 0.$$

Nun ist

$$11)\quad \frac{Z}{Z-x} = 1 + \frac{x}{Z} + \frac{x^2}{Z^2} + \cdots \frac{x^{n-1}}{Z^{n-1}} + \frac{x^n}{Z^n\left(1-\frac{x}{Z}\right)}.$$

Der mittlere Wert von $\frac{1}{z^\mu}$ ist null, wenn μ nicht gleich null ist (§ 381), und gleich 1 für $\mu = 0$, also ist

$$\mathsf{M}\left[\frac{Z}{Z-x}\right] = 1 + \mathsf{M}\frac{x^n}{Z^n\left(1-\frac{x}{Z}\right)}.$$

Der Modul von $\mathsf{M}\frac{x^n}{Z^n\left(1-\frac{x}{Z}\right)}$ ist nicht grösser (§ 380) als der grösste Modul der Funktion $\frac{x^n}{Z^n\left(1-\frac{x}{Z}\right)}$, und dieser ist gleich dem Produkte von $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ mit dem grössten Modul $\frac{1}{1-\frac{r}{R}}$ von $\frac{1}{1-\frac{x}{Z}}$. Da nun $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ nach null konvergiert, wenn n unbegrenzt wächst, so ist

$$\mathsf{M}\left[\frac{Z}{Z-x}\right] = 1.$$

Die Gleichung 10) ergiebt demnach:

$$12)\qquad F(x) = \mathsf{M}\left[\frac{Z}{Z-x}F(Z)\right].$$

Folgesatz II. *Unter denselben Bedingungen wie im vorigen Satze hat die* μ^{te} *Ableitung der Funktion* $\mathrm{F(x)}$ *an der Stelle* x *im Innern des definierten Bereiches, für welchen* $\mathrm{r = R}$ *ist, einen bestimmten Wert, welcher der Gleichung genügt:*

$$13)\qquad \mathrm{F}^\mu(\mathrm{x}) = \mu\,!\,\mathsf{M}\left[\frac{\mathrm{Z}}{(\mathrm{Z-x})^{\mu+1}}\mathrm{F(Z)}\right].$$

Diese Gleichung ist die Verallgemeinerung der Gleichung 12), welche letztere sich für $\mu = 0$ ergiebt. Um also diese Gleichung zu beweisen, genügt es ihre Gültigkeit durch den Schluss von μ auf $\mu + 1$ darzuthun. Ersetzt man zu diesem Zwecke x durch $x + h$ in der Gleichung 13), so folgt:

$$F^{\mu}(x+h) = \mu!\,\mathrm{M}\left[\frac{Z}{(Z-x-h)^{\mu+1}}F(Z)\right],$$

also:

$$F^{\mu}(x+h) - F^{\mu}(x) = \mu!\,\mathrm{M}\left[ZF(Z)\frac{(Z-x)^{\mu+1}-(Z-x-h)^{\mu+1}}{(Z-x)^{\mu+1}(Z-x-h)^{\mu+1}}\right].$$

Entwickelt man den Zähler nach Potenzen von h, so folgt:

$$(z-x)^{\mu+1} - (z-x-h)^{\mu+1} = (\mu+1)\,h\,(z-x)^{\mu} - (\mu+1)_2\,h^2\,(z-x)^{\mu-1} + (\mu+1)_3\,h^3\,(z-x)^{\mu-2} - \ldots - (-1)^{\mu-1}\,h^{\mu+1};$$

also wird:

$$\frac{F^{\mu}(x+h)-F^{\mu}(x)}{h} = \mu+1!\,\mathrm{M}\left[\frac{ZF(Z)}{(Z-x)(Z-x-h)^{\mu+1}}\right]$$

$$-\mu!\,\mathrm{M}\left[\frac{(\mu+1)_2\,h\,ZF(Z)}{(Z-x)^2(Z-x-h)^{\mu+1}} - \frac{(\mu+1)_3\,h^2\,ZF(Z)}{(Z-x)^3(Z-x-h)^{\mu+1}} \cdots + \frac{(-1)^{\mu-1}h^{\mu}\,ZF(Z)}{(Z-x)^{\mu+1}(Z-x-h)^{\mu+1}}\right].$$

Die Mittelwerte aller der Grössen, welche den Faktor h haben, erhalten einen Modul, der jedenfalls nicht grösser ist als der grösste Modul der Ausdrücke, aus welchen sie zu bilden sind. Der grösste Modul dieser Ausdrücke wird aber gleich dem Produkte aus dem Modul von h (oder einer Potenz dieses Moduls) und einem endlichen Werte. Folglich konvergieren diese grössten Moduln und ebenso die Moduln der genannten Mittelwerte mit h gleichzeitig nach null. Es ist demnach

$$\lim_{h=0}\frac{F^{\mu}(x+h)-F^{\mu}(x)}{h} = \lim \mu+1!\,\mathrm{M}\left[\frac{ZF(Z)}{(Z-x)(Z-x-h)^{\mu+1}}\right].$$

Man erkennt aber leicht, dass

$$\lim_{h=0}\mathrm{M}\left[\frac{ZF(Z)}{(Z-x)(Z-x-h)^{\mu+1}}\right] = \mathrm{M}\left[\frac{ZF(Z)}{(Z-x)^{\mu+2}}\right]$$

wird; denn die Differenz

$$\mathrm{M}\left[ZF(Z)\frac{1}{(Z-x)(Z-x-h)^{\mu+1}} - \frac{1}{(Z-x)^{\mu+2}}\right]$$

$$= \mathrm{M}\left[ZF(Z)\frac{(Z-x)^{\mu+1}-(Z-x-h)^{\mu+1}}{(Z-x)^{\mu+2}(Z-x-h)^{\mu+1}}\right]$$

wird mit h beliebig klein, weil der Zähler wiederum proportional der Grösse h wird. Sonach ist

$$F^{\mu+1}(x) = \mu+1!\,\mathrm{M}\left[\frac{ZF(Z)}{(Z-x)^{\mu+2}}\right].$$

Die Entwickelung der Funktionen in Potenzreihen.

383. Aus den vorigen Gleichungen hat Cauchy den schönen Satz abgeleitet:

Jede Funktion F(x) *einer komplexen Variabelen* x *lässt sich in eine konvergente, nach steigenden ganzen Potenzen von* x *geordnete Reihe entwickeln, solange der Modul der reellen oder komplexen Variabelen* x *einen Wert behält, der kleiner ist als der Wert, für welchen die Funktion* F(x) *und ihre Ableitung* F′(x) *aufhören stetig zu sein.*

Zum Beweise dieses Satzes braucht man bloss in der Gleichung 12) des vorigen Paragraphen den Quotienten $\frac{Z}{Z-x}$ durch die Entwickelung 11) zu ersetzen; man erhält alsdann:

$$1)\quad F(x) = \mathsf{M}[F(Z)] + x\,\mathsf{M}\left[\frac{F(Z)}{Z}\right] + \cdots x^{n-1}\,\mathsf{M}\left[\frac{F(Z)}{Z^{n-1}}\right] + R_n,$$

wobei

$$2)\qquad R_n = \mathsf{M}\left[\frac{x^n}{Z^n}\cdot\frac{F(Z)}{1-\frac{x}{Z}}\right] = \left(\frac{x}{R}\right)^n \mathsf{M}\left[\frac{F(Z)\,e^{-ni\omega}}{1-\frac{x}{Z}}\right]$$

ist. Der Modul von x ist der Voraussetzung nach kleiner als R; demnach konvergiert der Faktor $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ nach null, wenn n unbegrenzt wächst, während der andere Teil von R_n jedenfalls einen endlichen Wert behält; also ist

$$\lim R_n = 0,$$

und folglich:

$$3)\quad F(x) = \mathsf{M}[F(Z)] + x\,\mathsf{M}\left[\frac{F(Z)}{Z}\right] + x^2\,\mathsf{M}\left[\frac{F(Z)}{Z^2}\right] + x^3\,\mathsf{M}\left[\frac{F(Z)}{Z^3}\right] + \cdots$$

Die Gleichungen 12) und 13) ergeben für $x = 0$

$$F(0) = \mathsf{M}[F(Z)],$$

$$F^{\mu}(0) = \mu!\,\mathsf{M}\left[\frac{F(Z)}{Z^{\mu}}\right].$$

Man kann demnach die Gleichung 3) schreiben:

$$4)\quad F(x) = F(0) + x F'(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \frac{x^3}{3!}F'''(0) + \cdots,$$

und dies ist die Mac-Laurinsche Entwickelung.

384. Die Funktionen $(1+z)^m$ und $l(1+z)$, welche für $z=0$ bezüglich den Wert 1 und 0 besitzen sollen und in der früheren Weise definiert sind, sind ebenso wie ihre ersten Ableitungen stetig für alle Werte von z, deren Modul kleiner als eins ist. Demnach ist für diese Werte:

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1} z + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} z^3 + \cdots,$$

$$l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - + \cdots$$

Schreibt man $\varrho e^{i\omega}$ an Stelle von z, so wird die zweite Gleichung:

$$l(1+\varrho\cos\omega + \varrho i \sin\omega) = \frac{\varrho e^{i\omega}}{1} - \frac{\varrho^2 e^{2i\omega}}{2} + \frac{\varrho^3 e^{3i\omega}}{3} - + \cdots$$

Setzt man

$$1+\varrho\cos\omega = r\cos\psi, \quad \varrho\sin\omega = r\sin\psi,$$

so ist der Winkel ψ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthalten, weil $\varrho < 1$ ist; er ist folglich durch seine Tangente bestimmt und für diese wird

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\varrho\sin\omega}{1+\varrho\cos\omega}.$$

Ferner ist

$$r = \sqrt{1+2\varrho\cos\omega+\varrho^2}$$

und

$$l(1+\varrho\cos\omega+\varrho i\sin\omega) = l(r) + i\psi,$$

also ist:

$$l\sqrt{1+2\varrho\cos\omega+\varrho^2} + i \operatorname{arc\,tang}\frac{\varrho\sin\omega}{1+\varrho\cos\omega} = \frac{\varrho e^{i\omega}}{1} - \frac{\varrho^2 e^{2i\omega}}{2} + \frac{\varrho^3 e^{3i\omega}}{3} + \cdots$$

Indem man die reellen und imaginären Teile beiderseits gleich setzt, folgt:

$$l\sqrt{1+2\varrho\cos\omega+\varrho^2} = \frac{\varrho\cos\omega}{1} - \frac{\varrho^2\cos 2\omega}{2} + \frac{\varrho^3\cos 3\omega}{3} - + \cdots,$$

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{\varrho\sin\omega}{1+\varrho\cos\omega} = \frac{\varrho\sin\omega}{1} - \frac{\varrho^2\sin 2\omega}{2} + \frac{\varrho^3\sin 3\omega}{3} - + \cdots$$

Diese Gleichungen gelten für jeden Wert von ϱ, der kleiner ist als 1, wenn in der zweiten Gleichung der Bogen zwischen

$-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ genommen wird. Setzt man in der zweiten Gleichung $\varrho \sin \omega = x$, $\varrho \cos \omega = 0$, also $\omega = \pm \frac{\pi}{2}$, so folgt

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \cdot \cdot,$$

und setzt man $x = \operatorname{tang} z$, so wird

$$z = \frac{\operatorname{tang} z}{1} - \frac{\operatorname{tang}^3 z}{3} + \frac{\operatorname{tang}^5 z}{5} - \frac{\operatorname{tang}^7 z}{7} + - \cdots$$

Diese letzte Gleichung besteht für diejenigen reellen Werte von z, welche zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liegen.

385. Da die Funktionen e^z, $\cos z$, $\sin z$ ebenso wie ihre ersten Ableitungen für alle Werte von z stetig sind, so sind sie auch für jeden Wert von z durch Potenzreihen darstellbar. Dabei ist zu bemerken, dass diese Reihen für uns zugleich die Definitionen dieser Funktionen waren, so dass sich also kein neuer Satz an dieselben knüpfen lässt. Dagegen würde die Entwickelung in eine Potenzreihe für die Funktion e^z z. B. ein neuer Satz sein, wenn man als Definition dieser Funktion die Gleichung

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

gewählt hätte.

Die Funktionen $\frac{1}{e^z - 1}$ und $\frac{z}{2} \operatorname{cotg} \frac{z}{2}$ werden nur unstetig, ebenso wie ihre ersten Ableitungen, wenn sie unendlich werden; dies tritt bei der ersten Funktion ein, wenn z ein ganzes Vielfaches von $2i\pi$ ist, bei der zweiten, wenn z ein ganzes Vielfaches von 2π ist. Also lassen sich diese Funktionen in konvergente Potenzreihen entwickeln für alle Werte von z, deren Modul kleiner ist als 2π. Ebenso bleibt die Funktion $\operatorname{tang} z$ stetig für alle Werte von z, deren Modul kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Sie lässt sich also für diese Werte nach der Mac-Laurinschen Formel entwickeln. (Ich habe diese Entwickelungen in meinem Lehrbuche der Trigonometrie

[5. Ausgabe] durch eine spezielle Methode bewiesen, und verweise in Bezug auf die Einzelheiten dieser Reihenentwickelungen auf dieses Werk.)

Die Funktionen $z^{\frac{q}{p}}$, lz, $e^{\frac{1}{z}}$ sind unstetig für den Wert null des Modul, und daher nicht entwickelbar in Reihen mit positiven ganzen steigenden Potenzen von z.

Die Reihenentwickelung von Lagrange.

386. Wir bezeichnen mit x eine gegebene Konstante, mit t eine reelle oder komplexe Variabele, und betrachten die Gleichung

$$1)\qquad z = x + tf(z),$$

in welcher z die Unbekannte, und $f(z)$ eine stetige Funktion von z ist, unabhängig von x und t, mit der eindeutigen und stetigen Ableitung $f'(z)$. Diese Gleichung hat bei jedem Wert von t eine begrenzte oder unbegrenzte Anzahl von Lösungen, je nachdem $f(z)$ eine algebraische oder transscendente Funktion ist. Für $t = 0$ reduziert sich eine dieser Lösungen auf x und die andern werden unendlich.

Die Wurzeln der Gleichung ändern sich im allgemeinen stetig mit t. Denn giebt man t einen Wert t_0 und bezeichnet man mit z_0 eine der Wurzeln der Gleichung 1), von denen wir annehmen, dass sie für $t = t_0$ alle von einander verschieden sind, so hat man

$$t_0 = \frac{z_0 - x}{f(z_0)}.$$

Wählt man nun einen andern Wert $z_0 + \Delta z_0$, wobei Δz_0 einen beliebig kleinen Modul haben möge, so ist der zugehörige Wert $t_0 + \Delta t_0$, bei welchem $z_0 + \Delta z_0$ eine Wurzel der Gleichung ist, zu bestimmen durch die Relation

$$t_0 + \Delta t_0 = \frac{z_0 + \Delta z_0 - x}{f(z_0 + \Delta z_0)}.$$

Die Differenz der beiden Werte von t ist also:

$$\Delta t_0 = \frac{z_0 + \Delta z_0 - x}{f(z_0 + \Delta z_0)} - \frac{z_0 - x}{f(z_0)},$$

$$= \frac{\Delta z_0 f(z_0) - (z_0 - x)[f(z_0 + \Delta z_0) - f(z_0)]}{f(z_0) f(z_0 + \Delta z_0)},$$

$$= \frac{\Delta z_0 - t[f(z_0 + \Delta z_0) - f(z_0)]}{f(z_0 + \Delta z_0)}.$$

Da die Funktion $f(z)$ als regulär vorausgesetzt ist, so kann man sie nach der Mac-Laurinschen Reihe entwickeln; es ist also bis auf Grössen, die von zweiter Ordnung im Verhältnis zu Δz_0 unendlich klein werden:

$$f(z_0 + \Delta z_0) - f(z_0) = \Delta z_0 f'(z_0),$$

$$\Delta t_0 = \frac{1 - t_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \Delta z_0 \quad \text{oder} \quad \Delta z_0 = \frac{f(z_0)}{1 - t_0 f'(z_0)} \Delta t_0.$$

Solange also der Nenner $1 - t_0 f'(z_0)$ von null verschieden ist, so wird Δz_0 mit Δt_0 gleichzeitig unendlich klein, und es ist

$$\lim \frac{\Delta z_0}{\Delta t_0} = \frac{f(z_0)}{1 - t_0 f'(z_0)},$$

d. h. es ist nicht nur z eine stetige Funktion von t, sondern auch die Ableitung $\frac{dz}{dt}$ hat überall einen bestimmten, sich stetig ändernden Wert.

Auszuschliessen sind aber von vornherein alle die Stellen, für welche gleichzeitig

2) $$z = x + t f(z) \quad \text{und} \quad 1 - t f'(z) = 0,$$

also

3) $$z = x + \frac{f(z)}{f'(z)}$$

wird. Die Wurzeln dieser Gleichung sind unabhängig von t. Bezeichnen wir dieselben mit $a_1 e^{\alpha_1 i}$, $a_2 e^{\alpha_2 i}$, ... und tragen wir diese Werte in die Gleichung 1) ein, so wird

4) $$t = \frac{1}{f'(a_1 e^{\alpha_1 i})}, \quad t = \frac{1}{f'(a_2 e^{\alpha_2 i})} \cdots$$

Diese Gleichungen geben zugleich die Werte von t an, für welche mindestens zwei Wurzeln der Gleichung 1) ein-

ander gleich werden. Denn soll die Gleichung 1) bei einem bestimmten Werte von t zwei gleiche Regeln haben, so folgt, dass bei einem Werte $t_0 + \Delta t_0$ Wurzeln vorhanden sind, die von dem Werte z_0, der zu t_0 gehört, beliebig wenig unterschieden sind. Es ist demnach

$$z_0 + \Delta' z = x + (t_0 + \Delta t) f(z_0 + \Delta' z) \quad \text{und} \quad z_0 + \Delta'' z = x + (t_0 + \Delta t) f(z_0 + \Delta'' z).$$

Subtrahiert man die beiden Gleichungen, so folgt

$$\Delta' z - \Delta'' z = (t_0 + \Delta t) \cdot [f(z_0 + \Delta' z) - f(z_0 + \Delta'' z)],$$

oder wenn man wiederum auf der rechten Seite die Glieder erster Dimension entwickelt:

$$\Delta' z - \Delta'' z = (t_0 + \Delta t) f'(z_0) [\Delta' z - \Delta'' z], \quad \text{also} \quad 1 = (t_0 + \Delta t) f'(z_0).$$

Lässt man Δt und mit ihm $\Delta' z$ und $\Delta'' z$ nach null konvergieren, so muss

$$1 = t_0 f'(z)$$

sein, wie vorhin gefunden wurde.

Bezeichnet man mit R den kleinsten unter den Modulnwerten von t in der Reihe 4), so ist die Variabele z, solange der Modul von t kleiner bleibt als R, eine stetige Funktion der komplexen Variabelen t mit stetiger erster Ableitung, welche für $t = 0$ den Wert x hat, und nach der Mac-Laurinschen Formel entwickelt werden kann.

387. Nach den bisherigen Ergebnissen muss sich also für z als Funktion von t eine Reihe ermitteln lassen:

$$4) \qquad z = z_0 + \frac{t}{1}\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)_0 + \frac{t^3}{3!}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right)_0 + \cdots,$$

wenn wir mit $z_0, \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 \cdots$ die Werte von $z, \left(\frac{dz}{dt}\right) \cdots$ für $t = 0$ bezeichnen. Und wenn $F(z)$ eine kontinuierliche Funktion der komplexen Variabelen z bezeichnet, die von t und x unabhängig ist, so muss noch allgemeiner sein:

$$5) \quad F(z) = F(z_0) + t\left[\frac{dF(z)}{dt}\right]_0 + \frac{t^2}{2!}\left[\frac{d^2 F(z)}{dt^2}\right]_0 + \frac{t^3}{3!}\left[\frac{d^3 F(z)}{dt^3}\right]_0 \cdots$$

Die Koeffizienten dieser Entwickelung sind zu bestimmen. Zu dem Zwecke betrachten wir nun den Parameter x als eine Variabele. Differentiiert man die Gleichung 1) zuerst nach t, sodann nach x, so folgt:

6) $$[1 - tf'(z)]\frac{\partial z}{\partial t} = f(z), \quad [1 - tf'(z)]\frac{\partial z}{\partial x} = 1,$$

und hieraus:

7) $$\frac{\partial z}{\partial t} = f(z)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Differentiiert man die beiden Seiten dieser Gleichung nach x, und multipliziert sie sodann mit einer willkürlichen Funktion $\varphi(z)$ von z, so erhält man:

$$\varphi(z)\frac{\partial\frac{\partial z}{\partial x}}{\partial t} = \varphi(z)\frac{\partial\left[f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x}.$$

Addiert man diese Gleichung zur Gleichung 7), nachdem man dieselbe mit $\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(z)}{\partial x}$ multipliziert hat, so ergiebt sich

$$\varphi(z)\frac{\partial\frac{\partial z}{\partial x}}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t} = \varphi(z)\frac{\partial\left[f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(z)}{\partial x}\left[f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right],$$

oder

8) $$\frac{\partial\left[\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial t} = \frac{\partial\left[\varphi(z)f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x}.$$

Diese Gleichung lehrt, dass man die Ableitung eines Ausdruckes von der Form $\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}$ nach t dadurch erhält, dass man ihn mit $f(z)$ multipliziert und die Ableitung dieses Produktes nach x bildet.

Differentiiert man die Gleichung 8) $n-2$ mal nach t, so kann man auf der ersten Seite die Ordnung der Differentiationen nach t und x vertauschen, und man erhält:

$$\frac{\partial^{n-1}\left[\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial t^{n-1}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{n-2}\left[\varphi(z)f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial t^{n-2}}.$$

Aber auf der rechten Seite kann jede Differentiation nach t ersetzt werden durch eine Differentiation nach x, wenn man vorher einen Faktor $f(z)$ hinzufügt; also wird:

9) $$\frac{\partial^{n-1}\left[\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial t^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1}\left[[f(z)]^{n-1}\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x^{n-1}}.$$

Setzt man nun

$$\varphi(z) = f(z)\, F'(z),$$

also auf Grund der Gleichung 7):

$$\varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x} = F'(z) \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial F(z)}{\partial t},$$

so folgt

$$10) \qquad \frac{\partial^n F(z)}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n-1}\left[[f(z)]^n F'(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x^{n-1}}.$$

Wird jetzt schliesslich $t = 0$ gesetzt, so ist nach Gleichung 1)

$$z_0 = x, \quad F(z_0) = F(x),$$

ferner nach Gleichung 6):

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 = f(x),$$

also

$$\left[\frac{\partial F(z)}{\partial t}\right]_0 = F'(z_0) \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 = f(x)\, F'(x),$$

und die Gleichung 10) ergiebt:

$$\left[\frac{\partial^n F(z)}{\partial t^n}\right]_0 = \frac{d^{n-1}[(f(x))^n \cdot F'(x)]}{dx^{n-1}},$$

so dass die Entwickelung 5) die Form erhält:

$$11) \begin{cases} F(z) = F(x) + \frac{t}{1} f(x)\, F'(x) + \frac{t^2}{2!} \frac{d([f(x)]^2 F'(x))}{dx} \\ \qquad + \cdots \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}([f(x)]^n F'(x))}{dx^{n-1}} + \cdots. \end{cases}$$

Diese Entwickelung heisst die *Reihe von Lagrange.* Reduziert sich die Funktion $F(z)$ auf z, so hat man

$$12) \begin{cases} z = x + \frac{t}{1} f(x) + \frac{t^2}{2!} \frac{d[f(x)]^2}{dx} + \frac{t^3}{3!} \frac{d^2[f(x)]^3}{dx^2} \\ \qquad + \cdots \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}[f(x)]^n}{dx^{n-1}} + \cdots \end{cases}$$

Bemerkung. Da auch die Ableitung $F'(z)$ eine stetige Funktion der komplexen Variabelen z ist, solange der Modul

von t kleiner ist als der Wert R, bis zu welchem die Reihe 11) konvergiert, so ist auch die Funktion $F'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'(z)}{1 - tf'(z)}$ entwickelbar in eine konvergente, nach steigenden Potenzen von t geordnete Reihe für alle Werte von t, deren Modul kleiner ist als R. Um diese Entwickelung zu erhalten, braucht man bloss in der Gleichung 9) $\varphi(z)$ durch $F'(z)$ zu ersetzen, und dann $t = 0$, $z = x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ zu setzen. Man erhält auf diese Weise:

$$F'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = F'(x) + \frac{t}{1}\frac{d[f(x)F'(x)]}{dx} + \frac{t^2}{2!}\frac{d^2[(f(x))^2 F'(x)]}{dx^2}$$
$$+ \cdots \frac{t^n}{n!}\frac{d^n[(f(x))^n F'(x)]}{dx^n} + \cdots$$

und dies ist das Resultat der Differentiation der Gleichung 11) nach x.

Anwendungen der Reihe von Lagrange.

388. Wir stellen uns die Aufgabe, die kontinuierliche Funktion z von t, welche durch die Gleichung definiert ist

$$z = x + tz^m,$$

in welcher m eine ganze positive Zahl ist, in eine Potenzreihe der Variabelen t zu entwickeln. Die Gleichung 3) des § 386 wird hier

$$z = x + \frac{z}{m} \quad \text{oder} \quad z = \frac{mx}{m-1},$$

und die Gleichung 2) desselben Paragraphen giebt folglich

$$t = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m x^{m-1}}.$$

Wir müssen demnach t beschränken auf die Werte, deren Modul kleiner ist als der numerische Wert

$$R = \pm\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m x^{m-1}}.$$

Alsdann wird der Wert von z:

$$z = x + x^m t + \frac{2m}{2!} x^{2m-1} t^2 + \frac{3m(3m-1)}{3!} x^{3m-2} t^3$$

$$+ \cdots \frac{nm(nm-1)\ldots(nm-n+2)}{n!} x^{mn-n+1} t^n + \cdots$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe hat den Wert:

$$u_n = \frac{nm(nm-1)\cdots(nm-n+2)}{n!} x^{mn-n+1} t^n,$$

und folglich ist:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \frac{(nm+m)(nm+m-1)\cdots(nm+1)}{(nm-n+2)\cdots(nm-n+m)} x^{m-1} t.$$

Die Grenze dieses Verhältnisses für $n = \infty$ ist gleich:

$$\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}} x^{m-1} t \quad \text{oder} \quad \pm \frac{t}{R},$$

und man erkennt also, nach den gewöhnlichen Regeln, dass die erhaltene Reihe in der That nur konvergent ist für die Werte von t, deren Modul kleiner als R ist.

389. Die Lagrange'sche Reihe lässt sich auch oftmals verwerten, um die Reihenentwickelung für explicite Funktionen zu erhalten. Wir wollen hier zwei Beispiele dafür geben.

Es soll erstlich die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}},$$

in welcher x eine reelle gegebene Grösse bezeichnet, deren Modul kleiner ist als eins, nach ganzen Potenzen von t entwickelt werden.

Man betrachte zu diesem Zweck die Gleichung zweiten Grades:

$$1) \qquad u = x + t\frac{u^2-1}{2},$$

deren Wurzeln bestimmt sind durch die Gleichung:

$$2) \qquad u = \frac{1 \pm \sqrt{1-2tx+t^2}}{t}.$$

Damit die Gleichung 1) gleiche Wurzeln bekommt, muss

$$1 - 2tx + t^2 = 0$$

sein, also

$$t = x \pm i\sqrt{1 - x^2}.$$

Da x reell ist und zwischen -1 und $+1$ liegt, so ist der Modul dieser beiden Werte von t gleich der Einheit. Folglich ist für alle Werte von t, deren Modul kleiner als eins ist, diejenige unter den Wurzeln der Gleichung 1), welche für $t = 0$ den Wert x bekommt, in eine konvergente Reihe entwickelbar. Nehmen wir t reell an, zwischen -1 und $+1$, so ist nach der Lagrangeschen Reihe

$$\frac{1-\sqrt{1-2tx+t^2}}{t} = x + \frac{x^2-1}{2}\cdot t + \frac{d\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^2}{dx}\cdot\frac{t^2}{2!} + \cdots \frac{d^{n-1}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{t^n}{n!} + \cdots,$$

und differentiiert man diese Gleichung nach x, so folgt (§ 378, Bemerkung):

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + x^{x}}} = 1 + X_1 t + X_2 t^2 + \cdots X_n t^n + \cdots,$$

wobei

$$X_n = \frac{1}{n!\,2^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

390. Es soll zweitens die Funktion

$$\frac{(\zeta - t)^m}{(1 - t)^{m+1}}$$

nach ganzen Potenzen von t entwickelt werden. Wendet man die Reihe von Lagrange auf die Gleichung

$$1)\qquad z = \zeta + t f(z)$$

an, wobei z eine Funktion der Variabelen ζ und t bezeichnet, und $f(z)$ eine beliebige Funktion der komplexen Variabelen z, so folgt:

$$F(z) = \sum \frac{t^n}{n!}\,\frac{d^{n-1}[F'(\zeta)\,(f(\zeta))^n]}{d\zeta^{n-1}},$$

und differentiiert man nach ζ:

$$2)\qquad F'(z)\,\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \sum \frac{t^n}{n!}\,\frac{d^n[F'(\zeta)\,(f(\zeta))^n]}{d\zeta^n}.$$

Es sei nun

$$F'(z) = z^m \quad \text{und} \quad f(z) = z - 1,$$

so ergiebt die Gleichung 1):

$$z = \frac{\zeta - t}{1 - t}, \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{1}{1 - t},$$

und folglich wird die Gleichung 2):

$$\frac{(\zeta - t)^m}{(1 - t)^{m+1}} = \sum \frac{t^n}{n!} \frac{d^n[\zeta^m(\zeta - 1)^n]}{d\zeta^n},$$

eine Gleichung, welche, wenn m eine positive ganze Zahl ist, für alle Werte von t gilt, deren Modul kleiner ist als eins.

Zwölftes Kapitel.

Zerlegung der rationalen Funktionen in Partialbrüche.

Lehrsätze über die Zerlegung der rationalen Funktionen.

391. Die Zerlegung der rationalen Funktionen ist für die Analysis von grosser Bedeutung, und wir werden besonders in der Integralrechnung Gelegenheit haben, sie anzuwenden. Auch halte ich es für notwendig, hier alle auf diese Theorie bezüglichen Entwickelungen anzugeben, welche ich meinem „Lehrbuch der höheren Algebra" dargestellt habe.

Wir werden zuerst beweisen, dass sich eine rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$, deren Zähler und Nenner beliebige, aber relativ prime Polynome sind, d. h. keinen gemeinschaftlichen Divisor besitzen, zerlegen lässt in eine ganze Funktion (welche auch null sein kann) und in *Partialbrüche*, deren Zähler konstant, und deren Nenner die verschiedenen Potenzen der linearen Faktoren sind, in welche das Polynom $f(x)$ geteilt werden kann. Wir werden dann weiter zeigen, dass die rationale Funktion sich so nur auf eine einzige Weise zerlegen lässt, und werden endlich den Weg angeben, diese Zerlegung auszuführen.

392. Lehrsatz I. *Bezeichnet* a *eine Wurzel der Gleichung* $f(x) = 0$, α *den Grad ihrer Vielfachheit derart, dass*

$$f(x) = (x - a)^{\alpha} f_1(x)$$

ist, wobei $f_1(x)$ *ein Polynom von* x *bedeutet, welches nicht mehr durch* $x - a$ *teilbar ist, so kann die rationale Funktion* $\frac{F(x)}{f(x)}$,

welche als irreducibel vorausgesetzt wird, in zwei Teile der folgenden Art zerlegt werden:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}.$$

A *bedeutet dabei eine Konstante,* $F_1(x)$ *ein ganzes Polynom.*

Denn es ist identisch, was auch der Wert von A sein mag:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)},$$

und damit das zweite Glied der rechten Seite in seinem Nenner nur die $\alpha - 1^{\text{te}}$ Potenz von $x - a$ enthält, muss der Zähler $F(x) - A f_1(x)$ durch $x - a$ teilbar sein, d. h. für $x = a$ verschwinden. Setzen wir also:

$$F(a) - A f_1(a) = 0,$$

so wird

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Dieser Wert von A ist endlich und von null verschieden, weil $f_1(a)$ und $F(a)$ nicht null sind. Wählt man also für A diesen Wert und setzt man

$$F(x) - A f_1(x) = (x-a) F_1(x),$$

so ist

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}.$$

Folgesatz. *Ist*

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots (x-l)^\lambda,$$

wobei $a, b, c \dots l$ *verschiedene Grössen, und* $\alpha, \beta \dots \lambda$ *positive ganze Zahlen sind, so kann die rationale Funktion* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *in folgender Weise zerlegt werden:*

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} &+ \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}, \\ + \frac{B}{(x-b)^\beta} &+ \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots \frac{B_{\beta-1}}{x-b}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ + \frac{L}{(x-l)^\lambda} &+ \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots \frac{L_{\lambda-1}}{x-l} + E(x),\end{aligned}$$

wobei $A, A_1 \dots B, B_1 \dots L, L_1 \dots$ *Konstanten sind, und* $E(x)$ *eine ganze Funktion ist.*

Denn setzt man wie vorhin

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x),$$

so ist nach dem obigen Satze:

$$\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{F_{\alpha-1}(x)}{(x-a) f_1(x)} = \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}.$$

$A, A_1 \ldots A_{\alpha-1}$ sind endliche und bestimmte Konstanten, $F_1(x), F_2(x) \ldots F_\alpha(x)$ ganze Funktionen. Zu bemerken ist nur, dass, während die Konstante A niemals gleich null ist, die Grössen $A_1, A_2 \ldots A_{\alpha-1}$ auch null werden können, denn die Polynome $F_1(x), F_2(x) \ldots$ können durch $x-a$ teilbar sein. Addiert man die Gleichungen, so folgt

$$\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}.$$

Setzt man

$$f_1(x) = (x-b)^\beta f_2(x)$$

und verfährt mit dem Quotienten $\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}$ in derselben Weise, so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)} = \frac{F_\alpha(x)}{(x-b)^\beta f_2(x)} = \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{F_{\alpha+\beta}(x)}{f_2(x)};$$

folglich ist

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{F_{\alpha+\beta}(x)}{f_2(x)}.$$

$B, B_1 \ldots$ sind bestimmte Konstante und $F_{\alpha+\beta}(x)$ eine ganze Funktion. Man kann auch leicht beweisen, dass B stets von null verschieden ist. Fährt man so fort, so erhält man die zu beweisende Gleichung.

393. Lehrsatz II. *Eine rationale Funktion lässt sich nur auf eine einzige Weise in eine ganze Funktion und in Partialbrüche zerlegen.*

Die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt aus der eindeutigen Bestimmung eines jeden Wertes $A, A_1 \ldots, B, B_1 \ldots$ lässt sich aber auch in noch allgemeinerer Weise durch folgende Überlegung direkt bestätigen:

Nimmt man an, dass für den Quotienten $\frac{F(x)}{f(x)}$ zwei verschiedene Zerlegungen gefunden sind:

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots E(x),$$

und

$$\frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha'-1}}+\cdots\frac{B}{(x-b)^{\beta'}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta'-1}}+\cdots E'(x),$$

so ist also

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\cdots+E(x)=\frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}}+\cdots E'(x).$$

α und α' sollen die höchsten Potenzen von $x-a$ auf beiden Seiten angeben; dann ist zu beweisen, dass $\alpha=\alpha'$ und $A=A'$ ist. Wenn nämlich α und α' verschieden sind, und $\alpha>\alpha'$ ist, so entnehmen wir aus dieser Gleichung den Wert von $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ und bringen alle übrigen Glieder auf den gleichen Nenner. Alsdann wird

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi(x)},$$

oder

$$A=\frac{(x-a)\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

$\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind Polynome, von denen das zweite nicht durch $x-a$ teilbar ist. Andererseits ist A eine Konstante; es folgt also, dass der Wert null sein muss, denn für $x=a$ ergiebt die Gleichung den Wert $A=0$. Ist also A nicht gleich null, so kann man nicht annehmen, dass $\alpha>\alpha'$ ist; es ist also $\alpha=\alpha'$. Daraus aber geht weiter hervor, dass $A=A'$ ist. Denn die Gleichung zwischen den beiden Zerlegungen ergiebt nun, wenn $\alpha'=\alpha$ ist:

$$\frac{A - A'}{(x-a)^\alpha} = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi(x)},$$

oder

$$A - A' = \frac{(x-a)\,\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Auch hier sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Polynome, von denen das zweite durch $x - a$ nicht teilbar ist. Die Differenz $A - A'$ ist also gleich null für $x = a$.

Da sonach die Glieder, welche die höchste Potenz von $x - a$ im Nenner enthalten, nach beiden Seiten einander gleich sind, so kann man dieselben fortlassen, und die Reste sind einander gleich. Indem man nun diese Reste ebenso behandelt, erkennt man, dass auch die Glieder, welche im Nenner die höchste Potenz desselben Binomes $x - a$ oder irgend eines anderen enthalten, gleich sein müssen, und fährt man so fort, so erkennt man weiter, dass überhaupt die Partialbrüche in den beiden Ausdrücken für den Quotienten $\frac{F(x)}{f(x)}$ einzeln unter einander gleich sind. Daraus folgt auch schliesslich die Gleichheit von $E(x)$ und $E'(x)$.

Folgerung. *Die ganze Funktion, welche bei der Zerlegung eines rationalen Bruches* $\frac{\mathrm{F(x)}}{\mathrm{f(x)}}$ *auftritt, ist gleich dem ganzen Quotienten, der bei der Division von* $\mathrm{F(x)}$ *durch* $\mathrm{f(x)}$ *erhalten wird.*

Denn bezeichnet man mit $E(x)$ diesen Quotienten und mit $\varphi(x)$ den Rest dieser Division, so ist

$$\frac{F(x)}{f(x)} = E(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}.$$

Da der Zähler des Bruches $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ von niederem Grade ist als der Nenner, so wird diese Funktion für $x = \infty$ gleich null, folglich kann sie keine ganze Funktion mehr erhalten.

Zerlegung für den Fall, dass der Nenner aus lauter einfachen Faktoren besteht.

394. Es sei $f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l)$, und $a, b, \ldots l$ seien lauter verschiedene Werte. Bezeichnet $F(x)$ ein beliebiges Polynom, so wird nach den vorigen Sätzen:

$$1) \qquad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots \frac{L}{x-l} + E(x),$$

$A, B, \ldots L$ sind bestimmte Konstante, $E(x)$ eine ganze Funktion.

Wie wir schon sagten, kann man das Polynom $E(x)$ dadurch erhalten, dass man die Division von $F(x)$ durch $f(x)$ ausführt, falls die Ordnung des Zählers gleich oder grösser ist als die des Nenners. Sonach hat man nur die Grössen $A, B, \ldots L$ zu bestimmen. Multipliziert man die Gleichung 1) mit $f(x)$, so folgt:

$$F(x) = \frac{Af(x)}{x-a} + \frac{Bf(x)}{x-b} + \ldots \frac{Lf(x)}{x-l} + E(x)f(x),$$

und diese Gleichung ist eine identische, d. h. sie gilt bei allen Werten von x. Setzt man x gleich a, so werden alle Glieder auf der rechten Seite null, mit Ausnahme des ersten. Dieses wird gleich $Af'(a)$, wenn man mit $f'(x)$ die Ableitung der Funktion $f(x)$ bezeichnet. Folglich ist

$$F(a) = Af'(a), \text{ also } A = \frac{F(a)}{f'(a)}.$$

Da nun a irgend eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist, so hat man

$$2) \qquad A = \frac{F(a)}{f'(a)}, \quad B = \frac{F(b)}{f'(b)} \cdots L = \frac{F(l)}{f'(l)},$$

und die Gleichung 1) wird:

$$3) \quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(a)}{f'(a)(x-a)} + \frac{F(b)}{f'(b)(x-b)} + \cdots \frac{F(l)}{f'(l)(x-l)} + E(x).$$

Ist die Ordnung von $F(x)$ kleiner als die Ordnung m von $f(x)$, so wird die ganze Funktion null, und es ist:

$$4) \quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(a)}{f'(a)(x-a)} + \frac{F(b)}{f'(b)(x-b)} + \cdots \frac{F(l)}{f'(l)(x-l)}.$$

Es sei

$$F(x) = P_0 x^{m-1} + P_1 x^{m-2} + \cdots P_{m-2} x + P_{m-1}.$$

Multipliziert man die Gleichung 4) mit $f(x)$ und ordnet die rechte Seite nach abnehmenden Potenzen von x, so wird der Koeffizient von x^{m-1} gleich

$$\frac{F(a)}{f'(a)} + \frac{F(b)}{f'(b)} + \cdots \frac{F(l)}{f'(l)},$$

diese Summe ist gleich dem Koeffizienten von x^{m-1} auf der linken Seite, also gleich P_0; es ist also

$$5) \qquad \sum \frac{F(x)}{f'(x)} = P_0,$$

wobei das Summenzeichen Σ die Bedeutung hat, dass man x durch jede der m Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ersetzen und die Summe der erhaltenen Werte bilden soll. Ist die Funktion $F(x)$ höchstens vom Grade $m - 2$, so ist die Grösse P_0 gleich null, und man erhält in diesem Falle:

$$6) \qquad \sum \frac{F(x)}{f'(x)} = 0,$$

eine Gleichung, welche bei vielen algebraischen Untersuchungen nützlich ist.

Man kann der Gleichung 6) eine erweiterte Form geben. Nimmt man an, dass der Nenner $f(x)$ gleich dem Produkte zweier Polynome $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ist, von denen das eine vom Grade m_1, das andere vom Grade m_2 ist, wobei $m_1 + m_2 = m$ ist. Alsdann wird

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x), \quad f'(x) = \varphi(x)\,\psi'(x) + \varphi'(x)\,\psi(x),$$

und es ist

$$\sum \frac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi'(x) + \varphi'(x)\,\psi(x)} = 0,$$

wenn die Ordnung von $F(x)$ höchstens gleich $m_1 + m_2 - 2$ ist, und die Summe für alle $m_1 + m_2$ Wurzeln der Polynome $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gebildet wird. Setzt man aber die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ in diesen Ausdruck ein, so reduziert sich derselbe auf die Form:

$$\frac{F(x)}{\varphi'(x)\,\psi(x)},$$

und setzt man die Wurzeln von $\psi(x) = 0$ ein, so reduziert er sich in ähnlicher Weise. Es ist sonach

$$\sum_{\varphi(x)=0} \frac{F(x)}{\varphi'(x)\,\psi(x)} + \sum_{\psi(x)=0} \frac{F(x)}{\psi'(x)\,\varphi(x)} = 0,$$

oder

$$\sum_{\varphi(x)=0} \frac{F(x)}{\varphi'(x)\,\psi(x)} = -\sum_{\psi(x)=0} \frac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi'(x)}.$$

Die linke Seite bezieht sich auf die m_1 Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$, die rechte auf die m_2 Wurzeln der Gleichung $\psi(x) = 0$. Die Gleichung 6) geht aus dieser hervor, wenn man annimmt, dass die Funktion $F(x)$ durch $\psi(x)$ teilbar ist.

Die Partialbruchzerlegung für den allgemeinen Fall.

395. Der erste Lehrsatz des § 392, durch welchen die Möglichkeit der Zerlegung nachgewiesen ist, enthält zugleich die Methode dieselbe auszuführen. Denn setzt man

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x),$$

so erhält man

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

indem man

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)} \quad \text{und} \quad F_1(x) = \frac{F(x) - \frac{F(a)}{f_1(a)} f_1(x)}{x-a}$$

setzt. Man hat auf diese Weise einen Partialbruch, und man findet die übrigen, wenn man den nämlichen Satz auf den Quotienten

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}$$

anwendet. Hat die Gleichung $f(x) = 0$ lauter einfache Wurzeln, so gelangt man auf diese Weise auch wieder zu der vorhin aufgestellten Formel. Aber abgesehen von diesem Falle, erfordert die Ausführung dieses Prozesses ziemlich umständliche Rechnungen.

396. Man kann auch die Methode der unbestimmten Koeffizienten anwenden, die wir schon im § 394 benutzt haben. Man setze den irreducibelen Quotienten $\frac{F(x)}{f(x)}$, dessen Nenner durch $(x-a)^\alpha$ teilbar sein soll, aber durch keine höhere Potenz von $x-a$, gleich:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{(x-a)^\alpha F_\alpha(x)}{f(x)},$$

gemäss des Lehrsatzes I. Multipliziert man dann die Gleichung mit $f(x)$, und ersetzt man zugleich x durch $a+h$, so folgt:

$$F(a+h) = A\frac{f(a+h)}{h^\alpha} + A_1 \frac{f(a+h)}{h^{\alpha-1}} + \cdots A_{\alpha-1}\frac{f(a+h)}{h} + h^\alpha F_\alpha(a+h).$$

Nun ist nach der Taylorschen Entwickelung:

$$F(a+h) = F(a) + h F'(a) + \frac{h^2}{2!} F''(a) + \cdots \frac{h^{\alpha-1}}{\alpha-1!} F^{\alpha-1}(a) + \cdots$$

$$f(a+h) = \frac{h^\alpha}{\alpha!} f^\alpha(a) + \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1!} f^{\alpha+1}(a) + \cdots,$$

und trägt man diese Werte ein, so wird:

$$F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + \frac{h^2}{2!} F''(a) + \cdots \frac{h^{\alpha-1}}{\alpha-1!} F^{\alpha-1}(a) + \cdots,$$

$$= A \left[\frac{f^\alpha(a)}{\alpha!} + \frac{h}{\alpha+1!} f^{\alpha+1}(a) + \cdots\right],$$

$$+ A_1 \left[\frac{h}{\alpha!} f^\alpha(a) + \frac{h^2}{\alpha+1!} f^{\alpha+1}(a) + \cdots\right],$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ A_{\alpha-1} \left[\frac{h^{\alpha-1}}{\alpha!} f^\alpha(a) + \cdots\right] + h^\alpha F_\alpha(a+h).$$

Diese Gleichung gilt für jeden Wert von h; setzt man also die Koeffizienten der gleichen Potenzen von h auf beiden Seiten einander gleich, bis zur Potenz $\alpha - 1$, so erhält man:

$$\frac{A}{\alpha!} f^\alpha(a) = F(a),$$

$$\frac{A}{\alpha+1!} f^{\alpha+1}(a) + \frac{A_1}{\alpha!} f^\alpha(a) = F'(a),$$

$$\frac{A}{\alpha+2!} f^{\alpha+2}(a) + \frac{A_1}{\alpha+1!} f^{\alpha+1}(a) + \frac{A_2}{\alpha!} f^\alpha(a) = \frac{1}{2!} F''(a),$$

$$. \quad .$$

$$\frac{A}{2\alpha-1!} f^{2\alpha-1}(a) + \frac{A_1}{2\alpha-2!} f^{2\alpha-2}(a) + \cdots \frac{A_{\alpha-2}}{\alpha+1!} f^{\alpha+1}(a)$$

$$+ \frac{A_{\alpha-1}}{\alpha!} f^\alpha(a) = \frac{1}{\alpha-1!} F^{\alpha-1}(a).$$

Aus diesen Gleichungen kann man nach einander die Werte $A, A_1, A_2 \ldots$ berechnen, und diese Werte sind endlich und bestimmt, weil $f^\alpha(a)$ der Annahme nach von null verschieden ist. So ergeben sich alle Partialbrüche, welche den verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ entsprechen,

und die ganze Funktion kann von vornherein durch Division von $F(x)$ durch $f(x)$ ermittelt werden.

Man kann die Rechnung auch in folgender Weise ausführen: Nachdem man durch Division die ganze Funktion bestimmt hat, setzt man den übrigen echt gebrochenen Teil gleich der Summe von Partialbrüchen, in welche sich derselbe zerlegen lassen muss, wobei die Zähler dieser Brüche noch unbestimmt sind. Entfernt man nun durch Multiplikation alle Nenner und setzt man die Koeffizienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man die zur Bestimmung dieser Koeffizienten notwendigen linearen Gleichungen.

397. Endlich kann man auch die Zerlegung durch ein Verfahren gewinnen, welches nur algebraische Divisionen erfordert. Denn setzt man wie vorhin

$$f(x) = (x - a)^\alpha f_1(x),$$

und schreibt man $a + h$ an Stelle von x, so wird die Gleichung des vorigen Paragraphen, multipliziert mit h^α:

$$\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)} = A + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots A_{\alpha-1} h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha F_\alpha(a+h)}{f_1(a+h)},$$

und man erkennt, dass das Polynom

$$A + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots A_{\alpha-1} h^{\alpha-1}$$

der Quotient ist, welchen man aus der Division von $F(a+h)$ mit $f_1(a+h)$ gewinnt, wenn der Quotient, geordnet nach Potenzen von h, bis zu dem Rest von der Ordnung α entwickelt wird. Durch diese Division findet man also die Partialbrüche, welche zur Wurzel a gehören.

In gleicher Weise kann man, unabhängig von einander, die Partialbrüche, welche zu den verschiedenen Wurzeln gehören, bestimmen, noch einfacher aber wird es sein, die nämliche Methode auf den Bruch $\dfrac{F_\alpha(x)}{f(x)}$ anzuwenden, welcher aus dem Reste der ersten Division entsteht. Alsdann erhält man die Glieder, welche sich auf eine zweite Wurzel beziehen, nebst einem dritten Quotienten, mit dem das Verfahren fortzusetzen ist.

398. Die vorige Methode hat überdies den Vorteil, dass man für die Zähler der Partialbrüche zugleich ihren allgemeinen algebraischen Ausdruck kennen lernt. Denn die Division der Polynome $F(a+h)$ und $f_1(a+h)$, welche wir zur Bestimmung der Koeffizienten A, A_1, $A_2 \ldots$ ausführen, ist dieselbe wie die Entwickelung der Funktion $\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)}$ in eine nach wachsenden Potenzen von h geordnete Reihe, und da sich eine Funktion nur auf eine einzige Weise in solch eine Reihe entwickeln lässt, so erhält man dasselbe Resultat auch nach der Mac-Laurinschen Formel. Setzt man also

$$\frac{F(x)}{f_1(x)} = \varphi(x),$$

so wird

$$\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)} = \varphi(a+h) = \varphi(a) + h\,\varphi'(a) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(a) + \cdots \frac{h^{\alpha-1}}{\alpha-1!}\varphi^{\alpha-1}(a) + h^\alpha R_1,$$

wobei $h^\alpha R_1$ den Rest der Reihe bedeutet. Man erhält also

$$A = \varphi(a),\ A_1 = \varphi'(a),\ A_2 = \frac{\varphi''(a)}{2} \cdots A_{\alpha-1} = \frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{\alpha-1!},$$

und folglich den allgemeinen Satz:

Ist

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda$$

und $F(x)$ *eine ganze Funktion, welche durch* $f(x)$ *dividiert den ganzen Quotienten* $E(x)$ *und eine echt gebrochene Funktion liefert, so wird, wenn man*

$$\varphi(x) = (x-a)^\alpha \frac{F(x)}{f(x)},\quad \psi(x) = (x-b)^\beta \frac{F(x)}{f(x)} \cdots \tilde{\omega}(x) = (x-l)^\lambda \frac{F(x)}{f(x)}$$

setzt:

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = E(x) &+ \frac{\varphi(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi''(a)}{2!(x-a)^{\alpha-2}} + \cdots \frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{\alpha-1!(x-a)},\\ &+ \frac{\psi(b)}{(x-b)^\beta} + \frac{\psi'(b)}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{\psi''(b)}{2!(x-b)^{\beta-2}} + \cdots \frac{\psi^{\beta-1}(b)}{\beta-1!(x-b)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ \frac{\tilde{\omega}(l)}{(x-l)^\lambda} + \frac{\tilde{\omega}'(l)}{(x-l)^{\lambda-1}} + \frac{\tilde{\omega}''(l)}{2!(x-l)^{\lambda-2}} + \cdots \frac{\tilde{\omega}^{\lambda-1}(l)}{\lambda-1!(x-l)}.\end{aligned}$$

Neue Form der Darstellung einer rationalen Funktion durch ihre Partialbrüche.

399. Dem gewonnenen Resultate kann man noch eine andere sehr einfache und elegante Form geben, welche wir noch aufstellen wollen. Man bezeichne mit $F(x)$ eine rationale Funktion, mit

$$x_1,\ x_2 \ldots x_\mu$$

die verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$\frac{1}{F(x)} = 0,$$

und mit

$$m_1,\ m_2 \ldots m_\mu$$

die Ordnungen der Vielfachheit dieser Wurzeln. Ferner werde der Kürze halber

$$\varphi(x) = (x - x_1)^{m_1} F(x)$$

gesetzt, wobei $\varphi(x)$ eine Funktion bezeichnet, die für $x = x_1$ einen endlichen von null verschiedenen Wert hat.

Denkt man sich die rationale Funktion $F(x)$ in ihre Partialbrüche zerlegt, so ist die Summe der zu der Wurzel x_1 gehörigen Brüche

$$\frac{\varphi(x_1)}{(x-x_1)^{m_1}} + \frac{\varphi'(x_1)}{(x-x_1)^{m_1-1}} + \cdots \frac{\varphi^{m_1-i-1}(x_1)}{(m_1-i-1)!(x-x_1)^{i+1}} + \cdots \frac{\varphi^{m_1-1}(x)}{m_1-1!(x-x_1)}.$$

Folglich ergiebt sich diese Summe, wenn man in dem Ausdruck

$$\frac{\varphi(x_1+\zeta)}{(x-x_1-\zeta)^{m_1}} + \frac{\varphi'(x_1+\zeta)}{(x-x_1-\zeta)^{m_1-1}} + \cdots \frac{\varphi^{m_1-i-1}(x_1+\zeta)}{(m_1-i-1)!\,(x-x_1-\zeta)^{i+1}}$$
$$+ \cdots \frac{\varphi^{m_1-1}(x_1+\zeta)}{(m_1-1)!\,(x-x_1-\zeta)}$$

die Grösse ζ gleich null setzt. Die Funktionen $\varphi'(x_1+\zeta)$, $\varphi''(x_1+\zeta) \ldots$ können aber als die Ableitungen von $\varphi(x_1+\zeta)$ nach der Variabelen ζ betrachtet werden, und man erkennt leicht, dass der vorige Ausdruck sich auf

$$\frac{1}{m_1-1!} \frac{d^{m_1-1} \dfrac{\varphi(x_1+\zeta)}{(x-x_1-\zeta)}}{d\zeta^{m_1-1}}$$

reduziert, wenn $m_1 - 1!$ das Produkt der $m - 1$ ersten ganzen Zahlen bedeutet, falls $m_1 > 1$ ist, und die Zahl 1 bedeutet für $m_1 = 1$.

Da

$$\varphi(x_1+\zeta) = \zeta^{m_1} F(x_1+\zeta)$$

ist, so ist die Summe der auf die Wurzel x_1 bezüglichen Partialbrüche gleich dem Werte, den der Ausdruck

$$\frac{1}{m_1-1!}\,\frac{d^{m_1-1}\dfrac{\zeta^{m_1} F(x_1+\zeta)}{(x-x_1-\zeta)}}{d\zeta^{m_1-1}}$$

für $\zeta = 0$ annimmt. Wenn also die rationale Funktion $F(x)$ keinen ganzen Bestandteil enthält, so ist

$$F(x) = \sum \frac{1}{m-1!}\,\frac{d^{m_1-1}\dfrac{\zeta^{m_1} F(x_1+\zeta)}{(x-x_1-\zeta)}}{d\zeta^{m_1-1}}.$$

In dieser Formel ist nach den Differentiationen $\zeta = 0$ zu setzen, und das Summenzeichen bezieht sich auf alle Wurzeln $x_1, x_2 \ldots x_\mu$. Es ist wohl kaum nötig hinzuzufügen, dass, wenn der Grad einer Wurzel, z. B. von x_1, gleich eins ist, die Ableitung $m_1 - 1^{\text{ter}}$ Ordnung sich auf

$$\frac{\zeta F(x_1+\zeta)}{x-x_1-\zeta}$$

reduziert.

Enthält die Funktion $F(x)$ eine ganze Funktion $E(x)$, so hat man

$$F(x) = E(x) + \sum \frac{1}{m_1-1!}\,\frac{d^{m_1-1}\dfrac{\zeta^{m_1} F(x_1+\zeta)}{x-x_1-\zeta}}{d\zeta^{m_1-1}},$$

und der Wert von $E(x)$ lässt sich folgendermassen bestimmen. Bezeichnet n den Überschuss des Grades des Zählers von $F(x)$ über den Grad des Nenners, so wird n der Grad der Funktion $E(x)$. Setzt man nun in der Gleichung an Stelle von x den Wert $\frac{1}{z}$ und multipliziert man beide Seiten mit z^n, so folgt:

$$z^n F\left(\frac{1}{z}\right) = z^n E\left(\frac{1}{z}\right) + z^{n+1} \sum \frac{1}{m_1-1!}\,\frac{d^{m_1-1}\dfrac{\zeta^{m_1} F(x_1+\zeta)}{1-z(x_1+\zeta)}}{d\zeta^{m_1-1}}.$$

Hieraus erkennt man, dass wenn $z^n F\left(\frac{1}{z}\right)$ in eine Reihe entwickelt wird, welche nach wachsenden Potenzen von z fortschreitet, die Summe aller Glieder, deren Ordnung nicht grösser ist als n, gleich $z^n E\left(\frac{1}{z}\right)$ ist

Bezeichnet nun ζ eine Grösse, welche null wird, so hat man nach der Mac-Laurinschen Formel

$$z^n F\left(\frac{1}{z}\right) = \zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right) + z \frac{d}{d\zeta}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] + \frac{z^2}{2!}\frac{d^2}{d\zeta^2}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] + \cdots,$$

also ist

$$z^n E\left(\frac{1}{z}\right) = \zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right) + z \frac{d}{d\zeta}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] + \frac{z^2}{2!}\frac{d^2}{d\zeta^2}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] + \cdots \frac{z^n}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right];$$

oder

$$E(x) = x^n \left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] + x^{n-1}\frac{d}{d\zeta}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] + \frac{x^{n-2}}{2!}\frac{d^2}{d\zeta^2}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]$$
$$+ \cdots \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right].$$

Man kann auch einen anderen noch einfacheren Ausdruck für das Polynom $E(x)$ finden. Der Koeffizient von ζ^{n-i} in der Entwickelung von $\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ nach ganzen wachsenden Potenzen von ζ ist nämlich gleich dem Koeffizienten von ζ^n in der Entwickelung von $\zeta^{n+i} F\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Andererseits sind diese Koeffizienten die Werte, welche die beiden Ausdrücke

$$\frac{1}{n-i!}\frac{d^{n-i}\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^{n-i}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n!}\frac{d^n \zeta^{n+i} F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^n}$$

für $\zeta = 0$ annehmen. Also ist für $\zeta = 0$

$$\frac{1}{n-i!}\frac{d^{n-i}\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^{n-i}} = \frac{1}{n!}\frac{d^n \zeta^{n+i} F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^n}.$$

Für den Fall $n = i$ reduziert sich der Ausdruck links auf $\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)$.

Demnach wird der Wert von $E(x)$:

$$E(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)(1 + \zeta x + \zeta^2 x^2 + \cdots \zeta^n x^n)\right].$$

Endlich kann man, da für $\zeta = 0$ und für $i > n$

$$\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\zeta^{n+i} F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] = 0$$

wird, auch schreiben:

$$E(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)(1 + \zeta x + \zeta^2 x^2 + \cdots \zeta^n x^n + \zeta^{n+1} x^{n+1} + \cdots)\right],$$

oder

$$E(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\frac{\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{1 - \zeta x}\right].$$

Demnach hat man die folgende Formel, welche die Zerlegung einer beliebigen rationalen Funktion in eine ganze Funktion und in Partialbrüche darstellt:

$$F(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\frac{\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{1-\zeta x}\right] + \sum \frac{1}{m_1 - 1!}\frac{d^{m_1-1}}{d\zeta^{m_1-1}}\left[\frac{\zeta^{m_1} F(x_1+\zeta)}{x - x_1 - \zeta}\right].$$

Die Grösse ζ muss nach den Differentiationen gleich null gesetzt werden.

Spezielle Art der Zerlegung rationaler und reeller Quotienten, deren Nenner komplexe Faktoren besitzt.

400. Die entwickelte Theorie gilt für alle rationalen gebrochenen Funktionen, die Koeffizienten mögen reell oder komplex sein. Wenn aber die Koeffizienten reell sind, und unter den Wurzeln des Nenners $f(x) = 0$ befinden sich komplexe Werte, so enthält auch die Zerlegung des Bruches $\frac{F(x)}{f(x)}$ komplexe Konstanten. In diesem Falle sucht man die Zerlegung so abzuändern, dass auch die einzelnen Brüche eine reelle Form bekommen.

401. Die Möglichkeit solch einer Zerlegungsform ergiebt sich aus dem folgenden Satze:

Lehrsatz I. *Ist* $x^2 + px + q$ *das Produkt der beiden konjugiert komplexen Faktoren des reellen Polynomes* $f(x)$, *und* n *die höchste Potenz dieses Trinomes, welches einen Faktor von* $f(x)$ *bildet, so dass*

$$f(x) = (x^2 + px + q)^n f_1(x)$$

ist, so kann der reelle rationale Quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ *in folgender Weise zerlegt werden:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{F_1(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1} f_1(x)},$$

wobei P *und* Q *reelle Konstanten und* $F_1(x)$ *ein reelles Polynom ist.*

Denn es ist identisch:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)} = \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{F(x) - (Px+Q) f_1(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)},$$

und man kann P und Q so bestimmen, dass der Zähler des zweiten Teiles auf der rechten Seite durch $x^2 + px + q$ teilbar

wird, d. h. dass er verschwindet, wenn man für x jede der beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

einsetzt. Bezeichnen wir diese Wurzeln mit $h + ik$ und $h - ik$, und setzen wir

$$F(h \pm ik) - [P(h \pm ik) + Q] f_1(h \pm ik) = 0,$$

so wird

$$P(h \pm ik) + Q = \frac{F(h \pm ik)}{f_1(h \pm ik)} = M \pm iN.$$

Die Grössen M und N sind reell und haben bestimmte endliche Werte, weil der Annahme nach $f_1(x)$ nicht mehr teilbar ist durch $x^2 + px + q$. Die Gleichung zerlegt sich dann in die beiden

$$Ph + Q = M, \quad Pk = N,$$

welche für P und k die reellen und endlichen Werte ergeben:

$$P = \frac{N}{k}, \quad Q = \frac{Mk - Nh}{k}.$$

Nachdem die Werte von P und Q auf diese Weise bestimmt sind, setzt man

$$\frac{F(x) - (Px + Q) f_1(x)}{x^2 + px + q} = F_1(x),$$

und $F_1(x)$ wird ein reelles Polynom, und man erhält:

$$\frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^n f_1(x)} = \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{F_1(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1} f_1(x)},$$

was zu beweisen war.

Folgerung. *Die rationale gebrochene Funktion* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *lässt sich in folgender Weise zerlegen:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \cdots \frac{P_{n-1} x + Q_{n-1}}{(x^2 + px + q)} + \frac{F_n(x)}{f_1(x)},$$

wobei $P, Q, P_1, Q_1 \ldots$ *reelle Konstanten und* $F_n(x)$ *ein reelles Polynom bezeichnen.*

402. Verbindet man diesen Satz mit dem analogen des § 392, so erhält man den folgenden:

Lehrsatz II. *Zerlegt man das reelle Polynom* f(x) *in seine reellen Faktoren ersten und zweiten Grades, derart dass*

$$f(x) = (x-\alpha)^\alpha (x-\beta)^\beta \cdots (x-l)^\lambda (x^2+px+q)^n \cdots (x^2+rx+s)^m$$

ist, so kann man die rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ *in folgender Weise darstellen:*

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = E(x) &+ \frac{A}{(x-\alpha)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\alpha-1}} + \cdots \frac{A_{\alpha-1}}{x-\alpha}, \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}, \\ &+ \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \cdots \frac{P_{n-1}x+Q_{n-1}}{x^2+px+q}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{Rx+S}{(x^2+rx+s)^m} + \frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{m_1-1}} + \cdots \frac{R_{m-1}x+S_{m-1}}{(x^2+rx+s)}.\end{aligned}$$

E(x) *bezeichnet eine ganze Funktion, die auch null sein kann, die Grössen* $A, A_1 \ldots L, L_1 \ldots P, Q, P_1, Q_1 \ldots$ *sind reelle Konstanten.*

403. Lehrsatz III. *Die rationale Funktion kann nur auf eine einzige Weise in der angegebenen Form zerlegt werden.*

Angenommen, es seien zwei Werte für die nämliche rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ gefunden. Wie im § 393 kann man alsdann die Gleichheit der Partialbrüche beweisen, welche zu linearen Faktoren des Nenners gehören. In gleicher Weise lässt sich dieselbe aber auch für die Faktoren zweiten Grades beweisen. Ist nämlich $\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}$ das Glied, dessen Nenner die höchste Potenz von x^2+px+q in der ersten für $\frac{F(x)}{f(x)}$ gefundenen Zerlegung enthält, und $\frac{P'x+Q'}{(x^2+px+q)^{n'}}$ das analoge Glied in der zweiten, so muss $n = n'$ sein. Denn nimmt man an, dass $n > n'$ wäre, so würde aus der Gleichheit der beiden Formeln für $\frac{F(x)}{f(x)}$ eine Gleichung für den Wert von

$\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}$ folgen. Dieser Wert würde durch eine Summe von Grössen dargestellt sein, von denen keine in ihrem Nenner eine Potenz von x^2+px+q enthält, deren Exponent grösser ist als $n-1$. Bringt man diese Glieder alle auf gleichen Nenner, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} = \frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}\psi(x)},$$

oder

$$Px+Q = (x^2+px+q)\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

$\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bezeichnen Polynome, von denen das zweite, $\psi(x)$, durch x^2+px+q nicht teilbar ist. Diese Gleichung ist aber unmöglich; denn die Gleichung $Px+Q=0$ müsste die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2+px+q=0$ zulassen, was nicht eintreten kann, da P und Q der Voraussetzung nach nicht beide gleichzeitig null sind. Man kann daher weder $n > n'$ noch $n' > n$ annehmen, folglich ist $n' = n$.

Weiter ist zu zeigen, dass auch $P = P'$ und $Q = Q'$ ist. Denn betrachtet man wiederum die Gleichung, welche zwischen den beiden Formen von $\frac{F(x)}{f(x)}$ besteht, und vereinigt man auf einer Seite die beiden Terme $\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}$ und $\frac{P'x+Q'}{(x^2+px+q)^n}$, auf der anderen die übrigen, deren Nenner keine höhere Potenz von x^2+px+q als die $n-1^{\text{te}}$ enthält, so ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{(P-P')x+Q-Q'}{(x^2+px+q)^n} = \frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}\psi(x)},$$

oder

$$(P-P')x+(Q-Q') = (x^2+px+q)\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Auch hier bezeichnen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Polynome, von denen $\psi(x)$ jedenfalls nicht teilbar ist durch x^2+px+q, und es folgt also wie oben

$$P = P', \quad Q = Q'.$$

In den beiden Formen von $\frac{F(x)}{f(x)}$ sind also die Glieder, welche im Nenner die höchste Potenz eines Faktors zweiten

Grades enthalten, einander gleich. Lässt man diese Glieder fort, so sind die Reste einander gleich, und wendet man dieselbe Betrachtung auf diese Funktionen an, so sieht man, dass die beiden Formen der betrachteten Quotienten aus Partialbrüchen zusammengesetzt sind, welche paarweise übereinstimmen; zugleich ergiebt sich auch die Gleichheit der ganzen Funktionen, falls solche vorhanden sind.

404. Methode der Zerlegung. Um die Zerlegung auszuführen, wird man die ganze Funktion und die Partialbrüche, welche zu reellen Faktoren ersten Grades gehören, so bestimmen, wie es im § 395 und in den folgenden gezeigt wurde. Die Brüche, welche zu reellen Faktoren zweiten Grades gehören, kann man nach einander mittelst desselben Verfahrens berechnen, welches zum Beweise des ersten Lehrsatzes diente. Auch die Methode der unbestimmten Koeffizienten lässt sich anwenden.

In dem Falle, wo die komplexen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ alle verschieden sind, kann man den neuen Ausdruck für die rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ auch ableiten aus demjenigen, der im § 394 aufgestellt wurde. Denn sind $h + ik$ und $h - ik$ zwei einfache komplexe Wurzeln, so enthält der Bruch $\frac{F(x)}{f(x)}$ die beiden Partialbrüche:

$$\frac{F(h+ik)}{f'(h+ik)} \cdot \frac{1}{x-h-ik} \quad \text{und} \quad \frac{F(h-ik)}{f'(h-ik)} \cdot \frac{1}{x-h+ik},$$

deren Summe die Form hat

$$\frac{A+iB}{x-h-ik} + \frac{A-iB}{x-h+ik}.$$

Dieselbe reduziert sich demnach auf

$$\frac{Px+Q}{(x-h)^2+k^2}.$$

Hieraus folgt, dass der Partialbruch $\frac{Px+Q}{(x-h)^2+k^2}$, in welchem P und Q reelle Konstante sind, die beiden Partialbrüche ersetzt, welche zu den Wurzeln $h \pm ik$ gehören.

Bestimmung einer ganzen Funktion vermittelst der Werte, welche zu gegebenen Werten der Variabelen gehören.

405. Eine ganze Funktion der Variabelen x vom Grade m ist vollständig bestimmt, wenn man die Werte dieser Funktion kennt, welche zu $m+1$ gegebenen Werten von x gehören. Die Gleichung, durch welche die Funktion bestimmt wird, ist, wie man sehen wird, genau die nämliche, welche im § 394 aufgestellt wurde, und die den Wert einer rationalen Funktion, zerlegt in ihre Partialbrüche, ausdrückt.

Es seien $u_0, u_1, u_2 \ldots u_m$ die Werte einer rationalen Funktion $F(x)$ vom Grade m, welche zu den gegebenen Werten $x_0, x_1 \ldots x_m$ der Variabelen x gehören. Wir setzen

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_m),$$

so ist

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - x_0} + \frac{f(x)}{x - x_1} \cdots \frac{f(x)}{x - x_m},$$

und folglich

$$f'(x_\mu) = (x_\mu - x_0)(x_\mu - x_1) \ldots (x_\mu - x_m).$$

Da der Grad von $f(x)$ um eine Einheit den Grad von $F(x)$ übertrifft, so ist nach § 394:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x_0)}{f'(x_0)} \cdot \frac{1}{x - x_0} + \frac{F(x_1)}{f'(x_1)} \cdot \frac{1}{x - x_1} + \cdots \frac{F(x_m)}{f'(x_m)} \frac{1}{x - x_m},$$

und multipliziert man mit $f(x)$, so folgt:

$$F(x) = u_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_m)} + u_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_m)}$$
$$+ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$
$$+ u_m \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{m-1})}{(x_m - x_0)(x_m - x_1) \cdots (x_m - x_{m-1})}.$$

Diese Gleichung giebt die Lösung der vorgelegten Aufgabe, und diese kann keine andere Lösung besitzen. Denn würde noch eine andere Funktion $F_1(x)$ vom Grade m existieren, die

von $F(x)$ verschieden ist und doch denselben Bedingungen genügt, so hätte die Gleichung

$$F_1(x) - F(x) = 0,$$

deren Grad nicht höher ist als m, die $m + 1$ Wurzeln $x_0, x_1 \dots x_m$, was nur so möglich ist, dass die Koeffizienten identisch verschwinden.

Ende des ersten Bandes.

